Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

Aufgaben

Von da an tauchen immer häufiger Buchstaben als Zeichen für Zahlen auf. Eine mathematische Sprache, d.h. eine Rechenkunst mit Buchstaben, schuf aber erst François VIÈTE (1540–1603), dessen Name in latinisierter Form mit VIETA wiedergegeben wird. Er verwendete erstmals systematisch sowohl Buchstaben an Stelle von Zahlen als auch Zeichen für die verschiedenen Rechenoperationen wie Addition, Multiplikation usw. Damit konnte er für die Summe aus A und B kurz A + B schreiben.
VIÈTE war Jurist und mußte ab 1564 als Sekretär des Hauses SOUBISE auch die damals 11jährige Tochter Catherine de PARTHENAY unterrichten. Diese interessierte sich so sehr für Astronomie und Mathematik, daß auch VIÈTE sich mit diesen Wissenschaften beschäftigen mußte. Und die Mathematik ließ ihn nicht mehr los! Als Ergebnis dieser Beschäftigung veröffentlichte er 1591, als er längst Rat am Hofe des französischen Königs war, ein Buch unter dem Titel *In artem analyticem Isagoge*, zu deutsch *Einführung in die analytische Kunst*. In diesem Buch zeigt VIÈTE, wie man mit Buchstaben an Stelle von Zahlen und unter Benützung von Rechenzeichen rechnen muß, um allgemeine Erkenntnisse in der Mathematik zu finden. Die moderne Algebra war geboren! Zu Recht nannte VIÈTE seine Rechenkunst *Algebra nova*, die neue Algebra.
François VIÈTE verwendete nur große Buchstaben, was sicherlich nicht sehr bequem ist. Thomas HARRIOT (1560–1621) lernte in der um 1594 verfaßten und erst 1839 gedruckten *Ars logistica* John NAPIERS* (1550–1617) die Verwendung von kleinen Buchstaben kennen. Im Druck erschienen sie dann in seiner erst 1631 postum** herausgegebenen *Artis analyticae praxis ad aequationes algebraicas resolvendas*; dort führte man auch ein, Formelbuchstaben vom gewöhnlichen Text durch Kursivschrift zu unterscheiden, wie auch wir es machen.

Aufgaben

1. Wie lautet die Berechnungsregel für den Flächeninhalt A eines Rechtecks? Schreibe sie mit Variablen an.***

2. Wie heißt die Formel (= Berechnungsregel) für den Rauminhalt V eines Würfels mit der Kantenlänge a?

3. a) Wie kann man allgemein aus der Kantenlänge a eines Würfels seine Oberfläche S berechnen? Fertige eine Skizze an.****

b) Was ergibt sich, wenn man für a die Werte 1 cm bzw. 2 cm bzw. 4 cm bzw. 8 cm in diese Oberflächenformel einsetzt? Wie ändert sich demnach S beim Verdoppeln der Kantenlänge?

4. a) Nach welcher Formel wird die Oberfläche S eines Quaders mit den Kantenlängen a, b, c berechnet? Zeichne einen Quader.

b) Berechnen S für die Quader mit den Kanten
1) 2 cm, 3 cm und 5 cm; **2)** 4 dm, 6 dm und 10 dm;
3) 2,5 dm, 1,25 cm und 4 m.

* gesprochen ˈnɛɪpɪə

** Betont auf dem u, seit dem 18. Jh. im Deutschen verwendet. Das lateinische *postumus* bedeutet zunächst *der letzte*, dann *das nach dem Tode des Vaters geborene Kind*. Im übertragenen Sinne wird postum z. B. bei Büchern verwendet, wenn sie erst nach dem Tode des Autors erschienen sind. – Für postum findet man auch die fälschliche Schreibung posthum, die aus *post = nachher* und *humare = beerdigen* entstanden sein dürfte.

*** Der Flächeninhalt einer Figur wird häufig mit A bezeichnet; *area* (lat. und engl.) = *Fläche*

**** Die Oberfläche eines Körpers wird häufig mit S bezeichnet; *superficies* (lat.) = *surface* (engl., franz.) = *Oberfläche*

• **5.** Wie verhalten sich
a) die Oberflächen, **b)** die Rauminhalte
zweier Quader Q und Q', wenn entsprechende Kantenlängen sich wie 1 zu 2 verhalten, also $a' = 2 \cdot a$, $b' = 2 \cdot b$, $c' = 2 \cdot c$ gilt?

6. a) Wie lang muß ein Holzstab mindestens sein, damit man von ihm die für das Kantenmodell eines Würfels notwendigen Stücke abschneiden kann, wenn a die Kantenlänge ist?
• **b)** Berechne die Gesamtlänge der Kanten für jeden der in Aufgabe **4.b)** angegebenen Quader. Stelle dafür zunächst eine Formel auf.

7. Welches Rechengesetz wird durch
»Für alle $\square \in \mathbb{B}$ und alle $\triangle \in \mathbb{B}$ gilt: $\square \cdot \triangle = \triangle \cdot \square$« ausgedrückt?

8. Schreibe mit geometrischen Figuren als Variablen
a) das Assoziativgesetz der Addition,
b) das Distributivgesetz.

9. a) Hans behauptet, daß es gleichgültig ist, ob man $a \cdot 2$ oder a^2 schreibt. Dazu rechnet er Uli vor, daß sowohl für $a = 0$ als auch für $a = 2$ jeweils $a \cdot 2$ und a^2 denselben Wert haben. Stimmt seine Rechnung?
b) Uli beweist Hans, daß die Gleichung $a \cdot 2 = a^2$ trotzdem nicht allgemein gültig ist. Wie macht er das wohl?

10. a) Übertrage die folgende Tabelle in dein Heft und ergänze sie, indem du für die angegebenen Werte von a und b sowohl $(a+b) \cdot (a-b)$ als auch $a^2 - b^2$ berechnest.

a	b	$(a+b) \cdot (a-b)$	$a^2 - b^2$
5	2		
14,5	5,7		
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{6}$		
1000	900		

b) Ist es nach den Ergebnissen von **a)** möglich, daß für alle $a \in \mathbb{B}$ und $b \in \mathbb{B}$ die Gleichung $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$ gilt? Folgt aus **a)** bereits, daß diese Gleichung allgemein gelten muß?

11. Drücke folgende Sätze durch eine Gleichung aus:
a) Die Zahl x ist 9mal ($\frac{3}{4}$mal; 4,5mal) so groß wie die Zahl a.
b) Die Zahl y ist um 15 größer als die Zahl u.
c) Die Zahl z ist um 12,3 kleiner als die Zahl v.
d) Die Zahl s ist ebenso groß wie die Summe der Zahlen u und v.
e) Die Zahl d ist gleich der Differenz der Zahlen u und v.
f) Man erhält die Zahl x, indem man vom Produkt der Zahlen p und q die kleinste zweistellige Zahl abzieht.
g) Das Fünffache der Summe aus a und b ergibt die Zahl c.
h) Die Hälfte der Zahl u ist um 3 größer als $\frac{4}{5}$ der Zahl v.

12. Drücke folgende Gleichungen durch einen Satz aus:
a) $x + 12 = 2 \cdot y$ **b)** $5 \cdot a = b : 3$
c) $z = u \cdot v - 1$ **d)** $(p + q) \cdot (p - q) = 1$

13. Ein Kilogramm einer Ware kostet 5 DM. Welchen Preis y DM muß man für x kg dieser Ware zahlen?

14. Ein Dutzend Eier kostet 3 DM. Welchen Betrag z DM muß man dann für n Eier entrichten?

15. Ein Auto, das mit gleichbleibender Geschwindigkeit fährt, legt in der Stunde a km zurück. Der in b Std. zurückgelegte Weg sei c km. Drücke c durch a und b aus.

16. In der Prozentrechnung hast du folgende Zinsformel kennengelernt:

$$Z = \frac{K \cdot p \cdot t}{36000}$$

a) Welche Bedeutung haben hier die einzelnen Variablen?
b) Berechne den Zins, den ein Kapital von 24500 DM bei einem Zinssatz von 6% in 8 Monaten einbringt.

17. a) Welche Werte nimmt $z = 2 \cdot n - 1$ an, wenn man für n nacheinander die natürlichen Zahlen einsetzt?
b) Welche Grundmenge muß man für die Variable n wählen, damit man aus $z = 2 \cdot n - 7$ alle ungeraden Zahlen erhält?

18. Schreibe die durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen in allgemeiner Form an.

19. Wie kann man mit Hilfe einer Variablen alle
a) durch 4, **b)** durch 7, **c)** durch 12
teilbaren natürlichen Zahlen darstellen? Welche Grundmenge muß man für die Variable wählen?

20. Setze in $x = 5 \cdot n$ der Reihe nach die geraden Zahlen 2, 4, 6, ... ein. Welche gemeinsamen Teiler haben alle so erhaltenen Zahlen?

• **21.** Warum sind, wenn $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt, alle Zahlen der Form
a) $10 \cdot m + 2 \cdot n$, **b)** $n \cdot (n + 1)$
durch 2 teilbar?

22. Wie kann man diejenigen Zahlen allgemein beschreiben, die
a) bei Division durch 4 den Rest 1 lassen;
b) bei Division durch 7 den Rest 5 lassen;
• **c)** bei Division durch 2 den Rest 1 und zugleich bei Division durch 5 den Rest 2 lassen?

23. n sei eine Ziffer. Welchen Wert hat die zweistellige Zahl, deren erste Ziffer, von links her, n ist, während die zweite 3 (0; 8) heißt?

24. Gib den Wert derjenigen dreistelligen Zahl y an, deren erste Stelle n ist, während an zweiter Stelle 5 und an dritter Stelle m steht. Welche Zahlen kommen für n bzw. für m in Frage?

25. Wenn man in $n \cdot (n-1) + 5$ für n die natürlichen Zahlen 1 bis 4 einsetzt, erhält man stets eine Primzahl*. Prüfe diese Behauptung nach. Kann man daraus folgern, daß sich für jede natürliche Zahl n eine Primzahl ergibt?

26. Weise nach, daß sich aus $n \cdot (n+1) + 11$ für $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ stets eine Primzahl ergibt. Erhält man vielleicht für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine Primzahl?

27. Fasse die folgenden Angaben in Worte und entscheide jeweils, ob etwas Wahres oder etwas Falsches gesagt ist:

a) $\frac{2}{3} \in \mathbb{B}$ **b)** $0{,}5 \notin \mathbb{B}$ **c)** $1 \in \mathbb{B}$

d) $\mathbb{N} \subset \mathbb{B}$ **e)** $\mathbb{N}_0 \cap \mathbb{B} = \mathbb{N}_0$ **f)** $\mathbb{N} \cup \mathbb{B} = \mathbb{N}$

• **28.** LEON VON BYZANZ (9. Jh. n. Chr.) hat folgendes Gesetz gefunden: Gegeben seien die Zahlen a, b, c. Das Produkt aus a, b sei d, das Produkt aus b, c sei e, das Produkt aus a, c sei f, das Produkt aus a, e sei g, das aus b, f sei h, das aus c, d sei i. Ich behaupte, daß die Zahlen g, h, i gleich sind.** Schreibe die Behauptung LEONS nur mit den Buchstaben a, b und c unter Verwendung von Klammern und Malpunkten, die LEON ja noch nicht kannte.

• **29.** LEONARDO VON PISA (um 1170–nach 1240) schreibt: Die Zahl a sei in zwei Teile [= Summanden] b, g geteilt. Man teile a durch b, das Ergebnis sei e; und man teile a durch g, das Ergebnis sei d. Ich behaupte, daß das Produkt von d und e gleich der Summe von d und e ist.

a) Schreibe die Behauptung LEONARDOS mit modernen Rechenzeichen nur unter Verwendung der Buchstaben b und g.

b) Zerlege die Zahl $a = 5$ in zwei natürliche Summanden und überprüfe für alle möglichen Zerlegungen die in **a)** gefundene Formel. Berechne dazu jeweils die linke Seite und die rechte Seite getrennt.

c) Stimmt die Formel noch, wenn man 5 als $1\frac{2}{3} + 3\frac{1}{3}$ schreibt?

* SPEUSIPPOS (um 350 v. Chr.), der Nachfolger PLATONS (428–348 v. Chr.) in der Leitung der Akademie bezeichnet eine Zahl, die nur durch 1 und sich selbst teilbar ist, als *ἀριθμὸς πρῶτος καὶ ἀσύνθετος* (arithmós prôtos kai asýnthetos) = *erste oder auch unzusammengesetzte Zahl*, eine Zahl, die mehr als 2 Teiler hat, als *ἀριθμὸς δεύτερος καὶ σύνθετος* (arithmós deúteros kai sýnthetos) = *zweite oder auch zusammengesetzte Zahl*. (Wir würden statt *erste Zahl* heute *Zahl erster Art* sagen.) EUKLID (um 300 v. Chr.) verkürzte im Buch VII seiner *Elemente* zu *πρῶτος ἀριθμός* bzw. *σύνθετος ἀριθμός*, was ins Lateinische wörtlich als *numerus primus* bzw. *numerus compositus* übersetzt wurde – so belegt bei BOETHIUS (um 480–524/525). Johann SCHEYBL (1494–1570) versuchte in seiner Euklid-Übersetzung die Eindeutschung *erste Zahl* und *ungeteilte Zahl*, was sich aber nicht einbürgerte. Es entstand schließlichh das Lehnwort **Primzahl** und die Übersetzung *zusammengesetzte Zahl*.

** Natürlich hat LEON griechische Buchstaben verwendet.