Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 2000

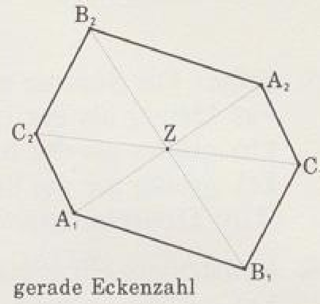
1.2 Punktsymmetrische Vierecke: Parallelogramme

urn:nbn:de:hbz:466:1-83477

1.2 Punktsymmetrische Vierecke: Parallelogramme

Unter den Vierecken spielen die symmetrischen eine herausragende Rolle. Zuerst betrachten wir solche mit einem Symmetriezentrum. Zur Erinnerung: In einer punktsymmetrischen Figur mit Zentrum Z gibt es zu jedem Punkt P einen Gegenpunkt P′ so, dass Z die Strecke [PP′] halbiert.

punktsymmetrisches Vieleck



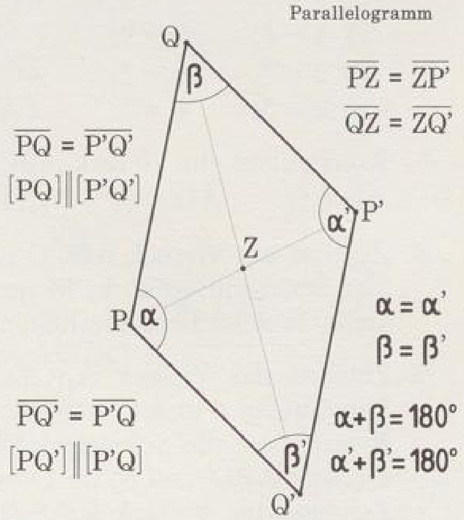
gerade Eckenzahl

Als punktsymmetrische (konvexe) Vielecke kommen in Frage: Viereck, Sechseck, Achteck usw. Die Eckenzahl muss immer gerade sein, weil es zu jeder Ecke E_1 eine dazu punktsymmetrische Ecke E_2 geben muss (wobei $E_1 \neq E_2$). Das einfachste punktsymmetrische Vieleck konstruieren wir, indem wir zwei Punkte P und Q an einem Zentrum Z spiegeln. Die Eigenschaften dieses Vierecks PQ′P′Q ergeben sich aus denen der Punktsymmetrie:

- Z ist Mittelpunkt der beiden Diagonalen.
- Gegenüberliegende Winkel (Gegenwinkel) sind gleich groß.
- Gegenüberliegende Seiten (Gegenseiten) sind gleich lang und parallel.

Die letzte Eigenschaft gibt der Figur den Namen:

Parallelogramm



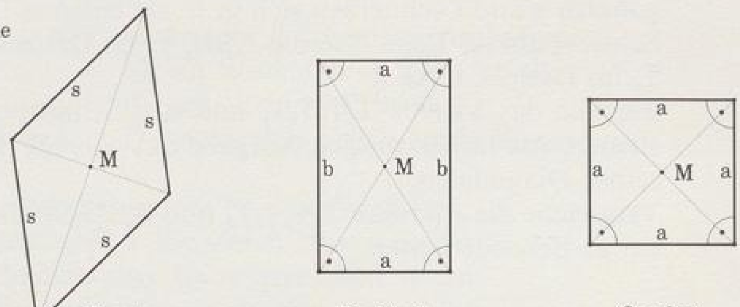
Definition:

Ein Viereck, bei dem je zwei Gegenseiten parallel sind, heißt **Parallelogramm.**

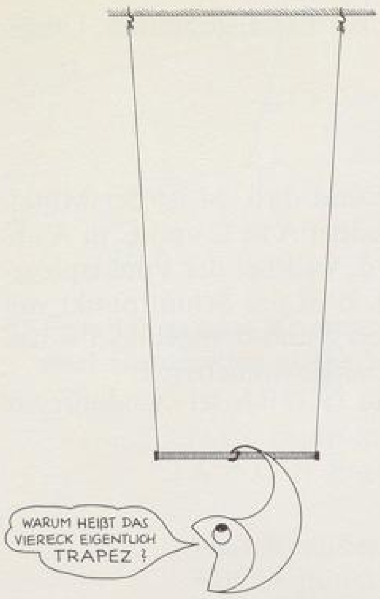
Aus der Parallelität der Gegenseiten folgt noch eine Eigenschaft (siehe E-Winkel!):
Im Parallelogramm ergeben zwei nebeneinander liegende Winkel zusammen 180°, sie sind also Supplementwinkel.

Sonderfälle: Parallelogramm mit gleich langen Seiten: **Raute (Rhombus)**
Parallelogramm mit gleich großen Winkeln: **Rechteck**
Parallelogramm mit gleich langen Seiten und gleich großen Winkeln: **Quadrat.**

besondere Parallelogramme



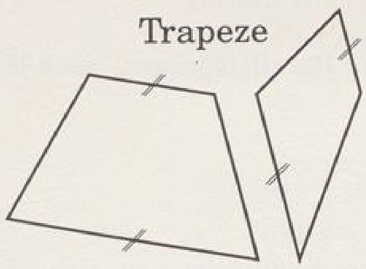
Raute Rechteck Quadrat

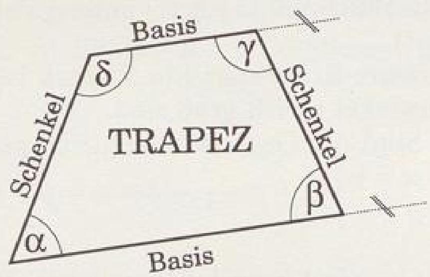


In der Mathematik muss man Definitionen sehr genau lesen. Lässt man zum Beispiel in der Parallelogramm-Definition das Wörtchen »je« weg, so beschreibt man eine etwas allgemeinere Art von Vierecken.

Definition

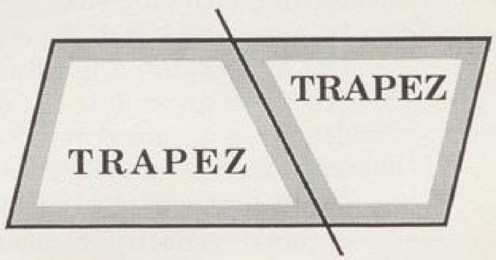
Ein Viereck, bei dem zwei Seiten parallel sind, heißt **Trapez.** Jede der Parallelseiten heißt **Basis** oder **Grundseite,** die andern beiden Seiten heißen **Schenkel.**





$$\alpha + \delta = 180° = \beta + \gamma$$

Selbstverständlich ist jedes Parallelogramm auch ein Trapez und ebenso sind die Sonderfälle Raute, Rechteck und Quadrat auch Trapeze.
Eine Gerade durch die Gegenseiten eines Parallelogramms zerlegt dieses in zwei Trapeze.

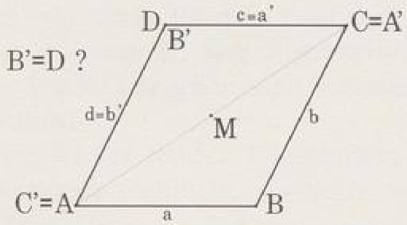


Trapeze füllen ein Parallelogramm

Wegen der Definition ist jedes punktsymmetrische Viereck ein Parallelogramm. Umgekehrt gilt der

Satz:
Jedes Parallelogramm ist ein punktsymmetrisches Viereck.

Begründung: Ist ABCD ein Parallelogramm, dann ist $a \parallel c$ und $d \parallel b$. M ist der Mittelpunkt von [AC]. Die Punktspiegelung an M bildet A in C und C in A ab. Das Bild von a ist c, und das Bild von b ist d, weil bei der Punktspiegelung Bildgerade und ihr Urbild parallel sind. B ist der Schnittpunkt von a und b, B wird also auf den Schnittpunkt von c und d abgebildet – das aber ist D; deshalb ist das Parallelogramm punktsymmetrisch.



Auch jede der anderen Eigenschaften kennzeichnet allein schon ein Parallelogramm:

1. **Parallelogramm-Kriterium: Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn sich die Diagonalen halbieren.**

Begründung: Wenn sich die Diagonalen halbieren, dann ist das Viereck punktsymmetrisch, es ist also ein Parallelogramm. Ist umgekehrt das Viereck ein Parallelogramm, dann ist es punktsymmetrisch, also halbieren sich die Diagonalen.

2. **Parallelogramm-Kriterium: Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn je zwei Gegenwinkel gleich groß sind.**

Begründung: Sind die Gegenwinkel gleich groß, dann gilt:

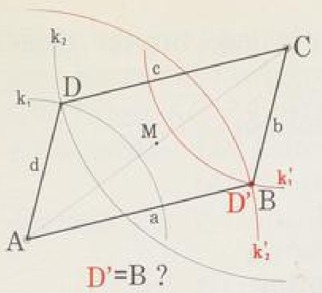
$$\left.\begin{array}{l}\alpha = \gamma \\ \beta = \delta\end{array}\right\} \alpha + \beta + \gamma + \delta = \alpha + \beta + \alpha + \beta = 2(\alpha + \beta) = 360°$$

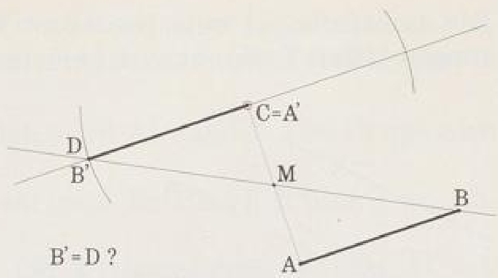
$$\text{also} \quad \alpha + \beta = 180°$$

also sind b und d parallel (E-Winkel!). Entsprechend folgt $a \parallel c$, also ist das Viereck ein Parallelogramm. Ist umgekehrt das Viereck ein Parallelogramm, dann ist es punktsymmetrisch; deshalb sind je zwei Gegenwinkel gleich groß.

3. **Parallelogramm-Kriterium: Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn je zwei Gegenseiten gleich lang sind.**

Begründung: Ist $a = c$ und $b = d$, dann spiegeln wir an M, dem Mittelpunkt von [AC]. Der Kreis k_1 um A mit Radius d und der Kreis k_2 um C mit Radius c werden dabei abgebildet auf den Kreis $k_{1'}$ um C mit Radius b (= d) und auf den Kreis $k_{2'}$ um A mit Radius a (= c). Der Schnittpunkt B ist das Bild von D. Also ist ABCD ein punktsymmetrisches Viereck und damit ein Parallelogramm. Ist umgekehrt das Viereck ein Parallelogramm, dann ist es punktsymmetrisch; also sind je zwei Gegenseiten gleich lang.





4. Parallelogramm-Kriterium: Ein Viereck ist genau dann ein Parallelogramm, wenn zwei Gegenseiten gleich lang und parallel sind.

Begründung: Ist $AB \parallel CD$ und $\overline{AB} = \overline{CD}$, so spiegle man [AB] am Mittelpunkt M von [AC]. Dann gilt:
$A' = C$, B' liegt 1. auf der Parallele zu AB durch C,
2. auf dem Kreis um C mit $r = \overline{AB}$.
Weil B' außerdem auf der Gerade MB liegt, ist $B' = D$, ist das Viereck ABCD punktsymmetrisch, ist also ein Parallelogramm. Ist umgekehrt ABCD ein Parallelogramm, so gilt wegen der Definition und des 3. Parallelogramm-Kriteriums, dass zwei Gegenseiten parallel und gleich lang sind.

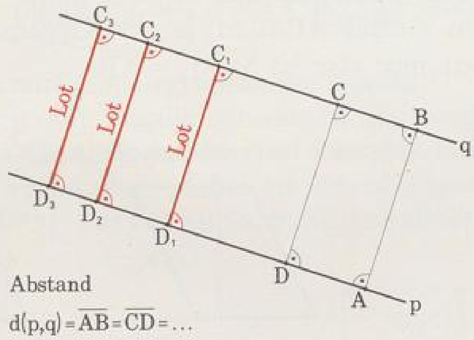
Mit den Parallelogramm-Eigenschaften ist es uns möglich, den Abstand von Parallelen zu definieren. Zuerst aber beweisen wir den

Satz:

Alle Lotstrecken zwischen zwei parallelen Geraden sind gleich lang.

Begründung: Errichtet man in A ein Lot auf p, so trifft es die andere Parallele q im Punkt B auch unter 90° (E-Winkel!). Im Viereck ABCD sind deshalb je zwei Gegenwinkel gleich groß (= 90°), es ist also nach dem 2. Parallelogramm-Kriterium ein Parallelogramm (ja sogar ein Rechteck). Nach dem 3. Parallelogramm-Kriterium ist dann $\overline{AB} = \overline{CD}$. Diese Überlegung gilt für alle Lote.

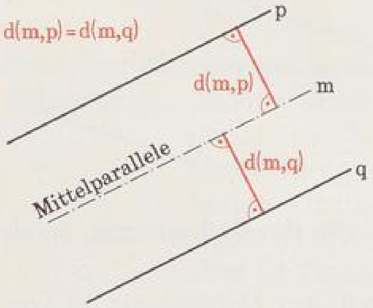
Abstand von Parallelen



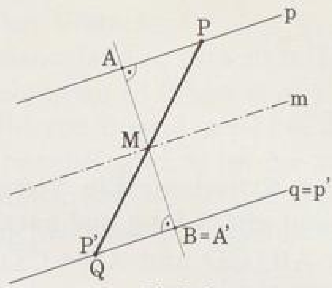
Definition:

Die Länge der Lotstrecke zwischen zwei Parallelen p und q heißt **Abstand** d (p, q) der Parallelen.

Die Lotstrecke ist eine besondere **Querstrecke.** Allgemein heißt jede Strecke Querstrecke, deren Endpunkte auf einem Parallelenpaar liegen.



M halbiert die Querstrecke [PQ]



P' = Q ?

Die Mittelparallele m zweier Parallelen p und q ist die Symmetrieachse von p und q. Sie hat deshalb von p und q denselben Abstand. Es gilt sogar der

Satz:

Jede Querstrecke wird von der Mittelparallele halbiert.

Begründung: PQ schneidet m in M. AB ist das Lot von p und q durch M, also ist $\overline{MB} = \overline{MA}$. Spiegelt man an M, so gilt: $A' = B$ und $p' = q$. P' liegt 1. auf PM und 2. auf p' (= q), also ist $P' = Q$ und damit $\overline{PM} = \overline{QM}$.

Umgekehrt gilt: Die Parallele durch den Mittelpunkt einer Querstrecke ist die Mittelparallele m. Die Mittelparallele m geht nämlich auf alle Fälle durch den Mittelpunkt der Querstrecke. Weil durch einen Punkt aber nur eine Parallele zu einer Gerade gehen kann, muss sie gleich m sein.

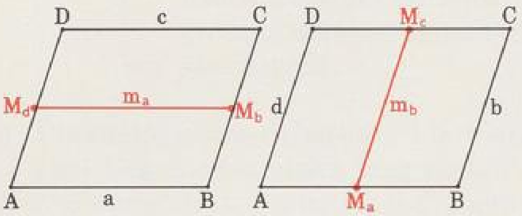
Wir wissen jetzt, dass jede Mittelparallele eines Parallelogramms zwei Gegenseiten halbiert. Umgekehrt gilt auch der

Satz:

Die Strecke, die die Mitten zweier Parallelogramm-Gegenseiten verbindet, ist parallel zu den anderen Gegenseiten und genauso lang.

Eine solche Verbindungsstrecke heißt Mittellinie des Parallelogramms.

Begründung: M_d ist Mitte von [AD] und M_b ist Mitte von [BC]. Die Mittelparallele m von AB und CD geht auch durch M_b und M_d, das heißt, M_bM_d ist die Mittelparallele m. Weil im Viereck ABM_bM_d je zwei Gegenseiten parallel sind, ist es ein Parallelogramm; also ist $\overline{M_bM_d} = \overline{AB}$.

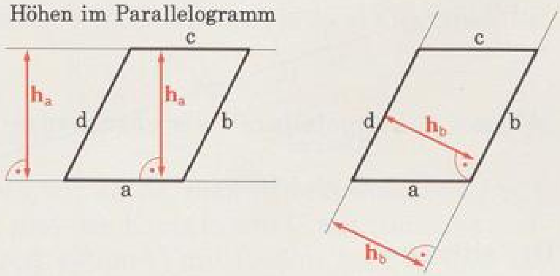


$m_a \| a \| c$ $m_b \| b \| d$

Mittellinien im Parallelogramm

$m_a = a = c$ $m_b = b = d$

Höhen im Parallelogramm



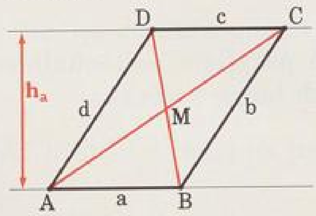
Nach der Definition des Parallelogramms liegen je zwei Gegenseiten auf Parallelen. Die Abstände dieser Parallelen heißen **Höhen des Parallelogramms.** Gewöhnlich sind diese beiden Abstände verschieden, deshalb hat ein Parallelogramm zwei Höhen.

Wenn wir ein Parallelogramm konstruieren, dann nutzen wir seine Eigenschaften aus. Ein etwas schwierigeres Beispiel führen wir vor. Konstruiere ein Parallelogramm ABCD mit $\overline{AC} = 9$, $\overline{BD} = 5$ und $h_a = 4$.

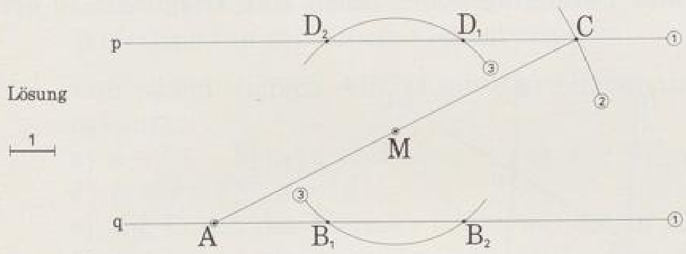
Lösungsidee: Die Seiten a und c liegen auf Parallelen mit Abstand 4. Die Diagonalen [AC] und [BD] halbieren sich.

Lösung:
① Mit dem Geodreieck zeichnen wir zwei Parallelen p und q im Abstand 4.
② Auf q wählen wir den Punkt A. Der Kreis um A mit Radius $\overline{AC} = 9$ schneidet p in C.
③ Der Kreis um den Mittelpunkt M von [AC] mit Radius $\frac{1}{2}\,\overline{BD} = 2{,}5$ schneidet p in D_1 und D_2 und q in B_1 und B_2.

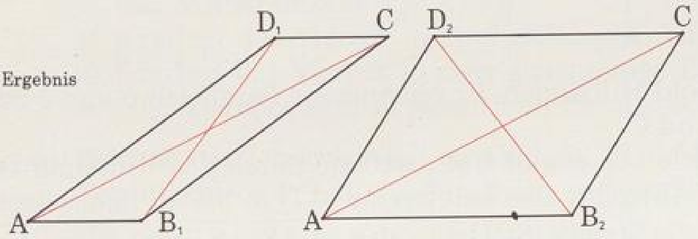
Planfigur



Lösung



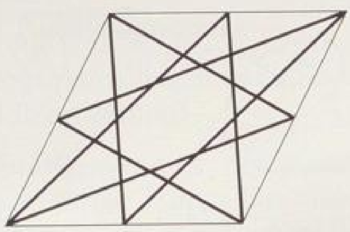
Ergebnis

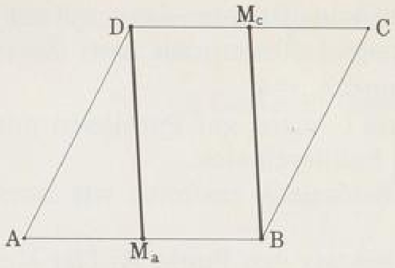


Ergebnis: Parallelogramm AB_1CD_1 und Parallelogramm AB_2CD_2.

Zum Schluss noch ein Begründungsaufgabe:

Geobold spielt mit Parallelogrammen. Er verallgemeinert die Seitenhalbierende des Dreiecks aufs Parallelogramm und hat jede Ecke mit den beiden gegenüberliegenden Seitenmitten verbunden; dabei ist ein schräger achtzackiger Stern entstanden. Dem Geobold fällt auf, dass es zu jeder Seitenhalbierenden eine parallele Seitenhalbierende gibt.

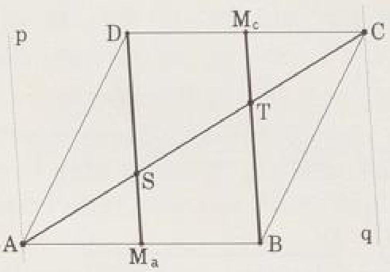




Begründung: $[M_cD]$ und $[M_aB]$ sind gleich lang und parallel. Nach dem 4. Parallelogramm-Kriterium ist M_aBM_cD ein Parallelogramm, seine Seiten $[M_aD]$ und $[M_cB]$ sind parallel.

Dann zeichnet Geobold noch die Diagonale [AC] ein. [AC] wird von den Seitenhalbierenden gedrittelt. Die drei Teile schauen gleich lang aus und so vermutet Geobold den

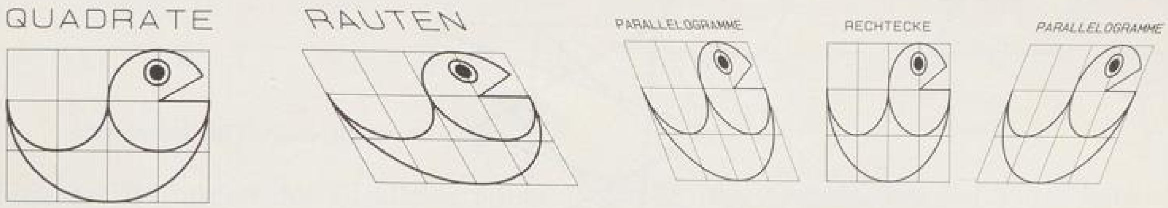
Satz:
Zwei parallele Seitenhalbierende eines Parallelogramms teilen eine Diagonale in drei gleich lange Strecken.



Für die Begründung braucht Geobold Hilfslinien. Er zeichnet die Parallelen p und q zu den Seitenhalbierenden durch A und C.

Begründung: DM_a ist Mittelparallele von p und BM_c, weil sie durch den Mittelpunkt M_a der Querstrecke [AB] geht; also halbiert sie [AT] in S. Aus demselben Grund halbiert BM_c die Strecke [SC] in T; also ist $\overline{AS} = \overline{ST}$ und $\overline{ST} = \overline{TC}$. Damit ist Geobolds Vermutung bewiesen: $\overline{AS} = \overline{ST} = \overline{TC}$.

Geobolds Heim ist ein Käfig aus 4×3 Quadraten. Die Mittelpunkte der Geobold-Kreisbögen sind bis aufs Auge Gitterpunkte. Gerät er jedoch nach einer Geometriestunde vor Freude außer Rand und Band, dann verformt er seinen Quadratkäfig: Er streckt oder staucht ihn zu einem Rechteckkäfig, kippt ihn nach links oder rechts, nach oben oder unten zu einem Parallelogramm-, ja sogar Rautenkäfig und verzerrt sich dabei selber zu einer Ovalbogen-Figur.



Aufgaben

1. Berechne alle Innenwinkel eines Parallelogramms, wenn bekannt ist:
   a) $\alpha = 75°$ **b)** α ist um 36° größer als β
   c) $\alpha = 90°$ **d)** α ist dreimal so groß wie β.

2. In welchem besonderen Parallelogramm
   a) ist ein Winkel ein rechter Winkel,
   b) sind zwei Nachbarwinkel gleich,
   c) sind zwei Gegenwinkel supplementär,
   d) sind drei Winkel gleich,
   e) sind zwei Nachbarseiten gleich lang,
   f) sind zwei Diagonalen gleich lang,
   g) sind zwei Diagonalen gleich lang und zueinander senkrecht?

3. Geobolds neuestes Parallelogramm-Kriterium:
   Wenn in einem Viereck zwei Seiten parallel und die beiden andern gleich lang sind, dann ist es ein Parallelogramm.
   Widerlege ihn mit einem Gegenbeispiel.

•4. Von einem Viereck ABCD mit den Diagonalen e = [AC] und f = [BD] ist jeweils bekannt:
   a) e = f **b)** a ∥ c und a = c **c)** $\alpha = 90°$, $\gamma = 90°$ und b = d
   d) $\alpha = \gamma = 75°$, $\beta = 105°$
   e) die Ecken des Vierecks liegen auf einem Kreis
   f) die Ecken des Vierecks liegen auf einem Kreis, die Diagonalen laufen durch den Mittelpunkt dieses Kreises
   g) e zerlegt das Viereck in zwei gleichschenklige Dreiecke
   h) f zerlegt das Viereck in zwei gleichseitige Dreiecke.
   Welche Vierecke sind in jedem Fall Parallelogramme?

5. Zeichne das Dreieck ABC mit A(0 | 0), B(10,5 | 0) und C(3,5 | 7).
   Zeichne durch P(3 | 0) die Parallelen zu a und b; a wird in R und b in Q geschnitten.
   Vergleiche den Weg von A nach B über C mit dem Zickzack-Weg AQPRB.
   Was ändert sich, wenn P woanders auf [AB] liegt?

•6. Bei welchen Parallelogrammen sind
   a) die Diagonalen zugleich auch Winkelhalbierende,
   b) die beiden Höhen gleich lang,
   c) die Gegenwinkel supplementär,
   d) die Mittellinien gleich lang?

7. Das Parallelogramm ABCD und das Parallelogramm DCPQ (P nicht auf AB) haben eine gemeinsame Seite.
   Begründe: ABPQ ist ein Parallelogramm.

8. Die Ecken eines Parallelogramms liegen auf einem Kreis. Was für ein besonderes Parallelogramm ist das? Begründung!

9. Ein Trapez heißt **rechtwinklig,** wenn es mindestens einen rechten Winkel hat.
   a) Begründe: Jedes rechtwinklige Trapez hat mindestens zwei rechte Winkel.
   b) Welchen anderen Namen hat ein gleichschenklig rechtwinkliges Trapez noch?

10. Die Ecken C und D eines Trapezes liegen auf dem Thaleskreis über der Grundseite a.
Drücke den Schnittwinkel σ der Diagonalen mit α aus.

11. Zeichne ein Trapez, die vier Winkelhalbierenden und die Thaleskreise über den Schenkeln.
Begründe: Auf jedem Thaleskreis schneiden sich zwei Winkelhalbierende.

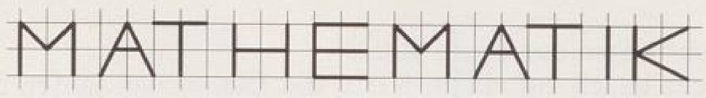
12. Konstruiere ein Parallelogramm ABCD mit A(1|3,5), D(4,5|8) und M(4|4,5), dem Diagonalenschnittpunkt. Gib die Koordinaten von B und C an.

13. Zeichne die Geraden g und h mit $\sphericalangle(g, h) = 60°$.
Konstruiere alle Punkte, die von g und h den Abstand 2 haben.

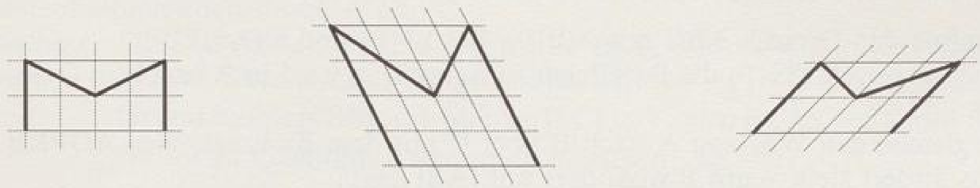
14. Konstruiere ein Parallelogramm ABCD, M ist der Schnittpunkt der Diagonalen $e = [AC]$ und $f = [BD]$.

a) $a = 6, b = 4, \alpha = 60°$	**b)** $c = 7, e = 9, \delta = 150°$
c) $a = 12, b = 5, e = 13$	**d)** $e = 6, f = 8, \sphericalangle BMC = 45°$
e) $e = 5, f = 9, b = 6$	**f)** $a = 7, b = 8, h_a = 5$
g) $h_a = 6, a = 8, \alpha = 135°$	**h)** $h_a = 6, b = 8, f = 7$
i) $h_a = 5, h_b = 7, \alpha = 60°$	**j)** $h_a = 4, h_b = 2, e = 6.$

15. Schrägschrift

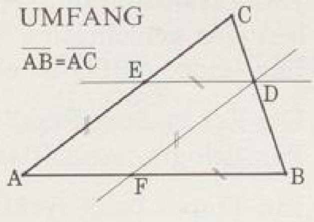


Übertrage die Buchstaben MATHEMATIK vom Quadratgitter in ein:
a) Rechteckgitter **b)** Parallelogrammgitter nach links **c)** Parallelogrammgitter nach rechts



16. Konstruiere das Trapez LAUB mit den Grundseiten [LA] und [UB] aus:
a) L(1|1). A(5|1). U(7|7). $\sphericalangle L = 75°$
b) L(7|2), A(7|7), $\sphericalangle L = 90°$, $\sphericalangle BAL = 30°$, $\overline{UB} = 6$

17. Zeichne in ein Parallelogramm ABCD mit $a = 7$, $b = 4,5$ und $\beta = 120°$ die Winkelhalbierenden ein.
Begründe: Die Winkelhalbierenden bilden ein Rechteck.



18. UMFANG
Begründe: Der Umfang des Vierecks AFDE ist so groß wie die Schenkellängen zusammen.

19. Zeichne das Parallelogramm ABCD und alle Seitenhalbierenden durch A und C.
Begründe: Die Seitenhalbierenden schneiden sich auf der Diagonale [BD].

20. HUNDERTACHTZIG
Im Parallelogramm ABCD sind zwei Seiten so verlängert, dass $\overline{DN} = \overline{AB}$ und $\overline{BM} = \overline{AD}$ ist.
a) Was haben die Dreiecke DNC und BMC außer Punkt C noch alles gemeinsam?
b) Begründe: C liegt auf MN.

21. LOTTE
Begründe: **a)** $\overline{BE} = \overline{DF}$
b) Viereck BEDF ist ein Parallelogramm.

22. DUO
Begründe:
a) FBED ist ein Parallelogramm
b) der Mittelpunkt W von [EF] liegt auf AC
c) AFCE ist ein Parallelogramm.

23. Zeichne ein Dreieck ABC und durch die Ecken die Parallelen zu den Gegenseiten.
Begründe: Der Umfang des Dreiecks, das die Parallelen bilden, ist doppelt so groß wie der Umfang des Dreiecks.

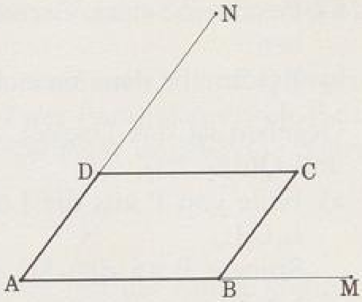
24. VERSCHNITT
Im Diagonalenschnittpunkt M des Parallelogramms schneiden sich zwei Geraden.
Begründe: EFGH ist ein Parallelogramm.

25. Zeichne ein Parallelogramm ABCD, die Seitenmitten M_a und M_c und die vier Seitenhalbierenden durch jene Seitenmitten.
Begründe: Die Seitenhalbierenden schneiden sich auf der Mittellinie m_a.

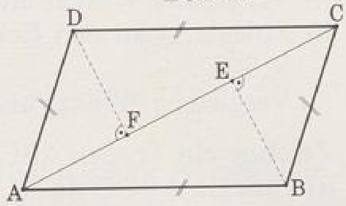
26. QUERSTRECKEN im Quadrat
a) Das Lot von U auf TV schneidet DC in U'.
Zeige: $\overline{UU'} = \overline{TV}$.
b) Zeichne die Punkte T, U, V und W. Konstruiere ein Quadrat ABCD, auf dessen Seiten oder ihren Verlängerungen die Punkte T, U, V und W liegen.

27. GLEICHSCHRITT
a) Vergleiche die Winkel $\sphericalangle AMQ$ und $\sphericalangle CPN$
b) Begründe: MNPQ ist ein Parallelogramm
c) Begründe: PM und QN schneiden sich im selben Punkt wie AC und BD.

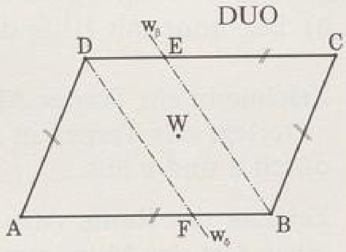
HUNDERTACHTZIG



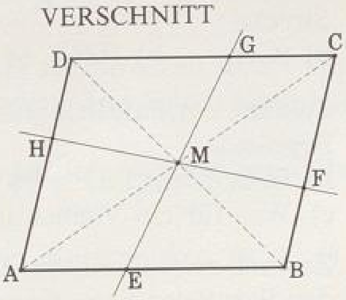
LOTTE



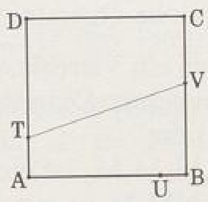
DUO



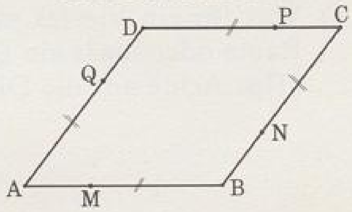
VERSCHNITT



QUERSTRECKEN



GLEICHSCHRITT



$\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{CP} = \overline{DQ}$

28. $A(1|1)$, $B(9|9)$, $C(9|16)$ und $D(1|8)$ sind die Ecken eines Vierecks.

a) Beschreibe dem Viereck ein Rechteck ein, dessen Diagonalen die Länge 13 haben.

b) Beschreibe dem Viereck eine Raute ein, deren eine Diagonale die Länge 6 hat.

29. Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A(0|0)$, $B(6|0)$ und $C(4{,}5|4{,}5)$, ferner $P(4|1)$ und $Q(3{,}5|2{,}5)$.

a) Fälle von P aus die Lote auf die Seiten, die Lotfußpunkte bilden das Dreieck $L_aL_bL_c$.
Spiegle P an den Seiten von $\triangle$ ABC, die Spiegelpunkte bilden das Dreieck $S_aS_bS_c$.
Vergleiche Winkel und Seitenlängen dieser beiden Dreiecke.

b) Spiegle Q an den Ecken des Dreiecks, die Spiegelpunkte bilden das Dreieck $S_AS_BS_C$.
Vergleiche Winkel und Seitenlängen dieses Dreiecks mit denen von ABC.

30. Zeichne ein Trapez ABCD und den Mittelpunkt M von [BC].

a) Spiegle ABCD an M. Welche Gesamtfigur ergibt sich?

b) Begründe mit Hilfe der Figur von **a)**: $m = \frac{1}{2}(a + c)$.

31. Zeichne in ein Trapez ABCD mit den Grundseiten a und c die Mittellinie m ein. m zerlegt das Trapez in zwei Teiltrapeze. Drücke die Mittellinien dieser Trapeze durch a und c aus.

:32. Zeichne die Raute $A(0|0)$, $B(5|0)$, $C(8|4)$ und $D(?|?)$. Zeichne den geometrischen Ort der Mittelpunkte aller Kreise durch A, B und W; W wandert auf der Strecke

a) [CD] **b)** [MC], M ist Mittelpunkt der Raute.

33. Zeichne ein Parallelogramm ABCD mit $\overline{BD} = a$. B an d gespiegelt ergibt B′.
Begründe:

a) B′ liegt auf CD **b)** D halbiert [B′C]

c) Was für ein Viereck ist ABDB′?

34. Zeichne zwei Parallelen im Abstand 5 und einen Punkt A, der auf keiner der beiden Parallelen liegt. Konstruiere durch A eine Gerade, aus der das Parallelenpaar eine Querstrecke der Länge 7 ausschneidet.
Für welche Querstreckenlängen gibt es keine Lösung?

35. Zeichne ein Viereck ABCD, die Mitten seiner Seiten M_a, M_b, M_c und M_d sowie die Mitten seiner Diagonalen M auf [AC] und N auf [BD].
Begründe:

a) $M_aM_bM_cM_d$ ist ein Parallelogramm.

b) M_aNM_cM ist ein Parallelogramm, dessen Seiten parallel sind zu b und d des Vierecks ABCD.

c) Was für ein Viereck muss ABCD sein, damit $M_aM_bM_cM_d$ ein Rechteck, eine Raute oder sogar ein Quadrat ist?
(Tip: Achte auf die Diagonalen!)

36. **a)** Konstruiere ein Dreieck, von dem die Seitenmitten bekannt sind.

b) Konstruiere ein Parallelogramm, von dem die Seitenmitten M_a, M_b und M_c bekannt sind.

c) Zeichne um M einen Halbkreis k und seinen Durchmesser. P und Q liegen auf dem Durchmesser gleich weit von M entfernt. Zwei Parallelen durch P und Q schneiden k in V und W. Wie groß sind die Winkel PVW und VWQ? Begründe deine Antwort.
(Tip: Ein Halbkreis ist ein halber Kreis!)

37. Beschreibe einem Kreis ein gleichschenkliges Dreieck mit der Spitze C ein.
Die Winkelhalbierenden w_α und w_β schneiden den Kreis in D und E und sich selber in W.

a) Begründe: EWDC ist ein Parallelogramm.

b) Drücke die Größe von $\sphericalangle$EDW mit α aus.

c) Was für ein Parallelogramm ist EWDC?

38. Zeichne in ein Dreieck ABC mit $\beta > \alpha$ die Winkelhalbierende w_γ ein. Die Senkrechte zu w_γ geht durch den Mittelpunkt M_c von c und schneidet CB in D und CA in E.

a) Begründe: $\overline{CE} = \overline{CD}$.

b) Die Parallele zu ED durch B schneidet AC in F.
Begründe: E halbiert [AF].

c) Begründe: $\overline{CD} = \frac{1}{2}(a + b)$, $\overline{AE} = \frac{1}{2}(b - a)$

d) Begründe: $\sphericalangle BM_cD = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$.

39. Trage auf den Schenkeln eines Winkels vom Scheitel aus Strecken so ab, dass die Summe beider Streckenlängen gleich 8 ist. Die Strecken sind Seiten eines Parallelogramms.
Welche Ortslinie bilden die Parallelogrammecken, die dem Scheitel gegenüberliegen?

40. Zeichne einen Kreis um M(7 | 3) mit r = 2,5. Die Kreispunkte A(5 | 1,5) und B(9 | 1,5) legen eine Sehne fest. $\begin{smallmatrix} & 6 & \\ 0 & 0 & 10 \\ & 0 & \end{smallmatrix}$ Punkt C wandert auf dem Kreis.

a) Bestimme den geometrischen Ort der vierten Ecke D des Parallelogramms ABCD.
(*Tip:* Zeichne für einige Punkte C die Parallelogrammseite [CD].)

b) Bestimme den geometrischen Ort des Mittelpunkts Z im Parallelogramm ABCD.
(*Tip:* $\sphericalangle$(AC, MZ) = ?)