Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 2000

2.1. Der Aufbau des mathemaischen Lehrsatzes

urn:nbn:de:hbz:466:1-83477

2.1 Der Aufbau eines mathematischen Lehrsatzes

Lehrsätze (kurz »Sätze«) kennen wir schon viele, zum Beispiel:
- Im Dreieck sind zwei Seiten zusammen immer länger als die dritte Seite.
- Dreiecke sind kongruent, wenn sie in allen Seiten übereinstimmen.
- Jedes Parallelogramm ist ein punktsymmetrisches Viereck.
- Ein Dreieck, dessen Ecken so auf einem Kreis liegen, dass eine Seite Kreisdurchmesser ist, hat einen rechten Winkel.

In der Mathematik gehört es zum guten Ton, dass man zu jeder Behauptung auch die Bedingungen nennt, unter denen sie gilt. Deshalb besteht jeder mathematische Satz gewöhnlich aus zwei Teilen:

1. Die Bedingungen, die man zu Grunde legt.
   Man nennt sie **Voraussetzung** des Satzes.
2. Die Folgerung, die man aus der Voraussetzung zieht.
   Sie heißt **Behauptung** des Satzes.

Oft erkennen wir Voraussetzung und Behauptung nicht auf Anhieb. Der Deutlichkeit halber zerlegen wir die vier Beispielsätze in Voraussetzung und Behauptung:

Satz	Voraussetzung	Behauptung
Im Dreieck sind zwei Seiten zusammen immer länger als die dritte.	Drei Strecken bilden die Seiten eines Dreiecks.	Zwei Seiten zusammen sind länger als die dritte.
Dreiecke sind kongruent, wenn sie in allen Seiten übereinstimmen.	Dreiecke stimmen in allen Seiten überein.	Die Dreiecke sind kongruent.
Jedes Parallelogramm ist ein punktsymmetrisches Viereck.	Ein Viereck ist ein Parallelogramm.	Das Viereck ist punktsymmetrisch.
Ein Dreieck, dessen Ecken so auf einem Kreis liegen, dass eine Seite Kreisdurchmesser ist, hat einen rechten Winkel.	Die Ecken eines Dreiecks liegen so auf einem Kreis, dass eine Seite Kreisdurchmesser ist.	Das Dreieck ist rechtwinklig.

Um Voraussetzung und Behauptung besser zu trennen formuliert man mathematische Sätze häufig in der **Wenn-Dann-Form.** Die Beispielsätze wirken dann zwar etwas schwerfällig, dafür sind sie aber auch klarer:

- **Wenn** drei Strecken die Seiten eines Dreiecks bilden,
  dann sind je zwei zusammen länger als die dritte.
- **Wenn** Dreiecke in allen Seiten übereinstimmen,
  dann sind sie kongruent.
- **Wenn** ein Viereck ein Parallelogramm ist,
  dann ist es punktsymmetrisch.
- **Wenn** die Ecken eines Dreiecks so auf einem Kreis liegen, dass eine Seite Kreisdurchmesser ist,
  dann ist das Dreieck rechtwinklig.

Schreiben wir für die Voraussetzung ein A und ein B für die Behauptung, dann lautet das Schema für einen mathematischen Satz:

Wenn A, dann B

Manchmal sagt man auch **Aus A folgt B** oder noch kürzer

A also B

und schreibt dafür symbolisch $\boxed{A \Rightarrow B}$

Auch im Alltag verwenden wir solche Sätze, allerdings sind Voraussetzung und Behauptung manchmal sehr versteckt.

Satz, wie wir ihn sagen	*Satz in der Wenn-Dann-Form*
Alle Menschen sind sterblich	Wenn du ein Mensch bist, dann bist du sterblich.
Eisen rostet.	Wenn ein Gegenstand aus Eisen ist, dann rostet er.
Bei Rot anhalten!	Wenn die Ampel auf Rot steht, dann musst du anhalten.
Weihnachtsgans nur auf Vorbestellung	Wenn man nicht vorbestellt, dann bekommt man keine Weihnachtsgans.
Vampire haben kein Spiegelbild.	Wenn ein Wesen ein Vampir ist, dann hat es kein Spiegelbild.

Jeder Satz, der eine Voraussetzung und eine Behauptung enthält, lässt sich auch anders ausdrücken: Man vertauscht Voraussetzung und Behauptung und verneint die beiden:

Voraussetzung		**Behauptung**
Du bist ein Mensch.	$\Rightarrow$	Du bist sterblich.
	Verneinung	
Du bist nicht sterblich.	$\Rightarrow$	Du bist kein Mensch.

in der Wenn-Dann-Fassung

Wenn du ein Mensch bist,		dann bist du sterblich.
	Verneinung	
Wenn du nicht sterblich bist,		dann bist du kein Mensch.

ein anderes Beispiel

Wenn ein Wesen ein Vampir ist,		dann hat es kein Spiegelbild.
	Verneinung	
Wenn ein Wesen ein Spiegelbild hat,		dann ist es kein Vampir.

Damit haben wir ein allgemeines Gesetz kennen gelernt. In Kurzform lautet es:

A also B		nicht B also nicht A
$\boxed{\mathbf{A \Rightarrow B}}$	**ist gleichwertig mit**	$\boxed{\mathbf{\overline{B} \Rightarrow \overline{A}}}$
wenn A, dann B		wenn B nicht, dann A nicht

Mit $\overline{B}$ (sprich »B quer«) meint man die Verneinung der Aussage B. Der Satz $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ heißt **Kontraposition** des Satzes $A \Rightarrow B$. Dazu noch ein Beispiel:

Satz:

Wenn Dreiecke in allen Seiten übereinstimmen,	dann sind sie kongruent.

Verneinung

Kontraposition:

Wenn Dreiecke nicht kongruent sind,	dann stimmen sie nicht in allen Seiten überein.

Haben Voraussetzung oder Behauptung mehrere Bestandteile, so ist die Kontraposition verzwickter, weil man beim Verneinen einer zusammengesetzten Aussage sehr aufpassen muss. Beispiel:

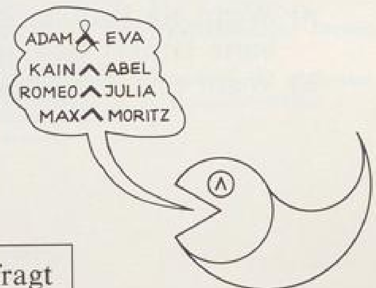
Satz
Wenn ich nicht gelernt habe und ausgefragt werde, dann bekomme ich eine schlechte Note.

Kontraposition
Wenn ich keine schlechte Note bekommen habe, dann habe ich gelernt oder bin nicht ausgefragt worden.

Um diese beiden Sätze in Kurzform zu schreiben brauchen wir zwei neue Symbole. Für »und« schreiben wir »$\wedge$«, für »oder« schreiben wir »$\vee$«. Das Ganze sieht dann so aus:

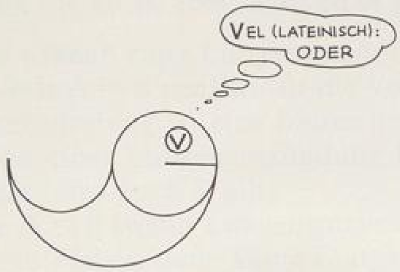
Satz:

nicht gelernt	und	ausgefragt	$\Rightarrow$	schlechte Note
N	$\wedge$	**A**	$\Rightarrow$	**S**



Kontraposition:

keine schlechte Note	$\Rightarrow$	gelernt	oder	nicht ausgefragt
$\overline{\mathbf{S}}$	$\Rightarrow$	$\overline{\mathbf{N}}$	$\vee$	$\overline{\mathbf{A}}$



Aufgaben

1. Gib Voraussetzung, Behauptung und Wenn-Dann-Form der folgenden Sätze an:
   a) Jede Zahl mit der Quersumme 6 ist durch 3 teilbar.
   b) Im Parallelogramm sind zwei Winkel gleich groß.
   c) Ein Viereck mit drei rechten Winkeln ist ein Rechteck.
   d) Nebenwinkel ergänzen sich zu 180°.

•2. Gib Voraussetzung, Behauptung und Wenn-Dann-Form der folgenden Sätze an:
   a) Bei Gefahr Notbremse ziehen.
   b) Vorsicht! Bissiger Hund.
   c) Kein Geist wirft einen Schatten.
   d) Kängurus brauchen keine Handtaschen.

3. Bilde die Kontraposition von:
   a) Wenn ein Dreieck gleichschenklig ist, dann hat es zwei gleich große Winkel.
   b) Wenn 2 die letzte Ziffer einer Zahl ist, dann ist es keine Quadratzahl.
   c) Wenn zwei Geraden ein gemeinsames Lot haben, dann sind sie parallel.
   d) Wenn eine Zahl genau zwei Teiler hat, dann ist sie eine Primzahl.

•4. Bilde die Kontraposition von:
   a) Wenn die Sonne scheint, dann ist es hell.
   b) Wenn du nicht sorgfältig zeichnest, dann wird die Konstruktion ungenau.
   c) Wenn du mindestens 3 Richtige hast, dann gewinnst du im Lotto.
   d) Wenn du höchstens drei Fehler im Diktat hast, dann kriegst du mindestens eine 2.

:5. Bilde die Kontraposition von:
   a) Wenn ein Viereck vier gleich große Winkel und vier gleich lange Seiten hat, dann ist es ein Quadrat.
   b) Wenn eine Zahl durch 4 und durch 6 teilbar ist, dann ist sie durch 12 teilbar.

:6. Bilde die Kontraposition von:
   a) Wenn ein Parallelogramm einen Umkreis hat oder zwei gleich große benachbarte Winkel, dann ist es ein Rechteck.
   b) Wenn eine Zahl durch 111 oder 74 teilbar ist, dann ist sie durch 37 teilbar.