Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

Zur Geschichte der Variablen

Kommt in einem Rechenausdruck oder einer Gleichung bzw. Ungleichung dieselbe Variable mehrmals vor, so muß man beim Einsetzen diese Variable an jeder Stelle durch *die gleiche Zahl* ersetzen. So hat man etwa bei der im Beispiel 3 angegebenen Gleichung für die Variable a auf beiden Seiten dieselbe Zahl einzusetzen; das Entsprechende gilt auch für b. Selbstverständlich kann man aber für verschiedene Variablen auch die gleiche Zahl einsetzen.

> **Regel 15.1:** Innerhalb desselben Rechenausdrucks bzw. derselben Gleichung oder Ungleichung muß man beim Einsetzen gleiche Variablen durch gleiche Zahlen ersetzen.

Man könnte als Variablen an Stelle von Buchstaben noch sinnfälliger verschiedene geometrische Figuren verwenden. Eine bestimmte geometrische Figur würde dann die Stellen bezeichnen, welche mit derselben Zahl besetzt werden müssen; man spricht deshalb auch von **Leerstellen**. Zum Beispiel ließe sich die Gleichung $a + b = b + a$ auch durch Abbildung 15.1 zum Ausdruck bringen:

Abb. 15.1 Kommutativgesetz der Addition

Man kann in die Kreise irgendeine Zahl einsetzen und ebenso in die Quadrate; es ergibt sich stets eine richtige Gleichung. Ein Beispiel dazu zeigt Abbildung 15.2:

Abb. 15.2 Beispiel zum Kommutativgesetz der Addition

Das Zeichnen solcher geometrischer Figuren erfordert einige Sorgfalt. Daher benützt man als Variablen im allgemeinen doch lieber Buchstaben. Welche Buchstaben man jeweils wählt, ist an sich völlig gleichgültig. Es ist jedoch üblich, für »unbekannte Zahlen«, d. h. solche, die erst aus Gleichungen oder Ungleichungen bestimmt werden sollen, die Endbuchstaben x, y, z des Alphabets zu verwenden.

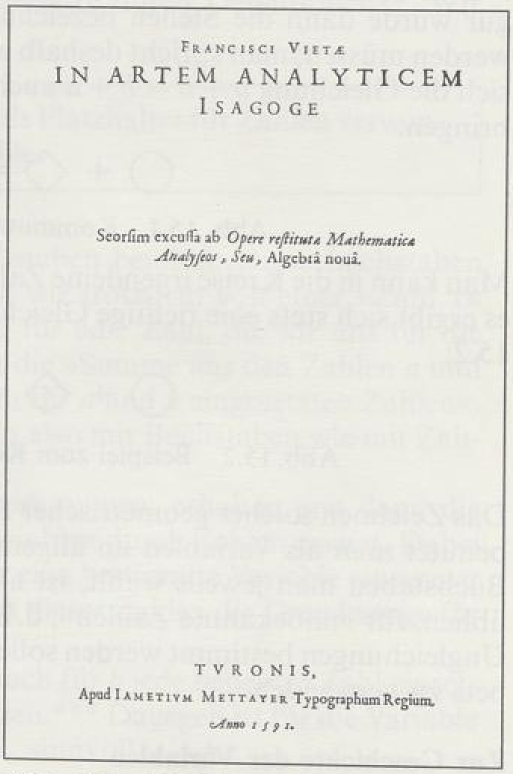
** Zur Geschichte der Variablen

Wir haben gesehen, daß es nützlich und bequem ist, an Stelle von Zahlen Buchstaben zu verwenden, wenn man allgemeingültige Zusammenhänge, also Gesetze ausdrücken will oder wenn man einen Rechenvorgang allgemein beschreiben will. Es ist aber gar nicht so lange her, daß die Mathematiker das so machen. Früher hat man ein Beispiel mit bekannten Zahlen vorgerechnet und dann gesagt, daß man es genauso machen könne, wenn andere Zahlen gegeben sind. Ein solches Vorgehen kann natürlich gefährlich sein. Denn woher soll man wissen, ob die einmal vorgeführte Rechnung immer so geht?

So findet z. B. jemand, daß man $\frac{16}{64}$ kürzen kann, indem man im Zähler und im Nenner die gleiche Ziffer 6 wegläßt: $\frac{16}{64} = \frac{1}{4}$. Auch bei $\frac{10}{20}$ stimmt die Regel: Weglassen der 0 ergibt $\frac{1}{2}$. Aber leider stimmt diese schöne Regel schon nicht bei $\frac{15}{54}$.

Noch ein Beispiel: Jemand findet, daß $2^4 = 4^2$ ist. Das Austauschen der Zahlen funktioniert aber schon nicht mehr bei 2^3; denn 2^3 ist 8 und damit von $3^2 = 9$ verschieden. Einer der ersten, der einen allgemeinen Zusammenhang durch Buchstaben ausdrückte, war EUKLID (um 300 v. Chr.), der in seinem berühmten Geometriebuch *Elemente* Punkte und Strecken mit Buchstaben bezeichnete.
Im 9. Jahrhundert n. Chr. schrieb in Byzanz der Philosoph und Mathematiker LEON einen Kommentar zu diesem Geometriebuch, und da wimmelt es schon von Buchstaben; siehe Aufgabe 20/**28**, in der er ein allgemeines Rechengesetz der Algebra ausdrücken will.
Durchgesetzt hat sich diese Idee aber nicht. Einige hundert Jahre später lernt der aus Pisa stammende Kaufmann LEONARDO, genannt auch FIBONACCI* (um 1170–nach 1240) auf seinen Reisen die arabische Mathematik kennen, die ihn so fasziniert, daß er selbst Bücher über Mathematik schreibt. Und dabei verwendet er gelegentlich Buchstaben, um Rechengesetze zu beschreiben (Aufgabe 20/**29**).

Abb. 16.1 François VIÈTE, latinisiert zu Franciscus VIETA (1540 Fontenay-le-Comte/Vendée – 13.[?]2.[?] 1603 Paris)



FRANCISCI VIETÆ
IN ARTEM ANALYTICEM
ISAGOGE

Seorſim excuſſa ab *Opere reſtitutæ Mathematicæ Analyſeos*, *Seu*, Algebrâ nouâ.

TVRONIS,
Apud IAMETIVM METTAYER Typographum Regium.
Anno 1591.

Abb. 16.2 Titelblatt von FRANCISCUS VIETAS EINFÜHRUNG IN DIE ANALYTISCHE KUNST, eigens herausgenommen aus dem *Gesamtwerk der wiederhergestellten Mathematischen Analysis, nämlich*, der neuen Algebra. TOURS, bei IAMETIUS METTAYER Königlichem Drucker, *im Jahre 1591*.

* LEONARDO nennt sich in seinen Schriften *filius Bonacci* (Sohn des Bonatius), woraus *Fibonacci* wurde. Manchmal nennt er sich auch Leonardo bigollo, Leonard der Tölpel. – LEONARDO verkehrte auch am Hofe Kaiser Friedrichs II.

Von da an tauchen immer häufiger Buchstaben als Zeichen für Zahlen auf. Eine mathematische Sprache, d. h. eine Rechenkunst mit Buchstaben, schuf aber erst François VIÈTE (1540–1603), dessen Name in latinisierter Form mit VIETA wiedergegeben wird. Er verwendete erstmals systematisch sowohl Buchstaben an Stelle von Zahlen als auch Zeichen für die verschiedenen Rechenoperationen wie Addition, Multiplikation usw. Damit konnte er für die Summe aus A und B kurz A + B schreiben.
VIÈTE war Jurist und mußte ab 1564 als Sekretär des Hauses SOUBISE auch die damals 11jährige Tochter Catherine de PARTHENAY unterrichten. Diese interessierte sich so sehr für Astronomie und Mathematik, daß auch VIÈTE sich mit diesen Wissenschaften beschäftigen mußte. Und die Mathematik ließ ihn nicht mehr los! Als Ergebnis dieser Beschäftigung veröffentlichte er 1591, als er längst Rat am Hofe des französischen Königs war, ein Buch unter dem Titel *In artem analyticem Isagoge*, zu deutsch *Einführung in die analytische Kunst*. In diesem Buch zeigt VIÈTE, wie man mit Buchstaben an Stelle von Zahlen und unter Benützung von Rechenzeichen rechnen muß, um allgemeine Erkenntnisse in der Mathematik zu finden. Die moderne Algebra war geboren! Zu Recht nannte VIÈTE seine Rechenkunst *Algebra nova*, die neue Algebra.
François VIÈTE verwendete nur große Buchstaben, was sicherlich nicht sehr bequem ist. Thomas HARRIOT (1560–1621) lernte in der um 1594 verfaßten und erst 1839 gedruckten *Ars logistica* John NAPIERS* (1550–1617) die Verwendung von kleinen Buchstaben kennen. Im Druck erschienen sie dann in seiner erst 1631 postum** herausgegebenen *Artis analyticae praxis ad aequationes algebraicas resolvendas*; dort führte man auch ein, Formelbuchstaben vom gewöhnlichen Text durch Kursivschrift zu unterscheiden, wie auch wir es machen.

Aufgaben

1. Wie lautet die Berechnungsregel für den Flächeninhalt A eines Rechtecks? Schreibe sie mit Variablen an.***

2. Wie heißt die Formel (= Berechnungsregel) für den Rauminhalt V eines Würfels mit der Kantenlänge a?

3. a) Wie kann man allgemein aus der Kantenlänge a eines Würfels seine Oberfläche S berechnen? Fertige eine Skizze an.****
b) Was ergibt sich, wenn man für a die Werte 1 cm bzw. 2 cm bzw. 4 cm bzw. 8 cm in diese Oberflächenformel einsetzt? Wie ändert sich demnach S beim Verdoppeln der Kantenlänge?

4. a) Nach welcher Formel wird die Oberfläche S eines Quaders mit den Kantenlängen a, b, c berechnet? Zeichne einen Quader.
b) Berechnen S für die Quader mit den Kanten
1) 2 cm, 3 cm und 5 cm; **2)** 4 dm, 6 dm und 10 dm;
3) 2,5 dm, 1,25 cm und 4 m.

* gesprochen ˈnɛɪpɪə
** Betont auf dem u, seit dem 18. Jh. im Deutschen verwendet. Das lateinische *postumus* bedeutet zunächst *der letzte*, dann *das nach dem Tode des Vaters geborene Kind*. Im übertragenen Sinne wird postum z. B. bei Büchern verwendet, wenn sie erst nach dem Tode des Autors erschienen sind. – Für postum findet man auch die fälschliche Schreibung posthum, die aus *post = nachher* und *humare = beerdigen* entstanden sein dürfte.
*** Der Flächeninhalt einer Figur wird häufig mit A bezeichnet; *area* (lat. und engl.) = *Fläche*
**** Die Oberfläche eines Körpers wird häufig mit S bezeichnet; *superficies* (lat.) = *surface* (engl., franz.) = *Oberfläche*