Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 2000

2. Kapitel: Der mathematische Lehrsatz

urn:nbn:de:hbz:466:1-83477

2. Kapitel

Der mathematische Lehrsatz

2.1 Der Aufbau eines mathematischen Lehrsatzes

Lehrsätze (kurz »Sätze«) kennen wir schon viele, zum Beispiel:
- Im Dreieck sind zwei Seiten zusammen immer länger als die dritte Seite.
- Dreiecke sind kongruent, wenn sie in allen Seiten übereinstimmen.
- Jedes Parallelogramm ist ein punktsymmetrisches Viereck.
- Ein Dreieck, dessen Ecken so auf einem Kreis liegen, dass eine Seite Kreisdurchmesser ist, hat einen rechten Winkel.

In der Mathematik gehört es zum guten Ton, dass man zu jeder Behauptung auch die Bedingungen nennt, unter denen sie gilt. Deshalb besteht jeder mathematische Satz gewöhnlich aus zwei Teilen:
1. Die Bedingungen, die man zu Grunde legt.
   Man nennt sie **Voraussetzung** des Satzes.
2. Die Folgerung, die man aus der Voraussetzung zieht.
   Sie heißt **Behauptung** des Satzes.

Oft erkennen wir Voraussetzung und Behauptung nicht auf Anhieb. Der Deutlichkeit halber zerlegen wir die vier Beispielsätze in Voraussetzung und Behauptung:

Satz	**Voraussetzung**	**Behauptung**
Im Dreieck sind zwei Seiten zusammen immer länger als die dritte.	Drei Strecken bilden die Seiten eines Dreiecks.	Zwei Seiten zusammen sind länger als die dritte.
Dreiecke sind kongruent, wenn sie in allen Seiten übereinstimmen.	Dreiecke stimmen in allen Seiten überein.	Die Dreiecke sind kongruent.
Jedes Parallelogramm ist ein punktsymmetrisches Viereck.	Ein Viereck ist ein Parallelogramm.	Das Viereck ist punktsymmetrisch.
Ein Dreieck, dessen Ecken so auf einem Kreis liegen, dass eine Seite Kreisdurchmesser ist, hat einen rechten Winkel.	Die Ecken eines Dreiecks liegen so auf einem Kreis, dass eine Seite Kreisdurchmesser ist.	Das Dreieck ist rechtwinklig.

Um Voraussetzung und Behauptung besser zu trennen formuliert man mathematische Sätze häufig in der **Wenn-Dann-Form.** Die Beispielsätze wirken dann zwar etwas schwerfällig, dafür sind sie aber auch klarer:

- **Wenn** drei Strecken die Seiten eines Dreiecks bilden,
  dann sind je zwei zusammen länger als die dritte.
- **Wenn** Dreiecke in allen Seiten übereinstimmen,
  dann sind sie kongruent.
- **Wenn** ein Viereck ein Parallelogramm ist,
  dann ist es punktsymmetrisch.
- **Wenn** die Ecken eines Dreiecks so auf einem Kreis liegen, dass eine Seite Kreisdurchmesser ist,
  dann ist das Dreieck rechtwinklig.

Schreiben wir für die Voraussetzung ein A und ein B für die Behauptung, dann lautet das Schema für einen mathematischen Satz:

Wenn A, dann B

Manchmal sagt man auch **Aus A folgt B** oder noch kürzer

A also B

und schreibt dafür symbolisch $\boxed{A \Rightarrow B}$

Auch im Alltag verwenden wir solche Sätze, allerdings sind Voraussetzung und Behauptung manchmal sehr versteckt.

Satz, wie wir ihn sagen	*Satz in der Wenn-Dann-Form*
Alle Menschen sind sterblich	Wenn du ein Mensch bist, dann bist du sterblich.
Eisen rostet.	Wenn ein Gegenstand aus Eisen ist, dann rostet er.
Bei Rot anhalten!	Wenn die Ampel auf Rot steht, dann musst du anhalten.
Weihnachtsgans nur auf Vorbestellung	Wenn man nicht vorbestellt, dann bekommt man keine Weihnachtsgans.
Vampire haben kein Spiegelbild.	Wenn ein Wesen ein Vampir ist, dann hat es kein Spiegelbild.

Jeder Satz, der eine Voraussetzung und eine Behauptung enthält, lässt sich auch anders ausdrücken: Man vertauscht Voraussetzung und Behauptung und verneint die beiden:

Voraussetzung		**Behauptung**
Du bist ein Mensch.	$\Rightarrow$	Du bist sterblich.
	Verneinung	
Du bist nicht sterblich.	$\Rightarrow$	Du bist kein Mensch.

in der Wenn-Dann-Fassung

Wenn du ein Mensch bist,		dann bist du sterblich.
	Verneinung	
Wenn du nicht sterblich bist,		dann bist du kein Mensch.

ein anderes Beispiel

Wenn ein Wesen ein Vampir ist,		dann hat es kein Spiegelbild.
	Verneinung	
Wenn ein Wesen ein Spiegelbild hat,		dann ist es kein Vampir.

Damit haben wir ein allgemeines Gesetz kennen gelernt. In Kurzform lautet es:

A also B — nicht B also nicht A

$\boxed{\mathbf{A \Rightarrow B}}$ **ist gleichwertig mit** $\boxed{\mathbf{\overline{B} \Rightarrow \overline{A}}}$

wenn A, dann B — wenn B nicht, dann A nicht

Mit $\overline{B}$ (sprich »B quer«) meint man die Verneinung der Aussage B. Der Satz $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ heißt **Kontraposition** des Satzes $A \Rightarrow B$. Dazu noch ein Beispiel:

Satz:

Wenn Dreiecke in allen Seiten übereinstimmen,	dann sind sie kongruent.

Verneinung

Kontraposition:

Wenn Dreiecke nicht kongruent sind,	dann stimmen sie nicht in allen Seiten überein.

Haben Voraussetzung oder Behauptung mehrere Bestandteile, so ist die Kontraposition verzwickter, weil man beim Verneinen einer zusammengesetzten Aussage sehr aufpassen muss. Beispiel:

Satz
Wenn ich nicht gelernt habe und ausgefragt werde, dann bekomme ich eine schlechte Note.

Kontraposition
Wenn ich keine schlechte Note bekommen habe, dann habe ich gelernt oder bin nicht ausgefragt worden.

Um diese beiden Sätze in Kurzform zu schreiben brauchen wir zwei neue Symbole. Für »und« schreiben wir »$\wedge$«, für »oder« schreiben wir »$\vee$«. Das Ganze sieht dann so aus:

Satz:

nicht gelernt	und	ausgefragt	$\Rightarrow$	schlechte Note
N	$\wedge$	A	$\Rightarrow$	S

Kontraposition:

keine schlechte Note	$\Rightarrow$	gelernt	oder	nicht ausgefragt
$\overline{S}$	$\Rightarrow$	$\overline{N}$	$\vee$	$\overline{A}$

Aufgaben

1. Gib Voraussetzung, Behauptung und Wenn-Dann-Form der folgenden Sätze an:
   a) Jede Zahl mit der Quersumme 6 ist durch 3 teilbar.
   b) Im Parallelogramm sind zwei Winkel gleich groß.
   c) Ein Viereck mit drei rechten Winkeln ist ein Rechteck.
   d) Nebenwinkel ergänzen sich zu 180°.

•2. Gib Voraussetzung, Behauptung und Wenn-Dann-Form der folgenden Sätze an:
   a) Bei Gefahr Notbremse ziehen.
   b) Vorsicht! Bissiger Hund.
   c) Kein Geist wirft einen Schatten.
   d) Kängurus brauchen keine Handtaschen.

3. Bilde die Kontraposition von:
   a) Wenn ein Dreieck gleichschenklig ist, dann hat es zwei gleich große Winkel.
   b) Wenn 2 die letzte Ziffer einer Zahl ist, dann ist es keine Quadratzahl.
   c) Wenn zwei Geraden ein gemeinsames Lot haben, dann sind sie parallel.
   d) Wenn eine Zahl genau zwei Teiler hat, dann ist sie eine Primzahl.

•4. Bilde die Kontraposition von:
   a) Wenn die Sonne scheint, dann ist es hell.
   b) Wenn du nicht sorgfältig zeichnest, dann wird die Konstruktion ungenau.
   c) Wenn du mindestens 3 Richtige hast, dann gewinnst du im Lotto.
   d) Wenn du höchstens drei Fehler im Diktat hast, dann kriegst du mindestens eine 2.

:5. Bilde die Kontraposition von:
   a) Wenn ein Viereck vier gleich große Winkel und vier gleich lange Seiten hat, dann ist es ein Quadrat.
   b) Wenn eine Zahl durch 4 und durch 6 teilbar ist, dann ist sie durch 12 teilbar.

:6. Bilde die Kontraposition von:
   a) Wenn ein Parallelogramm einen Umkreis hat oder zwei gleich große benachbarte Winkel, dann ist es ein Rechteck.
   b) Wenn eine Zahl durch 111 oder 74 teilbar ist, dann ist sie durch 37 teilbar.

2.2 Wahre und falsche Sätze, Kehrsatz

Ein Satz kann wahr oder falsch sein. Beispiele:

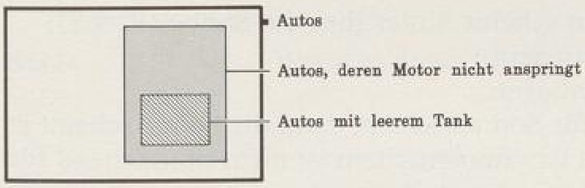
- Wenn der Tank leer ist, dann springt der Motor nicht an. (wahr)
- Jedes gleichseitige Dreieck hat mindestens zwei gleich große Winkel. (wahr)
- Wenn die Autobatterie leer ist, dann springt der Motor nicht an. (falsch)
- Ein Dreieck mit mindestens einem 60°-Winkel ist gleichschenklig. (falsch)

Um zu zeigen, dass ein Satz wahr ist, muss man ihn beweisen; um zu zeigen, dass ein Satz falsch ist, genügt es *ein* Gegenbeispiel zu finden. Ein Gegenbeispiel erfüllt die Voraussetzung, nicht aber die Behauptung. Gegenbeispiele für die beiden falschen Sätze sind:

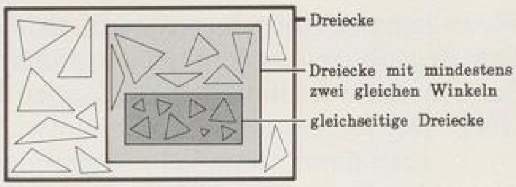
- ein Auto mit leerer Batterie, dessen Motor anspringt, wenn man das Auto anschiebt,
- ein Dreieck mit den Winkeln 60°, 30° und 90°.

Diese Sachverhalte kann man sich auch mit **Mengendiagrammen** klar machen.

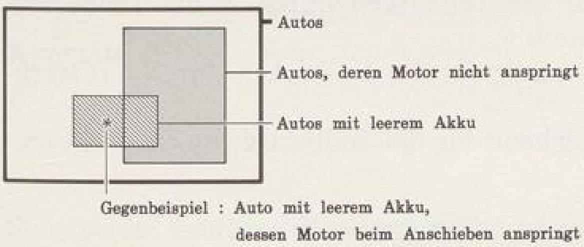
Wenn der Tank leer ist,
dann springt der Motor nicht an.



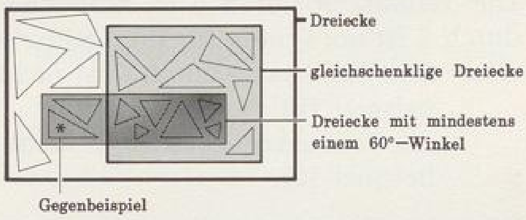
Jedes gleichseitige Dreieck hat
mindestens zwei gleich große Winkel.



Wenn der Akku leer ist,
dann springt der Motor nicht an.



Ein Dreieck mit mindestens
einem 60°-Winkel ist gleichschenklig.



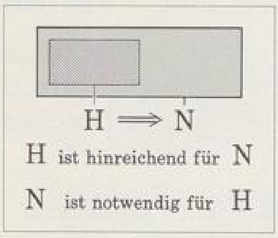
Kürzen wir die Aussagen genauso ab wie die Mengen, so gilt:

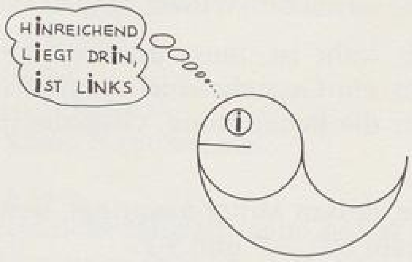
$A \Rightarrow B$ (wahr) ist gleichwertig mit $A \subset B$ (A ist Teilmenge von B).
Der Satz $B \Rightarrow A$ ist falsch, weil B keine Teilmenge von A ist. Alle Elemente (Autos, Dreiecke), die zu B, aber nicht zu A gehören, sind Gegenbeispiele.

Der Satz »Wenn einer Lungenentzündung hat, dann hat er Fieber« ist wahr. Bei einem wahren Satz $A \Rightarrow B$ nennen wir die Voraussetzung A eine **hinreichende Bedingung** für B. Lungenentzündung ist eine hinreichende Bedingung für Fieber. Es *reicht,* wenn man weiß, dass einer Lungenentzündung hat (also A gilt) um sicher zu sein, dass er auch Fieber hat (also auch B gilt).
Der Satz $A \Rightarrow B$ (wenn Lungenentzündung, dann Fieber) hat die Kontraposition $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ (wenn kein Fieber, dann keine Lungenentzündung).

Also ist Fieber notwendig dafür, dass Lungenentzündung vorliegt, denn ohne Fieber keine Lungenentzündung (wie es die Kontraposition sagt). Fieber (B) ist eine **notwendige Bedingung** für Lungenentzündung (A). Allgemein sagt man:

B ist eine notwendige Bedingung für A,
wenn aus der Ungültigkeit von B (das ist $\overline{B}$) die Ungültigkeit von A ($\overline{A}$) folgt,
wenn also $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ wahr ist, was gleichwertig ist mit $A \Rightarrow B$.





Bei jedem wahren Satz steht also
eine hinreichende Bedingung vor dem $\Rightarrow$
und eine notwendige Bedingung hinter dem $\Rightarrow$.

Zur Verdeutlichung noch drei Beispiele:

Wenn jemand einen Regenbogen sieht, dann scheint hinter ihm die Sonne ($R \Rightarrow S$).
Der Regenbogen ist hinreichend für Sonnenschein.
Sonnenschein ist notwendig für einen Regenbogen.
Aber: Der Regenbogen ist nicht notwendig für Sonnenschein, denn die Sonne scheint ja auch dann, wenn kein Regenbogen da ist; Sonnenschein ist nicht hinreichend für den Regenbogen, denn wenn die Sonne scheint, dann ist nicht immer auch ein Regenbogen da.

Wenn eine Zahl durch 6 teilbar ist, dann ist sie auch durch 2 teilbar ($T_6 \Rightarrow T_2$).
Die Teilbarkeit durch 6 ist hinreichend für die Teilbarkeit durch 2, die Teilbarkeit durch 2 ist notwendig für die Teilbarkeit durch 6.
Aber: Die Teilbarkeit durch 6 ist nicht notwendig für die Teilbarkeit durch 2 (Gegenbeispiel 10);
die Teilbarkeit durch 2 ist nicht hinreichend für die Teilbarkeit durch 6 (Gegenbeispiel 10).

Wenn ein Viereck eine Raute ist, dann hat es zwei Symmetrieachsen ($R \Rightarrow S$).
Die Rauteneigenschaft ist hinreichend für zwei Symmetrieachsen, aber nicht notwendig (Gegenbeispiel: Rechteck). Zwei Symmetrieachsen sind bei einem Viereck notwendig für die Rauteneigenschaft, aber nicht hinreichend (Gegenbeispiel: Rechteck).
Vertauscht man in einem Satz Voraussetzung und Behauptung, so ergibt sich der Kehrsatz, zum Beispiel:

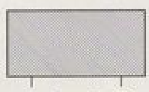
Satz	Wenn der Tank leer ist,	dann springt der Motor nicht an.	wahr
Kehrsatz	Wenn der Motor nicht anspringt,	dann ist der Tank leer.	falsch

Satz: $\mathbf{A \Rightarrow B}$ **Kehrsatz:** $\mathbf{B \Rightarrow A}$

Viele Wenn-Dann-Sätze haben falsche Kehrsätze, aber nicht alle, zum Beispiel der hier:

Satz	Wenn es Juni ist,	dann erreicht die Sonne in Rom den höchsten Stand.	wahr
Kehrsatz	Wenn die Sonne in Rom den höchsten Stand erreicht,	dann ist es Juni.	wahr

Sind beide, Satz und Kehrsatz, wahr, so sagt man:
A gilt **genau dann, wenn** B gilt.



$A \Longleftrightarrow B$

A ist hinreichend und notwendig für B

B ist notwendig und hinreichend für A

$A \Leftrightarrow B$

Auch dafür gibt es eine symbolische Kurzform:
Im Diagramm fallen die Mengen für A und B zusammen.

Beispiel: Ein Viereck ist genau dann ein Quadrat, wenn es vier Symmetrieachsen hat. Vier Symmetrieachsen sind bei einem Viereck hinreichend und notwendig für die Quadrateigenschaft.

Dieser Abschnitt hat angefangen mit »Ein Satz kann wahr oder falsch sein ...«. Was kann er denn sonst noch? Es gibt Sätze, von denen man (noch) nicht weiß, ob sie wahr oder falsch sind, zum Beispiel dieser:

Jede gerade Zahl größer als 2 ist als Summe zweier Primzahlen darstellbar. (Beispiel: $18 = 7 + 11$)

Chr. GOLDBACH (1690 bis 1764) hat diesen Zusammenhang 1742 vermutet. Seitdem ist sein Satz weder bewiesen noch ein Gegenbeispiel gefunden worden.

Aufgaben

1. Entscheide bei den folgenden Sätzen, ob sie wahr oder falsch sind. Gib bei falschen Sätzen ein Gegenbeispiel an.
   a) Alle Schüler sind fleißig.
   b) Alle Vögel haben zwei Beine.
   c) Wenn die Straße nass ist, dann hat es geregnet.
   d) Bei Temperaturen unter 0 °C friert der Königsee zu.
   e) Jede Langspielplatte hat 1 024 Rillen.

2. Entscheide bei den folgenden Sätzen, ob sie wahr oder falsch sind. Gib bei falschen Sätzen ein Gegenbeispiel an.
   a) Wenn die Quersumme einer Zahl durch 7 teilbar ist, dann ist die Zahl durch 7 teilbar.
   b) Wenn 2 die letzte Ziffer einer Zahl ist, dann ist es keine Quadratzahl.
   c) Jedes Viereck mit drei rechten Winkeln ist ein Trapez.
   d) Wenn $g \perp h$ und $h \perp k$, dann gilt: $g \perp k$.

•3. Zeichne zu den angegebenen Mengen die Mengendiagramme. Es gibt acht Wenn-Dann-Sätze der Form $A \Rightarrow B$, $\overline{A} \Rightarrow B$, $B \Rightarrow \overline{A}$ usw., also acht Mengendiagramme.
   Entscheide bei jedem dieser Sätze, ob er wahr oder falsch ist, und gib gegebenenfalls ein Gegenbeispiel sowie seine Lage im Mengendiagramm an.
   Warum genügt es eigentlich, wenn man vier dieser acht Sätze überprüft?
   a) A = Menge der Primzahlen
   B = Menge der Vielfachen von 6
   b) A = Menge der Drachenvierecke
   B = Menge der Parallelogramme
   c) A = Menge der Rauten
   B = Menge der Vierecke mit vier gleich langen Seiten
   d) A = Menge der Parallelogramme
   B = Menge der Rechtecke

• **4.** Entscheide, ob A eine hinreichende, eine notwendige, eine hinreichende und notwendige oder eine weder hinreichende noch notwendige Bedingung für B ist.

a) A := Das Viereck hat zwei parallele Seiten.
B := Das Viereck ist ein Parallelogramm.

b) A := Das Dreieck hat drei gleich lange Seiten.
B := Das Dreieck hat einen 60°-Winkel.

c) A := Das Dreieck hat einen 31°-Winkel.
B := Das Dreieck ist stumpfwinklig.

d) A := Die Raute hat einen 90°-Winkel.
B := Das Viereck ist ein Quadrat.

• **5.** Gib für B je eine notwendige, eine hinreichende und eine notwendige und hinreichende Bedingung an.

a) B := Das Viereck ist ein Quadrat.
b) B := Das Dreieck ist gleichschenklig.
c) B := Die Dreiecke ABC und DEF sind kongruent.
d) B := Die Zahl ist durch 12 teilbar.
e) B := Die Zahl ist nicht durch 6 teilbar.

6. Bilde von jedem Satz den Kehrsatz und entscheide bei beiden, ob sie wahr oder falsch sind. Gib gegebenenfalls ein Gegenbeispiel an.

a) Jedes Viereck mit zwei Symmetrieachsen ist eine Raute.
b) Jede gerade Quadratzahl ist durch 4 teilbar.
c) Jedes Viereck mit zueinander senkrechten Diagonalen ist ein Rechteck.
d) Jedes Dreieck mit zwei 60°-Winkeln ist gleichseitig.
e) Wenn drei Punkte auf einem Kreis liegen, dann bilden sie ein rechtwinkliges Dreieck.
f) Wenn zwei Dreiecke punktsymmetrisch liegen, dann sind sie kongruent.

• **7.** Bilde die Kontraposition und den Kehrsatz. Entscheide dann, ob der Satz wahr ist oder der Kehrsatz war ist oder beide wahr sind.

a) Wenn es blitzt, dann donnert's.
b) Wenn man in Urlaub geht, erholt man sich.
c) Wenn der Sturm übers Meer fegt, dann gehen die Wellen hoch.
d) Wenn man Glück hat, gewinnt man im Lotto.
e) Wenn man in den Spiegel schaut, sieht man vorn und hinten vertauscht.
f) Wenn einer eine Reise tut, so kann er was erzählen. (M. Claudius)
g) Wenn zwei sich streiten, freut sich der dritte.
h) Wenn es dem Esel zu wohl wird, geht er aufs Eis.
i) Wenn sie nicht gestorben sind, dann leben sie heute noch.
j)

•8. Bringe den Satz in die Wenn-Dann-Form, bilde die Kontraposition und den Kehrsatz.
Entscheide, ob der Satz wahr ist oder der Kehrsatz wahr ist oder beide wahr sind.

a) Wer dieses Kapitel studiert, schult sein logisches Denken.
b) Wer weniger als vier Fehler hat, bekommt Note eins.
c) Bei klarer Nacht sind die Sterne sichtbar.
d) Hunde, die bellen, beißen nicht.
e) Was sich liebt, das neckt sich.
f) Wo Licht ist, ist auch Schatten.
g) Ohne Fleiß kein Preis.

:9. Wir spielen mit vier Karten. Jede hat auf einer Seite einen Buchstaben und auf der andern eine natürliche Zahl. Die Karten liegen so vor uns:

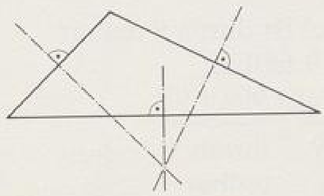
$\boxed{N}$ $\boxed{E}$ $\boxed{8}$ $\boxed{5}$

a) Geobold stellt einen Satz auf:
Wenn auf einer Kartenseite ein Vokal steht,
dann steht auf der Rückseite eine gerade Zahl.
Du sollst nun möglichst wenig Karten wenden, um zu entscheiden, ob der Satz wahr oder falsch ist.
Welche Karten musst du wenden?
b) Welche Karten muss man wenden, um den Kehrsatz von **a)** zu überprüfen?
c) Welchen Satz überprüfst du, wenn du die Karten $\boxed{E}$ und $\boxed{8}$ wendest?

:10. a) Eva: »Adam, wann besuchst du mich endlich?«
Adam: »Wenn ich zu dir radle, muss das Wetter schön sein.«
Nach einem prächtigen Tag:
Eva: »Adam, gestern war schönes Wetter, aber du bist nicht gekommen. Warum hältst du dein Versprechen nicht?«
Besteht Evas Vorwurf zu Recht?
b) Toni: »Bei Föhn habe ich immer scheußliches Kopfweh.«
Tino: »Aber heute ist doch kein Föhn! Warum klagst du?«
Welchen Fehler macht Tino?

2.3 Der Beweis eines mathematischen Satzes

Bei mathematischen Aussagen unterscheidet man zwei Sorten:
Die eine Sorte sind Existenz-Aussagen vom Typ »es gibt ...«, zum Beispiel:
Es gibt Dreiecke, bei denen sich die Mittelsenkrechten außerhalb des Dreiecks treffen.
Solche Existenz-Aussagen beweist man, indem man *ein* Beispiel vorzeigt. In unserem Fall sehen wir das Beispiel im Bild, es ist der Beweis.



Die andere Sorte enthält die meisten mathematischen Sätze, es sind All-Aussagen vom Typ »für alle ... gilt ...« oder vom Typ »wenn ..., dann ...«, zum Beispiel:
Für alle Dreiecke gilt: Die Summe der Innenwinkel beträgt 180°. Weil es unendlich viele Dreiecke gibt, ist es unmöglich, diesen Satz zu beweisen, indem man auch noch so viele Dreiecke vorzeigt. Es könnte ja immer noch andere Dreiecke geben, deren Innenwinkel-Summe von 180° abweicht.

Die Mathematiker haben Methoden entwickelt, die einem die Richtigkeit von Sätzen des Es-Gibt-Typs und des Wenn-Dann-Typs klar machen. Eine solche Methode heißt **Beweis**. Es gibt vier wichtige Beweisarten:

- Beweis durch Nachrechnen
- Widerspruchsbeweis
- Symmetriebeweis
- Kongruenzbeweis

Bei jedem Beweis unterscheidet man drei Teile:
1. Genaue Formulierung aller **Voraussetzungen** (Vor.)
2. Genaue Formulierung der **Behauptung** (Beh.)
3. Begründung der Behauptung; man verwendet dabei die Voraussetzungen und schon bekannte Sätze und Definitionen. (Bew.)

Das Beweisschema sieht dann ungefähr so aus:

Vor.: ..... (V1)
..... (V2)
..... (V3) usw.
Beh.: .....
Bew.: ..... (V1, Satz, ...)
..... (Definition, V2, ...)
..... q.e.d.

Die Schlussformel q.e.d. ist die Abkürzung für den lateinischen Satz »quod erat demonstrandum«, sie heißt auf deutsch »was zu beweisen war«. Seit Euklid stellt man mit ihr erleichtert fest, dass man den Beweis geschafft hat.

Von jedem Beweistyp führen wir Beispiele vor.

Beweise durch Nachrechnen

Beispiel aus der Algebra

Satz:
Eine 3ziffrige Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

Vor.: a sei die Hundertziffer, b die Zehnerziffer und c die Einerziffer der Zahl $100a + 10b + c$; (V1)
die Quersumme $(a + b + c)$ ist durch 9 teilbar (V2)

Beh.: $100a + 10b + c$ ist durch 9 teilbar.

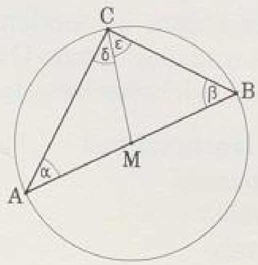
Bew.: $100a + 10b + c = \underbrace{(a+b+c)}_{\substack{\text{durch 9}\\ \text{teilbar}\\ \text{(V2)}}} + \underbrace{99a + 9b}_{\substack{\text{durch 9}\\ \text{teilbar}}}$ (V1)

also gilt: $100a + 10b + c$ ist durch 9 teilbar. q.e.d.

Beispiel aus der Geometrie

Satz:
Wenn die Ecken eines Dreiecks so auf einem Kreis liegen, dass eine Seite Kreisdurchmesser ist, dann ist ihr Gegenwinkel gleich 90°.

Zuerst zeichnen wir eine Überlegungsfigur.



Vor.: $\overline{AM} = \overline{BM} = \overline{CM}$ (V)

Beh.: $\delta + \varepsilon = 90°$

Bew.: $\alpha = \delta$, denn $\triangle MCA$ ist gleichschenklig (V)
$\beta = \varepsilon$, denn $\triangle MBC$ ist gleichschenklig (V)
$\alpha + \beta + \varepsilon + \delta = 180°$ (Winkelsummensatz)
$(\delta + \varepsilon) + (\varepsilon + \delta) = 180°$
$\varepsilon + \delta = 90°$ w.z.b.w.

Der Widerspruchsbeweis

In der Umgangssprache begründet man seine Meinung oft mittels Kontraposition. Max hat in Geschichte eine 6 geschrieben und der Vater schimpft: »Du hast nichts gelernt! Wenn du nämlich gelernt hättest, dann hättest du keine 6 geschrieben.«
Setzen wir für »Max schreibt eine 6« kurz S und für »Max lernt« kurz L, dann begründet der Vater

seinen Satz $S \Rightarrow \bar{L}$
mit der Kontraposition $L \Rightarrow \bar{S}$, die er für richtig hält.

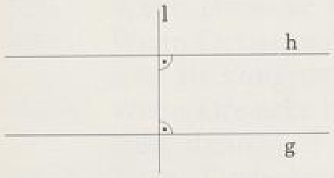
Dabei haben wir stillschweigend den Satz verwendet, dass die doppelte Verneinung eine Bejahung ist: $\bar{\bar{L}} = L$.
In der Mathematik nennt man dieses Verfahren Widerspruchsbeweis, sein Schema ist:

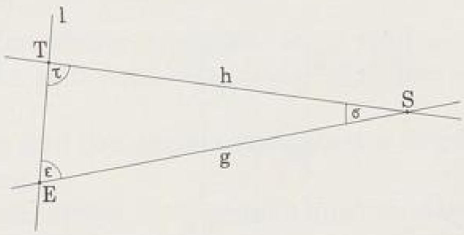
Zu beweisen ist die Behauptung	$A \Rightarrow B$
stattdessen beweist man die gleichwertige Kontraposition	$\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$

Zwei Beispiele aus der Geometrie:

Satz:
Wenn zwei Geraden einer Ebene ein gemeinsames Lot haben, dann sind sie parallel.

Kontraposition: Wenn sich zwei Geraden einer Ebene schneiden, dann haben sie kein gemeinsames Lot.





Vor.: $l \perp g$ und $l \perp h$ **(A)**
Beh.: $g \parallel h$ **(B)**
Bew.: *Annahme:* g und h schneiden sich in S **($\bar{B}$)**
also gilt: $\varepsilon + \tau + \sigma = 180°$ (Winkelsumme im Dreieck EST)
$\varepsilon + \tau < 180°$ $(\sigma > 0°)$
Es ist also unmöglich, dass $\varepsilon = 90°$ und zugleich $\tau = 90°$ ist. **($\bar{A}$)**
Damit haben wir die Aussage $\bar{A}$ aus $\bar{B}$ gefolgert: $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$, was gleichwertig ist mit dem Satz $A \Rightarrow B$.

Satz:
In jedem Viereck ist mindestens ein Winkel größer oder gleich 90°.

Vor.: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind Winkel eines Vierecks,
das heißt $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$ **(A)**
Beh.: Mindestens ein Winkel ist größer oder gleich 90°. **(B)**
Bew.: Annahme: Jeder Winkel ist kleiner als 90°, das heißt

$$\begin{array}{r} \alpha < 90° \\ \wedge\ \beta < 90° \\ \wedge\ \gamma < 90° \\ \wedge\ \delta < 90° \\ \hline \alpha + \beta + \gamma + \delta < 360° \end{array} \qquad (\bar{B})$$

Also ist die Winkelsumme nicht gleich 360° und damit können α, β, γ und δ nicht Winkel eines Vierecks sein. q.e.d.

Der Symmetriebeweis

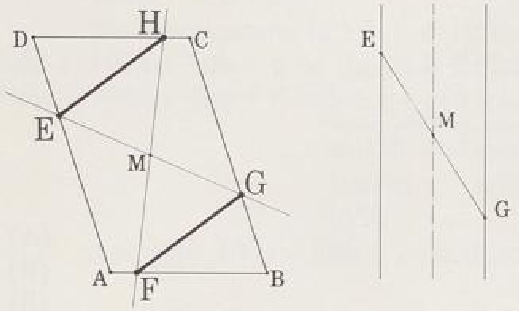
Entdeckt man in einer Figur ein Symmetriezentrum oder eine Symmetrieachse, so wird man beim Beweisen die Symmetrie-Eigenschaften ausnützen.

Beispiel zur Punktsymmetrie

Satz:

Zwei Geraden durch den Mittelpunkt eines Parallelogramms schneiden das Parallelogramm so in vier Punkten, dass je zwei gegenüberliegende Verbindungsstrecken gleich lang sind.

Überlegungsfigur



Vor.: ABCD ist ein Parallelogramm (V1)
M ist Diagonalenschnittpunkt (V2)
M liegt auf HF (V3)
M liegt auf EG (V4)

Beh.: $\overline{EH} = \overline{GF}$ und $\overline{EF} = \overline{GH}$

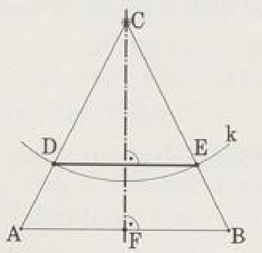
Bew.: M liegt auf der Mittelparallele von DC und AB (V1 und V2) [EG] ist Querstrecke von AD und BC durch M (V4)
und wird damit von M halbiert.
Entsprechend gilt: $\overline{HM} = \overline{MF}$.
Also liegen E und G bzw. H und F symmetrisch bezüglich M. Deshalb sind die Strecken [EH] und [GF] zueinander punktsymmetrisch und gleich lang.
Dasselbe gilt für [EF] und [GH].

Beispiel zur Achsensymmetrie

Satz:

Schneidet ein Kreis um die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks die Schenkel in zwei Punkten, dann ist ihre Verbindungsstrecke parallel zur Basis.

Überlegungsfigur



Vor.: $\overline{AC} = \overline{BC}$ (V1)
$\overline{DC} = \overline{EC}$ (V2)

Beh.: $DE \parallel AB$

Bew.: CF ist Symmetrieachse des Dreiecks ABC und des Kreises k, folglich liegen die Schnittpunkte D und E symmetrisch zur Achse CF.
Weil die Verbindungslinie zueinander symmetrischer Punkte senkrecht auf der Achse steht, ist CF gemeinsames Lot von DE und AB.
Also sind DE und AB parallel.

Der Kongruenzbeweis

In vielen Aufgaben muss man zeigen, dass zwei Strecken gleich lang oder zwei Winkel gleich groß sind. Hier bewährt sich der Kongruenzbeweis. Man sucht sich zwei Dreiecke, die dem Augenschein nach kongruent sind und die fraglichen Stücke enthalten. Mit den Kongruenzsätzen begründet man die Kongruenz der Dreiecke und damit auch die Kongruenz der Strecken und Winkel. Als Werkzeug sind die Kongruenzsätze unerlässlich, wir wiederholen sie deshalb:

SSS: Wenn Dreiecke in allen Seiten übereinstimmen, dann sind sie kongruent.

SWS: Wenn Dreiecke in zwei Seiten und dem Zwischenwinkel übereinstimmen, dann sind sie kongruent.

WSW: Wenn Dreiecke in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen, dann sind sie kongruent.

SWW: Wenn Dreiecke in einer Seite, einem anliegenden und dem nicht anliegenden Winkel übereinstimmen, dann sind sie kongruent.

SsW: Wenn Dreiecke in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite übereinstimmen, dann sind sie kongruent.

Schema für den Kongruenzbeweis

Überlegungsfigur zeichnen (eventuell mit Hilfslinien, wesentliche Stücke hervorheben)

Vor.: ..... (V1)
..... (V2) usw.

Beh.: ... = ...

Bew.: ... = ... (V1 ...)
... = ... (V1, V3 ...) usw.

$\Rightarrow$ $\triangle ... \cong \triangle ...$ (Kongruenzsatz)

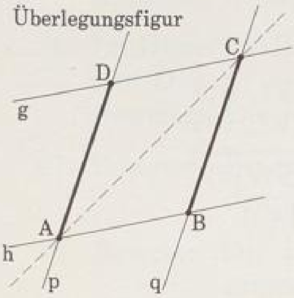
$\Rightarrow$ ... = ... q.e.d.

1. Beispiel

Satz:
Ein Parallelenpaar schneidet aus einem anderen Parallelenpaar gleich lange Strecken aus.

Überlegung: Zu zeigen ist $\overline{AD} = \overline{BC}$.
Durch die Hilfslinie AC entstehen die Dreiecke ABC und CDA, sie sind anscheinend kongruent und haben die fraglichen Strecken als Seiten.

Überlegungsfigur



Vor.: $g \parallel h$ (V1)
$p \parallel q$ (V2)

Beh.: $\overline{AD} = \overline{BC}$

Bew.: $\overline{AC} = \overline{AC}$ (beiden Dreiecken gemeinsam)
$\sphericalangle BAC = \sphericalangle DCA$ (Z-Winkel, V1)
$\sphericalangle CAD = ACB$ (Z-Winkel, V2)

$\Rightarrow$ $\triangle AVC \cong \triangle CDA$ (WSW)

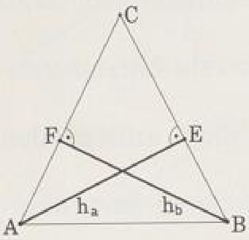
also $\overline{AD} = \overline{BC}$ q.e.d.

2. Beispiel

Satz:
In einem gleichschenkligen Dreieck sind zwei Höhen gleich lang.

Überlegung: Es können nur die Höhen h_a und h_b gemeint sein, weil h_c offenbar länger als h_a und h_b ist. Die Dreiecke AEC und BCF sind anscheinend kongruent und enthalten die beiden Höhen.

Überlegungsfigur



Vor.: $\overline{AC} = \overline{BC}$ (V1)
$h_b \perp AC$ (V2)
$h_a \perp BC$ (V3)

Beh.: $\overline{h_a} = \overline{h_b}$

Bew.: $\overline{AC} = \overline{BC}$ (V1)
$\sphericalangle ACE = \sphericalangle FCB = \gamma$
$\sphericalangle BFC = \sphericalangle CEA = 90°$ (V2, V3)

$\Rightarrow \triangle AEC \cong \sphericalangle BCF$ (SWW)
$\Rightarrow h_a = h_b$ w.z.b.w.

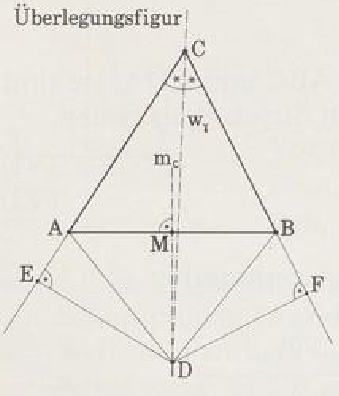
Man kann freilich auch andere Dreiecke für einen Beweis dieses Satzes wählen, zum Beispiel die Dreiecke ABF und ABE:

Vor.: wie oben
Beh.: wie oben
Bew.: $\overline{AB} = \overline{AB}$
$\sphericalangle BAF = \sphericalangle EBA$ (V1, Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck)
$\sphericalangle AFB = \sphericalangle AEB = 90°$ (V2, V3)

$\Rightarrow \triangle ABF \cong \triangle ABE$ (SWW)
$\Rightarrow h_a = h_b$ w.z.b.w.

Zum Abschluss wartet Geobold mit einer Sensation auf.
Er beweist den Satz:
Überlegung: M ist die Mitte von [AB], D ist der Schnittpunkt von w_γ und m_c. D ist von A und B gleich weit entfernt, weil die Dreiecke ADM und BMD kongruent sind (SWS), für Geobold ist das V4.

Überlegungsfigur



Vor.: D ist Schnittpunkt von w_γ und m_c (V1)
$DE \perp CA$ (V2)
$DF \perp CB$ (V3)
$\overline{DA} = \overline{DB}$ (V4)

Beh. 1: $\overline{CE} = \overline{CF}$

Bew. 1: $\overline{CD} = \overline{CD}$
$\sphericalangle ECD = \sphericalangle DCF$ (V1, w_γ)
$\sphericalangle DEC = \sphericalangle CFD = 90°$ (V2, V3)

$\Rightarrow \triangle EDC \cong \triangle DFC$ (SWW)
$\Rightarrow \overline{CE} = \overline{CF}$ q.e.d.

außerdem folgt: $\overline{DE} = \overline{DF}$, das ist V5 für

Beh. 2.: $\overline{AE} = \overline{BF}$

Bew. 2: $\overline{DE} = \overline{DF}$ (V5)

$\overline{DA} = \overline{DB}$ (V4)

$\sphericalangle DEA = \sphericalangle BFD = 90°$ (V2, V3)

$\Rightarrow \triangle AED \cong \triangle BDF$ (SsW)

$\Rightarrow \overline{AE} = \overline{BF}$ q.e.d.

Nach Beweis 1 gilt $\overline{CE} = \overline{CF}$, nach Beweis 2 gilt $\overline{AE} = \overline{BF}$, also ist $\overline{CE} - \overline{AE} = \overline{CF} - \overline{BF}$. Das bedeutet aber, wie ein Blick auf die Überlegungsfigur zeigt: $\overline{CA} = \overline{CB}$, das heißt, jedes Dreieck ist gleichschenklig.

Geobolds »Beweis« beweist nur eines: Schlampig gezeichnete Überlegungsfiguren können zu Trugschlüssen führen. Zeichne eine genaue Überlegungsfigur und du wirst Geobold auf die Schliche kommen. Er hat nur einen Fehler gemacht – mit Absicht!

Aufgaben

Beweise durch Nachrechnen

1. Zeichne ein spitzwinkliges Dreieck. Die Winkelhalbierende W_α bildet mit der Seite a die Winkel ϱ und σ.
Beweise: Der Größenunterschied von ϱ und σ ist gleich dem Größenunterschied von γ und β.

2. Die Ecken des Vierecks MOPS liegen so auf einem Kreis, dass [MO] Kreisdurchmesser ist.
Beweise: Die Winkel PMS und POS sind gleich groß.

3. Die Ecken des Vierecks VIER liegen auf einem Kreis.
Beweise: Je zwei gegenüberliegende Winkel ergeben zusammen 180°. (*Tip:* Verbinde alle Ecken mit dem Kreismittelpunkt.)

4. Zeichne ein Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$. H_c ist der Höhenfußpunkt auf c. Die Halbierende des Winkels H_cCB schneidet c in D.
Beweise: Das Dreieck ADC ist gleichschenklig. (*Tip:* Winkel!)

5. Zeichne ein Quadrat ABCD. Verlängere [AB] über B hinaus bis E mit $\overline{AE} = 3\overline{AB}$. Verlängere [AD] über D hinaus bis F mit $\overline{AF} = 5\overline{AD}$.
Beweise: Die Fläche des Dreiecks AEF ist 7,5mal so groß wie die Quadratfläche.

6. Im Dreieck ABC ist γ doppelt so groß wie β. Die Winkelhalbierende w_γ schneidet c in D.
Beweise: Die Parallele zu a durch D halbiert den Winkel ADC.

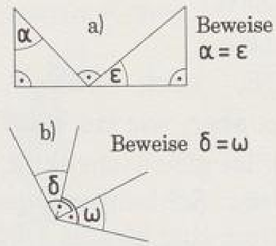
•7. Beweise: Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn die aus den beiden Endziffern gebildete Zahl durch 4 teilbar ist.

•8. Beweise: Die Differenz zweier aufeinander folgender Quadrate ist immer eine ungerade Zahl.

:9. Beweise: Die Differenz zweier aufeinander folgender Kubikzahlen ist immer eine ungerade Zahl.

10. Beweise: Das Quadrat einer ungeraden Zahl ist immer um 1 größer als ein Vielfaches von 8.

11. GLEICHEWINKEL



Beweise durch Widerspruch

12. Wenn ein Winkel im Dreieck 120° misst, dann ist das Dreieck nicht rechtwinklig.

13. Wenn die drei Winkel eines Dreiecks verschieden groß sind, dann ist das Dreieck nicht gleichschenklig.

14. Wenn im Viereck ABCD $\alpha = 83°$ und $\beta = 96°$ ist, dann ist ABCD kein Parallelogramm.

•15. Wenn man ein Dreieck in zwei Teildreiecke zerlegt, dann sind nicht beide Teildreiecke spitzwinklig.

•16. Das Lot von einem Punkt auf eine Gerade ist die kürzeste Verbindung von Punkt und Gerade.

•17. Ein Viereck mit verschieden langen Diagonalen ist kein Rechteck.

18. Ein Viereck mit mindestens drei verschieden großen Winkeln ist kein Parallelogramm.

:19. Wenn die letzte Ziffer einer Zahl 2, 3, 7 oder 8 ist, dann ist es keine Quadratzahl.

Beweise durch Symmetrie

20. Das Lot vom Mittelpunkt eines Kreises auf eine Sehne halbiert diese.

21. Ein Dreieck ist gleichschenklig, wenn:
a) $h_a = w_\alpha$ **b)** $h_c = s_c$ **c)** $h_b = m_b$.

22. Die Winkelhalbierenden der Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks treffen sich auf der Symmetrieachse.

23. Zeichne ein Dreieck ABC mit $b > c$. Verlängere [AB] über A hinaus um b bis D. w ist die Winkelhalbierende durch A im Dreieck DAC, sie schneidet BC in E. Zeige: Das Dreieck DEC ist gleichschenklig.

24. Im Dreieck ABC liegt der Mittelpunkt von c auf w_γ.
Zeige: $w_\gamma = h_c$.

•**25.** Die Strecken [AB] und [CD] halbieren sich in M. Eine beliebige Gerade g durch M schneidet AD in X und BC in Y.
Beweise mit Hilfe der Punktsymmetrie:
Die Dreiecke MCY und MDX sind kongruent.

26. Zeichne ein Parallelogramm ABCD und fälle von A und C die Lote [AE] und [CF] auf BD.
Zeige: $\overline{ED} = \overline{FB}$.

Beweise durch Kongruenz

27. In einem gleichschenkligen Dreieck sind
a) zwei Seitenhalbierende gleich lang
b) zwei Winkelhalbierende gleich lang
c) die Lote von der Basismitte auf die Schenkel gleich lang.

28. Formuliere und beweise vom Satz in Aufgabe **27. c)** den Kehrsatz.

29. Verlängert man die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks beiderseits um gleich lange Strecken und verbindet man die Endpunkte mit der Spitze, so ergibt sich wieder ein gleichschenkliges Dreieck.

30. Verbindet man die Seitenmitten eines gleichschenkligen Dreiecks, so entsteht wieder ein gleichschenkliges Dreieck.

•**31.** Zeichne ein Dreieck ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$. Verlängere beide Schenkel über die Basisecken A und B hinaus gleich weit. Die Endpunkte sind D und E.
Beweise: **a)** $\overline{AE} = \overline{BD}$
b) DEBA ist ein Trapez.

•**32.** Trägt man bei einem gleichseitigen Dreieck auf allen drei Seiten im selben Umlaufsinn von den Ecken aus eine gleich lange Strecke ab, so ergeben die Endpunkte der drei Strecken wieder ein gleichseitiges Dreieck.

33. Zeichnet man durch die Ecken eines Dreiecks die Parallelen zur Gegenseite, so entsteht ein neues Dreieck, das aus vier kongruenten Teildreiecken besteht.

34. Ein Dreieck ist gleichschenklig, falls
a) eine Winkelhalbierende zugleich auch Höhe ist
b) eine Höhe zugleich auch Seitenhalbierende ist.

35. Die Schenkel eines Winkels schneiden auf jedem Lot der Winkelhalbierenden eine Strecke aus, deren Mittelpunkt auf den Winkelhalbierenden liegt.

36. Jedes Lot der Halbierenden eines Winkels schneidet auf den Schenkeln gleich lange Strecken ab.

37. Die Lote von einem Punkt der Winkelhalbierenden auf die beiden Schenkel sind gleich lang.

38. Fälle von zwei Ecken eines Dreiecks die Lote auf die Seitenhalbierende, die durch die dritte Ecke geht. Zeige, dass die Lote gleich lang sind.

39. In einem gleichschenkligen Trapez ABCD schneiden sich die Diagonalen in E. Gib drei Paare kongruenter Dreiecke an und beweise jeweils die Kongruenz.

40. Zeichne einen Kreis k um M und einen Punkt A außerhalb von k. Der Thaleskreis über [MA] schneidet k in B und C.
Beweise: $\overline{AB} = \overline{AC}$.

•41. Zeichne ein Quadrat ABCD und trage von den Ecken aus auf seinen Seiten im selben Umlaufsinn Strecken gleicher Länge ab.
Beweise: Die vier so entstehenden Punkte bilden wieder ein Quadrat.

:42. In einem Quadrat ABCD liege P irgendwo auf [CD]. E sei der Endpunkt der Verlängerung von [CB] über B hinaus um $\overline{PD}$. W liege so auf [BC], dass AW den Winkel BAP halbiert.
a) Zeichne das Ganze für $\overline{AB} = 6$.
b) Zeige: $\sphericalangle PAE = 90°$
c) Zeige: $\overline{AE} = \overline{EW}$
d) Zeige: $\overline{AP} = \overline{PD} + \overline{BW}$.

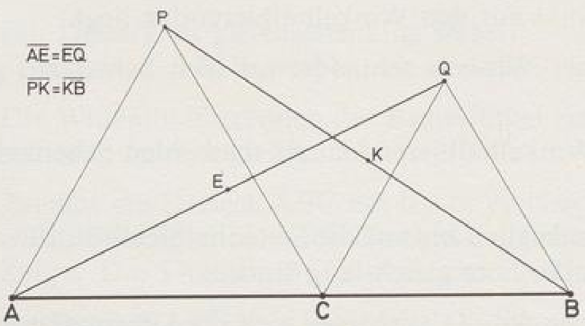
:43. Zeichne ein Parallelogramm ABCD und durch A eine Gerade g, die das Parallelogramm nicht noch einmal schneidet. Fälle von B, C und D die Lote auf g.
Beweise: Das längste Lot ist so lang wie die beiden andern zusammen.

:44. Zeichne ein Dreieck ABC und errichte nach außen über den Seiten a und b die gleichseitigen Dreiecke BDC und ACE.
Beweise: **a)** $\overline{AD} = \overline{BE}$
b) $\sphericalangle(AD, BE) = 60°$.

⋮45. Zeichne ein Parallelogramm und errichte Quadrate über allen Seiten nach außen.
Beweise: Die Mittelpunkte der Quadrate bilden wieder ein Quadrat.

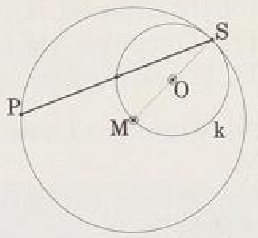
:46. Fälle in einem Dreieck ABC die Lote von B und C auf die Winkelhalbierende w_α, die Lotfußpunkte sind B′ und C′.
Beweise: B′ und C′ sind vom Mittelpunkt M der Seite [BC] gleich weit entfernt.
Das Lot von c durch C′ schneidet das Lot von b durch B′ in D.
Beweise: $\overline{DB'} = \overline{DC'}$.

⋮47. DREIZACK
C liegt auf [AB]. ACP und CBQ sind gleichseitige Dreiecke.
a) Beweise: $\overline{AQ} = \overline{BP}$ (*Tip:* AP und BQ schneiden sich!)
b) Beweise: AP und BQ schneiden sich unter 60°.
c) Beweise: ECK ist ein gleichseitiges Dreieck.



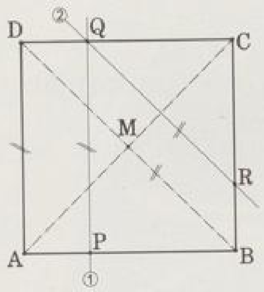
Beweise durch ... Nachdenken

48. SEHNENHALBIERUNG
Beweise: k halbiert die Sehne [PS].



⁚49. In einem Parallelogramm ABCD ist $\beta = 120°$, w_α geht durch den Mittelpunkt M_b der Seite b.
Beweise: **a)** a ist halb so lang wie b.
b) $\overline{AM_b}$ ist doppelt so groß wie der Abstand von B und Seite d.
c) [DB] ist eine Höhe des Parallelogramms.

50. WINKEL ABCD ist ein Quadrat. Beweise: $\sphericalangle PMR = 90°$.



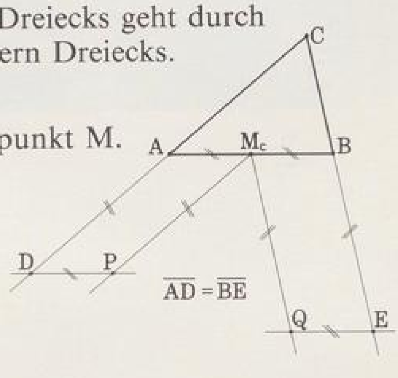
•51 Zeichne ein Trapez, in dem die kürzere Basis genauso lang ist wie die Schenkel zusammen.
Beweise: Es gibt zwei Winkelhalbierende, die sich auf der kleineren Basis schneiden.

•52. In jedem Trapez gibt es zwei Paare zueinander senkrechter Winkelhalbierenden.

53. Zeichne ein Trapez ABCD mit den Grundseiten a und c, in dem $\alpha = 90°$ und $d = a + c$ gilt. M ist der Mittelpunkt von b und der Punkt E liegt so auf der Seite d, dass $\overline{AE} = c$ ist.
Beweise: **a)** $EM \perp BC$ **b)** $\overline{EM} = \overline{MC}$.

•54. Zeichne ein Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$ und die Winkelhalbierende von γ^* (Außenwinkel!). Das Dreieck A′B′C′ ist symmetrisch zu ABC bezüglich dieser Winkelhalbierenden.
Beweise: Die Höhe auf der Hypotenuse des einen Dreiecks geht durch den Mittelpunkt der Hypotenuse des andern Dreiecks.

•55. PARALLANG
Beweise: **a)** [DE und [PQ] haben denselben Mittelpunkt M.
b) MM_c halbiert den Winkel PM_cQ.



PARALLANG

•**56.** Zeichne ein Dreieck ABC mit $\gamma = 90°$.
Spiegle den Höhenfußpunkt H_c an a (Spiegelpunkt E) und an b (Spiegelpunkt D).
Beweise: **a)** Die Dreiecke AH_cD und H_cEC stimmen in den Winkeln überein.
b) D, E und H_c liegen auf einem Kreis. (Mittelpunkt? Radius?)

:**57.** Zeichne ein spitzwinkliges Dreieck ABC, die Höhenfußpunkte H_a und H_b und den Mittelpunkt M_c.
Beweise: **a)** H_a, H_b und M_c bilden ein gleichschenkliges Dreieck.
b) $\sphericalangle H_aM_cH_b + 2\gamma = 180°$.

⁝**58.** Zeichne ein Dreieck ABC und einen Punkt P im Innern des Dreiecks. Spiegle P an den Seitenmitten und verbinde die Spiegelpunkte so mit A, B und C, dass ein Sechseck entsteht.
Beweise: Das Sechseck ist punktsymmetrisch.

:**59.** Zeichne ein Rechteck ABCD und einen Punkt P im Innern. Spiegle P an den Seiten und verbinde die Spiegelbilder zu einem Viereck.
Beweise: A, B, C und D sind die Seitenmitten des Vierecks.

⁝**60.** Zeichne ein Dreieck ABC und Quadrate über den Seiten (nach außen): über [BC] das Quadrat BLOC und über [AC] das Quadrat ACHT.
Beweise: $OH \perp CM_c$ und $\overline{OH} = 2\overline{CM_c}$
Zeichne die Ecke U des Parallelogramms COUH.
Beweise: **a)** $CU \perp AB$
b) $AL \perp BU$ und $\overline{AL} = \overline{BU}$
c) $AU \perp BT$ und $\overline{AU} = \overline{BT}$.