Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

1.2 Variablen

Natürlich ist uns das Original nicht erhalten geblieben. Die älteste arabische Abschrift davon, die wir kennen, stammt aus dem Jahre 743 der Hedschra, d.h. aus dem Jahre 1342 unserer Zeitrechnung. Und wie ist dieses Buch zu uns nach Europa gekommen? Du weißt vielleicht schon, daß im Jahre 711 die Araber fast ganz Spanien eroberten und in Córdoba ein prächtiges Kalifat gründeten. Muslime, Christen und Juden lebten dort in Eintracht zusammen und widmeten sich auch den Wissenschaften. So soll die Bibliothek des Kalifen von Córdoba an die 600000 Handschriften besessen haben! Die Kunde von der Gelehrsamkeit der Araber drang, von den Teilnehmern an den Kreuzzügen bestätigt, ins christliche Europa, in dem um die Mitte des 11. Jh.s ein Aufschwung wissenschaftlichen Denkens einsetzte. Man interessierte sich wieder für die Werke der alten griechischen Philosophen und Wissenschaftler und mußte feststellen, daß sie vielfach nur mehr in arabischer Übersetzung erhalten waren. Deshalb richtete der Erzbischof RAIMUND (zwischen 1130 und 1150) in Toledo, das König Alfons VI. von Kastilien und León den Arabern 1085 entrissen hatte, eine große Übersetzerschule ein, um die arabischen Texte ins vertraute Latein übertragen zu lassen. In dieses Toledo zog es auch den 1114 in Cremona geborenen GERHARD. Und die Stadt des Wissens und der Bücher ließ ihn nicht mehr los; 1187 verstarb er dort. Über 90 Werke aus der Philosophie, der Astronomie, der Mathematik, der Alchimie und der Medizin hat er aus dem Arabischen ins Lateinische übersetzt. Darunter auch das in der arabischen Welt berühmt gewordene Rechenbuch des AL-CHARIZMI. GERHARD VON CREMONA nannte es

liber maumeti filii moysi alchoarismi de algebra et almuchabala.

Natürlich besitzen wir auch von der Übersetzung nicht das Original, sondern nur eine Abschrift aus dem 14. Jh. GERHARD VON CREMONA schrieb für das arabische *al-dschabr* einfach *algebra*, weil man damals ein so geschriebenes Wort wie »aldschebra« aussprach*. *Algebra et almuchabala* wurden durch GERHARD in Europa zum Namen einer mathematischen Wissenschaft, die man in Italien später auch *Ars magna* – Die große Kunst – nannte.

Im 14. Jh. verschwand das *et almuchabala* immer mehr, und 1577 erschien es zum letzten Mal im Titel eines Buchs. Von da an hieß diese Kunst nur mehr *Algebra*. Zu einer wahrlich großen Kunst wurde sie aber erst durch François VIÈTE (1540–1603), der 1591 die *Algebra nova*, die *neue Algebra* begründete, nämlich das Rechnen mit Buchstaben. Und wenn du in den nächsten vier Jahren dieses Rechnen mit Buchstaben, also die Algebra, erlernt haben wirst, dann wirst du dem Ziel näher gekommen sein, das VIÈTE mit seiner Algebra bereits erreicht zu haben glaubte, nämlich

jedes Problem lösen zu können

NULLUM NON PROBLEMA SOLVERE.

1.2 Variablen

Im bisherigen Mathematikunterricht wurden schon oft sogenannte Platzhalter verwendet. Wozu sie notwendig oder nützlich sind, sollen die folgenden Beispiele noch einmal zeigen.

* Ins Spanische und Portugiesische ging dieses *algebra* in der alten Bedeutung des Einrichtens von Knochen ein; denn der Wundarzt heißt in diesen Sprachen *algebrista*.

Beispiel 1:

Auf die Frage des Lehrers »Wie berechnet man den Rauminhalt eines Quaders?« antwortet Hans: »Wenn die Kantenlängen z. B. 5 cm, 6 cm und 7 cm sind, muß man $5\,\text{cm} \cdot 6\,\text{cm} \cdot 7\,\text{cm} = 210\,\text{cm}^3$ rechnen.«
Uli beantwortet dieselbe Frage so: »Man muß das Produkt aus Länge, Breite und Höhe des Quaders bilden, um das Volumen zu erhalten.«
Hans hat nichts Falsches gesagt, aber Ulis Antwort ist sicher besser! Denn während Hans nur an einem *Beispiel* die Volumenberechnung vorführt, gibt Uli die *allgemeine Regel* an, nach welcher diese Aufgabe für jeden Quader gelöst werden kann.

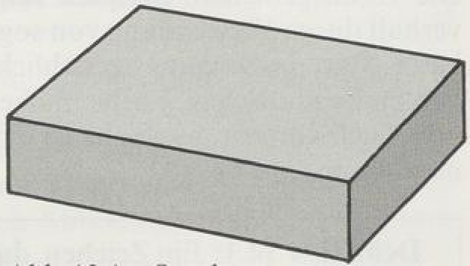


Abb. 13.1 Quader

Um diese allgemeine Regel übersichtlich anschreiben zu können, benützt man für die verschiedenen Größen abkürzende Bezeichnungen, z. B. l für die Länge, b für die Breite, h für die Höhe und V für das Volumen.
Dann lautet die Regel:
$V = l \cdot b \cdot h$.

Beispiel 2:

Die Zahlen 2, 4, 6, 8, ..., also die Vielfachen von 2, nennt man bekanntlich *gerade Zahlen**. Außerdem wird wegen $0 = 0 \cdot 2$ auch null als gerade Zahl aufgefaßt. Das läßt sich kurz so zusammenfassen:
Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist $z = 2 \cdot n$ eine gerade Zahl.
Man nennt die Angabe »$z = 2 \cdot n$, $n \in \mathbb{N}_0$« das *Bildungsgesetz* für die geraden Zahlen.
Da man alle ungeraden Zahlen erhält, wenn man zu jeder geraden Zahl 1 addiert (Abb. 13.2), gilt:
$z = 2 \cdot n + 1$, $n \in \mathbb{N}_0$, ist das Bildungsgesetz der ungeraden Zahlen.

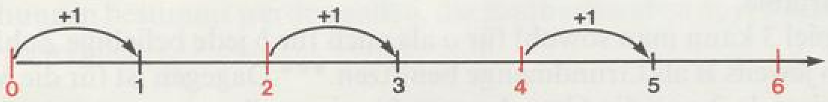


Abb. 13.2 Gerade und ungerade Zahlen

* Die Griechen – belegt zum ersten Mal bei dem um 500 v. Chr. in Syrakus lebenden Komödiendichter Epicharmos – nannten eine **gerade Zahl** ἄρτιος (ártios) = *passend, angemessen*, eine ungerade Zahl περισσός (perissós) = *über das Gewöhnliche hinausgehend, übrigbleibend*, was man vielleicht so verstehen kann, wie es Euklid im Buch VII seiner *Elemente* ausdrückt, nämlich, daß die ungerade Zahl sich um 1 von der geraden Zahl unterscheidet. Diese griechischen Ausdrücke finden ihre Entsprechung im Englischen durch *even* = *ausgeglichen, gerecht*, und *odd* = *sonderbar, überzählig*. Die Römer sagten seit Cicero (106–43 v. Chr.) *par* und *impar*, was im Französischen als *pair* und *impair* weiterlebt und 1461 in einer Münchener Handschrift mit *gleich* und *ungleich* wörtlich übersetzt wurde. Vielleicht rührt diese Bezeichnung davon her, daß sich eine gerade Zahl in zwei *gleiche* Teile zerlegen läßt. Diese Ausdrücke hielten sich bis ins 18. Jh. Unsere Bezeichnungen *gerade* und *ungerade* tauchen im 15. Jh. auf und finden sich 1489 im Rechenbuch des Johannes Widmann von Eger (um 1460–nach 1500).

Beispiel 3:

Der Wert einer Summe ändert sich bekanntlich nicht, wenn man die beiden Summanden vertauscht. So gilt z. B. $3+5=5+3$. Aber einzelne Zahlenbeispiele, und seien es noch so viele, können diesen Sachverhalt nicht allgemeingültig zum Ausdruck bringen. Bezeichnet man aber den einen Summanden mit a, den anderen mit b, so gilt in jedem Fall $a+b=b+a$. Das heißt: Setzt man für a und für b beliebig je eine Zahl ein, so ist die erhaltene Gleichung immer richtig.

Die vorausgehenden Beispiele zeigen, wie man einen mathematischen Sachverhalt durch Verwendung von sog. Platzhaltern klar und einfach beschreiben kann. Statt des umgangssprachlichen Wortes »Platzhalter« verwendet man in der mathematischen Fachsprache den Begriff »Variable«*. Die Festlegung von Fachwörtern geschieht in der Mathematik durch Definitionen**. Wir merken uns

Definition 14.1: Ein Zeichen, das man als Platzhalter für Zahlen verwendet, nennt man **Variable.**

Als Variablen werden in der Regel Buchstaben benützt. Diese Buchstaben selbst sind natürlich keine Zahlen. Wenn wir trotzdem von einer »Zahl x« sprechen, so ist das ein kurzer Ausdruck für »die Zahl, die wir uns für die Variable x eingesetzt denken«. Ebenso ist die »Summe aus den Zahlen a und b« eine Kurzform für »die Summe aus den für a und b eingesetzten Zahlen«. Auf Grund dieser Vereinbarung kann man also mit Buchstaben wie mit Zahlen rechnen.

Rechenausdrücke, in denen Variablen vorkommen, erhalten erst dann die Bedeutung von Zahlen, wenn man *alle* Variablen durch Zahlen ersetzt. Dabei ist es wichtig zu wissen, welche Zahlen für eine bestimmte Variable eingesetzt werden dürfen. Man nennt die Gesamtheit dieser Zahlen die **Grundmenge** für diese Variable.

Im Beispiel 3 kann man sowohl für a als auch für b jede beliebige Zahl einsetzen, also jeweils $\mathbb{B}$ als Grundmenge benützen.*** Dagegen ist für die Variable n des Beispiels 2 nur die Grundmenge $\mathbb{N}_0$ sinnvoll.

In vielen Fällen können wir uns die Angabe der Grundmenge ersparen durch die

Vereinbarung 14.1: Wenn nichts anderes angegeben ist, soll immer die Menge aller uns bekannten Zahlen als Grundmenge verwendet werden, zunächst also die Menge $\mathbb{B}$.

* variabilis (lat.) = veränderlich

** definire (lat.) = abgrenzen, näher bestimmen, festsetzen

*** $\mathbb{B}$ ist die Menge aller Zahlen, die als Bruch $\frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{N}_0$ und $n \in \mathbb{N}$ darstellbar sind.

Kommt in einem Rechenausdruck oder einer Gleichung bzw. Ungleichung dieselbe Variable mehrmals vor, so muß man beim Einsetzen diese Variable an jeder Stelle durch *die gleiche Zahl* ersetzen. So hat man etwa bei der im Beispiel 3 angegebenen Gleichung für die Variable a auf beiden Seiten dieselbe Zahl einzusetzen; das Entsprechende gilt auch für b. Selbstverständlich kann man aber für verschiedene Variablen auch die gleiche Zahl einsetzen.

Regel 15.1: Innerhalb desselben Rechenausdrucks bzw. derselben Gleichung oder Ungleichung muß man beim Einsetzen gleiche Variablen durch gleiche Zahlen ersetzen.

Man könnte als Variablen an Stelle von Buchstaben noch sinnfälliger verschiedene geometrische Figuren verwenden. Eine bestimmte geometrische Figur würde dann die Stellen bezeichnen, welche mit derselben Zahl besetzt werden müssen; man spricht deshalb auch von **Leerstellen**. Zum Beispiel ließe sich die Gleichung $a + b = b + a$ auch durch Abbildung 15.1 zum Ausdruck bringen:

Abb. 15.1 Kommutativgesetz der Addition

Man kann in die Kreise irgendeine Zahl einsetzen und ebenso in die Quadrate; es ergibt sich stets eine richtige Gleichung. Ein Beispiel dazu zeigt Abbildung 15.2:

Abb. 15.2 Beispiel zum Kommutativgesetz der Addition

Das Zeichnen solcher geometrischer Figuren erfordert einige Sorgfalt. Daher benützt man als Variablen im allgemeinen doch lieber Buchstaben. Welche Buchstaben man jeweils wählt, ist an sich völlig gleichgültig. Es ist jedoch üblich, für »unbekannte Zahlen«, d. h. solche, die erst aus Gleichungen oder Ungleichungen bestimmt werden sollen, die Endbuchstaben x, y, z des Alphabets zu verwenden.

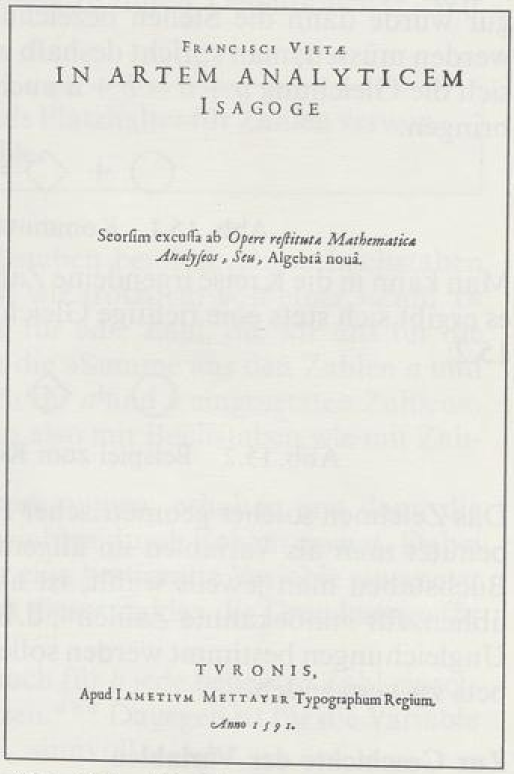
** Zur Geschichte der Variablen

Wir haben gesehen, daß es nützlich und bequem ist, an Stelle von Zahlen Buchstaben zu verwenden, wenn man allgemeingültige Zusammenhänge, also Gesetze ausdrücken will oder wenn man einen Rechenvorgang allgemein beschreiben will. Es ist aber gar nicht so lange her, daß die Mathematiker das so machen. Früher hat man ein Beispiel mit bekannten Zahlen vorgerechnet und dann gesagt, daß man es genauso machen könne, wenn andere Zahlen gegeben sind. Ein solches Vorgehen kann natürlich gefährlich sein. Denn woher soll man wissen, ob die einmal vorgeführte Rechnung immer so geht?

So findet z. B. jemand, daß man $\frac{16}{64}$ kürzen kann, indem man im Zähler und im Nenner die gleiche Ziffer 6 wegläßt: $\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$. Auch bei $\frac{10}{20}$ stimmt die Regel: Weglassen der 0 ergibt $\frac{1}{2}$. Aber leider stimmt diese schöne Regel schon nicht bei $\frac{15}{54}$.

Noch ein Beispiel: Jemand findet, daß $2^4 = 4^2$ ist. Das Austauschen der Zahlen funktioniert aber schon nicht mehr bei 2^3; denn 2^3 ist 8 und damit von $3^2 = 9$ verschieden. Einer der ersten, der einen allgemeinen Zusammenhang durch Buchstaben ausdrückte, war EUKLID (um 300 v. Chr.), der in seinem berühmten Geometriebuch *Elemente* Punkte und Strecken mit Buchstaben bezeichnete.
Im 9. Jahrhundert n. Chr. schrieb in Byzanz der Philosoph und Mathematiker LEON einen Kommentar zu diesem Geometriebuch, und da wimmelt es schon von Buchstaben; siehe Aufgabe 20/**28**, in der er ein allgemeines Rechengesetz der Algebra ausdrücken will.
Durchgesetzt hat sich diese Idee aber nicht. Einige hundert Jahre später lernt der aus Pisa stammende Kaufmann LEONARDO, genannt auch FIBONACCI* (um 1170–nach 1240) auf seinen Reisen die arabische Mathematik kennen, die ihn so fasziniert, daß er selbst Bücher über Mathematik schreibt. Und dabei verwendet er gelegentlich Buchstaben, um Rechengesetze zu beschreiben (Aufgabe 20/**29**).

Abb. 16.1 François VIÈTE, latinisiert zu Franciscus VIETA (1540 Fontenay-le-Comte/Vendée – 13.[?]2.[?] 1603 Paris)


FRANCISCI VIETÆ
IN ARTEM ANALYTICEM
ISAGOGE

Seorſim excuſſa ab *Opere reſtitutæ Mathematicæ Analyſeos, Seu,* Algebrâ nouâ.

TVRONIS,
Apud IAMETIVM METTAYER Typographum Regium.
Anno 1591.

Abb. 16.2 Titelblatt von FRANCISCUS VIETAS EINFÜHRUNG IN DIE ANALYTISCHE KUNST, eigens herausgenommen aus dem *Gesamtwerk der wiederhergestellten Mathematischen Analysis, nämlich*, der neuen Algebra. TOURS, bei IAMETIUS METTAYER Königlichem Drucker, *im Jahre 1591.*

* LEONARDO nennt sich in seinen Schriften *filius Bonacci* (Sohn des Bonatius), woraus *Fibonacci* wurde. Manchmal nennt er sich auch Leonardo bigollo, Leonard der Tölpel. – LEONARDO verkehrte auch am Hofe Kaiser Friedrichs II.

Von da an tauchen immer häufiger Buchstaben als Zeichen für Zahlen auf. Eine mathematische Sprache, d. h. eine Rechenkunst mit Buchstaben, schuf aber erst François VIÈTE (1540–1603), dessen Name in latinisierter Form mit VIETA wiedergegeben wird. Er verwendete erstmals systematisch sowohl Buchstaben an Stelle von Zahlen als auch Zeichen für die verschiedenen Rechenoperationen wie Addition, Multiplikation usw. Damit konnte er für die Summe aus A und B kurz A + B schreiben.
VIÈTE war Jurist und mußte ab 1564 als Sekretär des Hauses SOUBISE auch die damals 11jährige Tochter Catherine de PARTHENAY unterrichten. Diese interessierte sich so sehr für Astronomie und Mathematik, daß auch VIÈTE sich mit diesen Wissenschaften beschäftigen mußte. Und die Mathematik ließ ihn nicht mehr los! Als Ergebnis dieser Beschäftigung veröffentlichte er 1591, als er längst Rat am Hofe des französischen Königs war, ein Buch unter dem Titel *In artem analyticem Isagoge*, zu deutsch *Einführung in die analytische Kunst*. In diesem Buch zeigt VIÈTE, wie man mit Buchstaben an Stelle von Zahlen und unter Benützung von Rechenzeichen rechnen muß, um allgemeine Erkenntnisse in der Mathematik zu finden. Die moderne Algebra war geboren! Zu Recht nannte VIÈTE seine Rechenkunst *Algebra nova*, die neue Algebra.
François VIÈTE verwendete nur große Buchstaben, was sicherlich nicht sehr bequem ist. Thomas HARRIOT (1560–1621) lernte in der um 1594 verfaßten und erst 1839 gedruckten *Ars logistica* John NAPIERS* (1550–1617) die Verwendung von kleinen Buchstaben kennen. Im Druck erschienen sie dann in seiner erst 1631 postum** herausgegebenen *Artis analyticae praxis ad aequationes algebraicas resolvendas*; dort führte man auch ein, Formelbuchstaben vom gewöhnlichen Text durch Kursivschrift zu unterscheiden, wie auch wir es machen.

Aufgaben

1. Wie lautet die Berechnungsregel für den Flächeninhalt A eines Rechtecks? Schreibe sie mit Variablen an.***

2. Wie heißt die Formel (= Berechnungsregel) für den Rauminhalt V eines Würfels mit der Kantenlänge a?

3. a) Wie kann man allgemein aus der Kantenlänge a eines Würfels seine Oberfläche S berechnen? Fertige eine Skizze an.****
b) Was ergibt sich, wenn man für a die Werte 1 cm bzw. 2 cm bzw. 4 cm bzw. 8 cm in diese Oberflächenformel einsetzt? Wie ändert sich demnach S beim Verdoppeln der Kantenlänge?

4. a) Nach welcher Formel wird die Oberfläche S eines Quaders mit den Kantenlängen a, b, c berechnet? Zeichne einen Quader.
b) Berechnen S für die Quader mit den Kanten
1) 2 cm, 3 cm und 5 cm; **2)** 4 dm, 6 dm und 10 dm;
3) 2,5 dm, 1,25 cm und 4 m.

* gesprochen ˈnɛɪpɪə

** Betont auf dem u, seit dem 18. Jh. im Deutschen verwendet. Das lateinische *postumus* bedeutet zunächst *der letzte*, dann *das nach dem Tode des Vaters geborene Kind*. Im übertragenen Sinne wird postum z. B. bei Büchern verwendet, wenn sie erst nach dem Tode des Autors erschienen sind. – Für postum findet man auch die fälschliche Schreibung posthum, die aus *post = nachher* und *humare = beerdigen* entstanden sein dürfte.

*** Der Flächeninhalt einer Figur wird häufig mit A bezeichnet; *area* (lat. und engl.) = *Fläche*

**** Die Oberfläche eines Körpers wird häufig mit S bezeichnet; *superficies* (lat.) = *surface* (engl., franz.) = *Oberfläche*

•**5.** Wie verhalten sich
a) die Oberflächen, **b)** die Rauminhalte
zweier Quader Q und Q', wenn entsprechende Kantenlängen sich wie 1 zu 2 verhalten, also $a' = 2 \cdot a$, $b' = 2 \cdot b$, $c' = 2 \cdot c$ gilt?

6. a) Wie lang muß ein Holzstab mindestens sein, damit man von ihm die für das Kantenmodell eines Würfels notwendigen Stücke abschneiden kann, wenn a die Kantenlänge ist?
•**b)** Berechne die Gesamtlänge der Kanten für jeden der in Aufgabe **4.b)** angegebenen Quader. Stelle dafür zunächst eine Formel auf.

7. Welches Rechengesetz wird durch
»Für alle $\square \in \mathbb{B}$ und alle $\triangle \in \mathbb{B}$ gilt: $\square \cdot \triangle = \triangle \cdot \square$« ausgedrückt?

8. Schreibe mit geometrischen Figuren als Variablen
a) das Assoziativgesetz der Addition,
b) das Distributivgesetz.

9. a) Hans behauptet, daß es gleichgültig ist, ob man $a \cdot 2$ oder a^2 schreibt. Dazu rechnet er Uli vor, daß sowohl für $a = 0$ als auch für $a = 2$ jeweils $a \cdot 2$ und a^2 denselben Wert haben. Stimmt seine Rechnung?
b) Uli beweist Hans, daß die Gleichung $a \cdot 2 = a^2$ trotzdem nicht allgemein gültig ist. Wie macht er das wohl?

10. a) Übertrage die folgende Tabelle in dein Heft und ergänze sie, indem du für die angegebenen Werte von a und b sowohl $(a+b) \cdot (a-b)$ als auch $a^2 - b^2$ berechnest.

a	b	$(a+b) \cdot (a-b)$	$a^2 - b^2$
5	2		
14,5	5,7		
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{6}$		
1000	900		

b) Ist es nach den Ergebnissen von **a)** möglich, daß für alle $a \in \mathbb{B}$ und $b \in \mathbb{B}$ die Gleichung $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$ gilt? Folgt aus **a)** bereits, daß diese Gleichung allgemein gelten muß?

11. Drücke folgende Sätze durch eine Gleichung aus:
a) Die Zahl x ist 9mal ($\frac{3}{4}$mal; 4,5mal) so groß wie die Zahl a.
b) Die Zahl y ist um 15 größer als die Zahl u.
c) Die Zahl z ist um 12,3 kleiner als die Zahl v.
d) Die Zahl s ist ebenso groß wie die Summe der Zahlen u und v.
e) Die Zahl d ist gleich der Differenz der Zahlen u und v.
f) Man erhält die Zahl x, indem man vom Produkt der Zahlen p und q die kleinste zweistellige Zahl abzieht.
g) Das Fünffache der Summe aus a und b ergibt die Zahl c.
h) Die Hälfte der Zahl u ist um 3 größer als $\frac{4}{5}$ der Zahl v.

12. Drücke folgende Gleichungen durch einen Satz aus:
a) $x + 12 = 2 \cdot y$ **b)** $5 \cdot a = b : 3$
c) $z = u \cdot v - 1$ **d)** $(p + q) \cdot (p - q) = 1$

13. Ein Kilogramm einer Ware kostet 5 DM. Welchen Preis y DM muß man für x kg dieser Ware zahlen?

14. Ein Dutzend Eier kostet 3 DM. Welchen Betrag z DM muß man dann für n Eier entrichten?

15. Ein Auto, das mit gleichbleibender Geschwindigkeit fährt, legt in der Stunde a km zurück. Der in b Std. zurückgelegte Weg sei c km. Drücke c durch a und b aus.

16. In der Prozentrechnung hast du folgende Zinsformel kennengelernt:
$$Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{36000}$$
a) Welche Bedeutung haben hier die einzelnen Variablen?
b) Berechne den Zins, den ein Kapital von 24500 DM bei einem Zinssatz von 6% in 8 Monaten einbringt.

17. **a)** Welche Werte nimmt $z = 2 \cdot n - 1$ an, wenn man für n nacheinander die natürlichen Zahlen einsetzt?
b) Welche Grundmenge muß man für die Variable n wählen, damit man aus $z = 2 \cdot n - 7$ alle ungeraden Zahlen erhält?

18. Schreibe die durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen in allgemeiner Form an.

19. Wie kann man mit Hilfe einer Variablen alle
a) durch 4, **b)** durch 7, **c)** durch 12
teilbaren natürlichen Zahlen darstellen? Welche Grundmenge muß man für die Variable wählen?

20. Setze in $x = 5 \cdot n$ der Reihe nach die geraden Zahlen 2, 4, 6, ... ein. Welche gemeinsamen Teiler haben alle so erhaltenen Zahlen?

•21. Warum sind, wenn $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt, alle Zahlen der Form
a) $10 \cdot m + 2 \cdot n$, **b)** $n \cdot (n + 1)$
durch 2 teilbar?

22. Wie kann man diejenigen Zahlen allgemein beschreiben, die
a) bei Division durch 4 den Rest 1 lassen;
b) bei Division durch 7 den Rest 5 lassen;
•**c)** bei Division durch 2 den Rest 1 und zugleich bei Division durch 5 den Rest 2 lassen?

23. n sei eine Ziffer. Welchen Wert hat die zweistellige Zahl, deren erste Ziffer, von links her, n ist, während die zweite 3 (0; 8) heißt?

24. Gib den Wert derjenigen dreistelligen Zahl y an, deren erste Stelle n ist, während an zweiter Stelle 5 und an dritter Stelle m steht.
Welche Zahlen kommen für n bzw. für m in Frage?

25. Wenn man in $n \cdot (n-1)+5$ für n die natürlichen Zahlen 1 bis 4 einsetzt, erhält man stets eine Primzahl*. Prüfe diese Behauptung nach.
Kann man daraus folgern, daß sich für jede natürliche Zahl n eine Primzahl ergibt?

26. Weise nach, daß sich aus $n \cdot (n+1)+11$ für $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ stets eine Primzahl ergibt. Erhält man vielleicht für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine Primzahl?

27. Fasse die folgenden Angaben in Worte und entscheide jeweils, ob etwas Wahres oder etwas Falsches gesagt ist:

a) $\frac{2}{3} \in \mathbb{B}$ **b)** $0{,}5 \notin \mathbb{B}$ **c)** $1 \in \mathbb{B}$
d) $\mathbb{N} \subset \mathbb{B}$ **e)** $\mathbb{N}_0 \cap \mathbb{B} = \mathbb{N}_0$ **f)** $\mathbb{N} \cup \mathbb{B} = \mathbb{N}$

• **28.** LEON VON BYZANZ (9. Jh. n. Chr.) hat folgendes Gesetz gefunden:
Gegeben seien die Zahlen a, b, c. Das Produkt aus a, b sei d, das Produkt aus b, c sei e, das Produkt aus a, c sei f, das Produkt aus a, e sei g, das aus b, f sei h, das aus c, d sei i. Ich behaupte, daß die Zahlen g, h, i gleich sind.**
Schreibe die Behauptung LEONS nur mit den Buchstaben a, b und c unter Verwendung von Klammern und Malpunkten, die LEON ja noch nicht kannte.

• **29.** LEONARDO VON PISA (um 1170–nach 1240) schreibt:
Die Zahl a sei in zwei Teile [= Summanden] b, g geteilt. Man teile a durch b, das Ergebnis sei e; und man teile a durch g, das Ergebnis sei d. Ich behaupte, daß das Produkt von d und e gleich der Summe von d und e ist.

a) Schreibe die Behauptung LEONARDOS mit modernen Rechenzeichen nur unter Verwendung der Buchstaben b und g.

b) Zerlege die Zahl $a = 5$ in zwei natürliche Summanden und überprüfe für alle möglichen Zerlegungen die in **a)** gefundene Formel. Berechne dazu jeweils die linke Seite und die rechte Seite getrennt.

c) Stimmt die Formel noch, wenn man 5 als $1\frac{2}{3} + 3\frac{1}{3}$ schreibt?

* SPEUSIPPOS (um 350 v. Chr.), der Nachfolger PLATONS (428–348 v. Chr.) in der Leitung der Akademie bezeichnet eine Zahl, die nur durch 1 und sich selbst teilbar ist, als *ἀριθμὸς πρῶτος καὶ ἀσύνθετος* (arithmós prôtos kai asýnthetos) = *erste oder auch unzusammengesetzte Zahl*, eine Zahl, die mehr als 2 Teiler hat, als *ἀριθμὸς δεύτερος καὶ σύνθετος* (arithmós deúteros kai sýnthetos) = *zweite oder auch zusammengesetzte Zahl*. (Wir würden statt *erste Zahl* heute *Zahl erster Art* sagen.) EUKLID (um 300 v. Chr.) verkürzte im Buch VII seiner *Elemente* zu *πρῶτος ἀριθμός* bzw. *σύνθετος ἀριθμός*, was ins Lateinische wörtlich als *numerus primus* bzw. *numerus compositus* übersetzt wurde – so belegt bei BOETHIUS (um 480–524/525). Johann SCHEYBL (1494–1570) versuchte in seiner Euklid-Übersetzung die Eindeutschung *erste Zahl* und *ungeteilte Zahl*, was sich aber nicht einbürgerte. Es entstand schließlichh das Lehnwort **Primzahl** und die Übersetzung *zusammengesetzte Zahl*.

** Natürlich hat LEON griechische Buchstaben verwendet.