Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

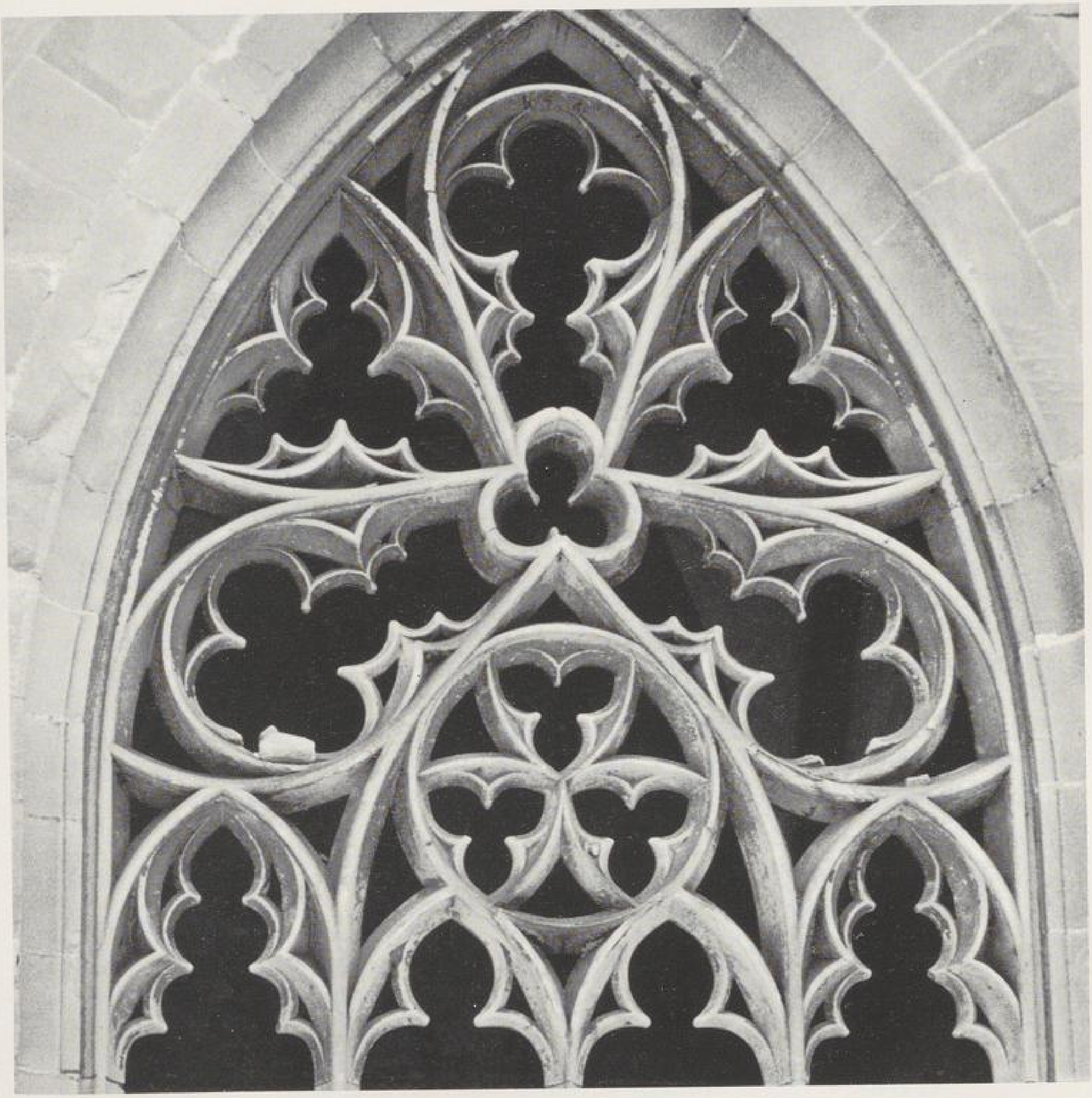
München, 2000

3. Kapitel: Kreise und Geraden

urn:nbn:de:hbz:466:1-83477

3. Kapitel

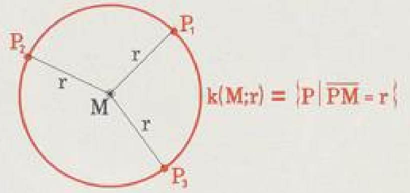
Kreise und Geraden



3.1 Der Kreis als geometrischer Ort

Ein Kreis ist definiert als Menge aller Punkte der Ebene, die von einem bestimmten Punkt M die feste Entfernung r haben. M ist der Mittelpunkt und r der Radius des Kreises. Einen Kreis bezeichnet man kurz mit k (M; r).
Die Definition sagt zweierlei:

1. Jeder Punkt P der Ebene mit $\overline{PM} = r$ liegt auf dem Kreis k (M; r).
2. Jeder Punkt auf dem Kreis k (M; r) erfüllt die Bedingung $\overline{PM} = r$.



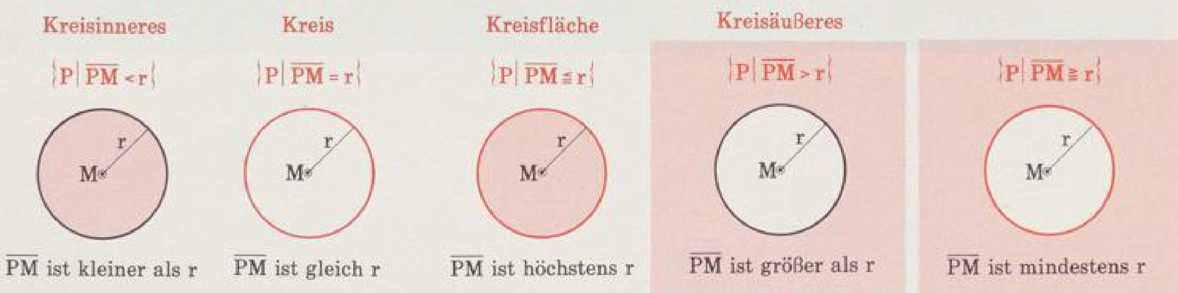
Beide Bedingungen ergeben zusammen in symbolischer Kurzform
$P \in k(M; r) \Leftrightarrow \overline{PM} = r.$
Der Kreis ist ein geometrischer Ort. Allgemein definiert man

Definition

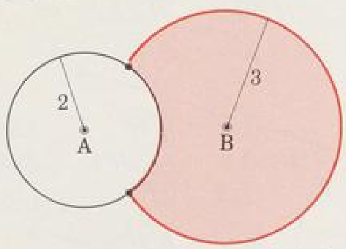
> Die Menge aller Punkte, die eine Bedingung B erfüllen, heißt **geometrischer Ort** zur Bedingung B.

Diese Definition besagt:
Alle Punkte des geometrischen Orts erfüllen die Bedingung B, und umgekehrt:
Alle Punkte, die B erfüllen, gehören zum geometrischen Ort.
Ist der geometrische Ort eine Gerade oder ein Kreis, dann nennen wir ihn auch Ortslinie. Der Kreis k (M; r) ist also die Ortslinie zur Bedingung $\overline{PM} = r$. Ausführlicher: Der Kreis k um M mit dem Radius r ist die Ortslinie der Punkte P, die von M die Entfernung r haben. Symbolisch: $k(M; r) = \{P \mid \overline{PM} = r\}$.
Beachte: Der Kreis ist eine Linie (und nicht etwa eine Fläche)!
Die Kreisfläche ist der geometrische Ort der Punkte P, die von einem bestimmten Punkt M höchstens die Entfernung r haben, kurz: $\{P \mid \overline{PM} \leq r\}$.

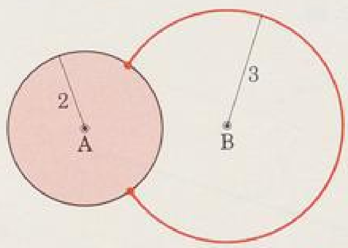
Mit den Wörtern »gleich, größer, mindestens und höchstens« lassen sich fünf kreisförmige geometrische Örter definieren, es sind die rot gezeichneten Figuren.



Kompliziertere Figuren können wir erzeugen, indem wir diese Bedingungen mit »und« oder mit »oder« oder mit beiden kombinieren, dazu zwei Beispiele:
Im Bild links sehen wir die Menge aller Punkte, die von A mehr als 2 und von B höchstens 3 entfernt sind.
Im Bild rechts sehen wir die Menge aller Punkte, die von A weniger als 2 oder von B genau 3 entfernt sind.



$\{P \mid \overline{PA} > 2 \wedge \overline{PB} \leqq 3\} = \{P \mid \overline{PA} > 2\} \cap \{P \mid \overline{PB} \leqq 3\}$

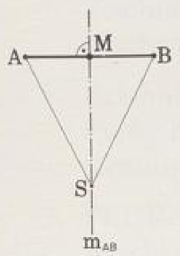


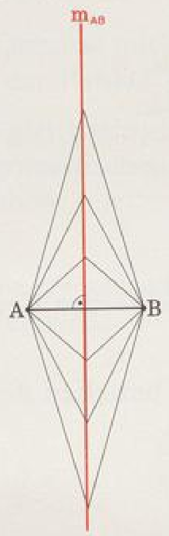
$\{P \mid \overline{PA} < 2 \vee \overline{PB} = 3\} = \{P \mid \overline{PA} < 2\} \cup \{P \mid \overline{PB} = 3\}$

Geraden als geometrische Örter haben wir schon kennen gelernt:

Der geometrische Ort aller Punkte, die von A und B gleich weit entfernt sind, ist die Mittelsenkrechte m_{AB}.

Ausführlicher formuliert heißt das:
1. Jeder Punkt auf m_{AB} ist von A und B gleich weit entfernt und umgekehrt:
2. Jeder Punkt, der von A und B gleich weit entfernt ist, liegt auf m_{AB}.





Beide Behauptungen beweisen wir.

1. Vor.: S liegt auf m_{AB}
   Beh.: $\overline{SA} = \overline{SB}$
   Bew.:

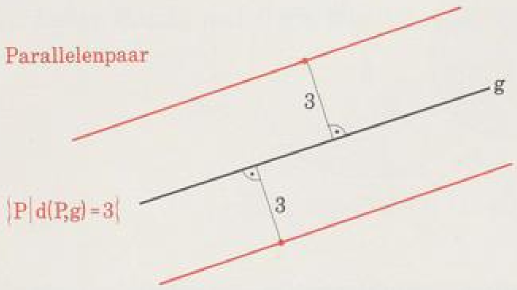
$$\begin{array}{lr} \overline{MA} = \overline{MB} & \text{(V)} \\ \overline{MS} = \overline{MS} & \\ \sphericalangle BMS = \sphericalangle SMA = 90^\circ & \text{(V)} \\ \hline \Rightarrow \triangle BSM \cong \triangle ASM & \text{(SWS)} \\ \Rightarrow \overline{SA} = \overline{SB} & \text{q.e.d.} \end{array}$$

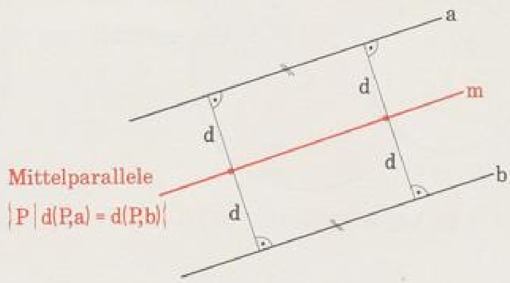
2. Vor.: $\overline{SA} = \overline{SB}$ (V)
   Beh.: S liegt auf m_{AB}.
   Bew.: Nach Voraussetzung ist Dreieck SAB gleichschenklig, S ist die Spitze. Deshalb liegt S auf der Symmetrieachse des Dreiecks SAB, das ist die Mittelsenkrechte m_{AB}. q.e.d.

Der geometrische Ort der Punkte, die von einer Gerade g den Abstand d haben, ist das Parallelenpaar im Abstand d von der Gerade g.

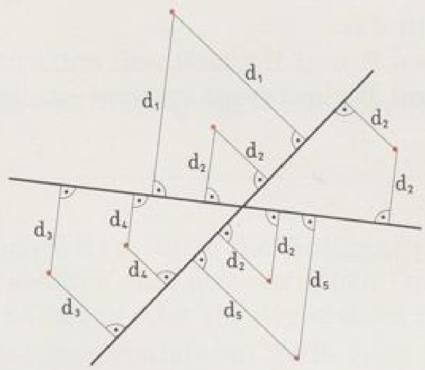
Die Geradenpunkte von g haben selber auch eine gemeinsame Eigenschaft: Ihre Abstände von den beiden Parallelen sind gleich groß.

Der geometrische Ort der Punkte, die von zwei Parallelen denselben Abstand haben, ist die Mittelparallele m.



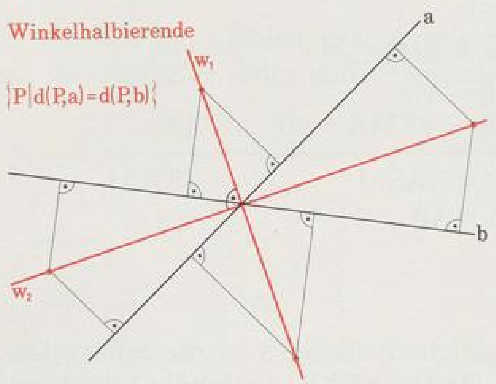


Wenn sich zwei Geraden a und b schneiden, wo liegen dann die Punkte, die von a und b denselben Abstand haben? Ein paar davon sehen wir im Bild.

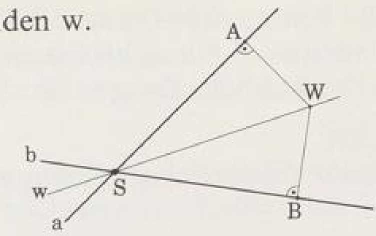


Der geometrische Ort der Punkte, die von zwei sich schneidenden Geraden gleichen Abstand haben, ist das Paar der Winkelhalbierenden.

Jeder dieser drei Sätze enthält zwei Behauptungen. Wir beweisen den letzten Satz.



1. Vor.: W liegt auf einer Winkelhalbierenden w.



Beh.: $\overline{WA} = \overline{WB}$

Bew.: $\overline{SW} = \overline{SW}$

$\sphericalangle A = \sphericalangle B = 90°$

$\sphericalangle WSA = \sphericalangle BSW$ (Vor.)

$\Rightarrow \triangle ASW \cong \triangle BSW$ (SWW)

$\Rightarrow \overline{WA} = \overline{WB}$ q.e.d.

2. Vor.: $\overline{WA} = \overline{WB}$

Beh.: $\sphericalangle WSA = \sphericalangle BSW$

Bew.: $\overline{SW} = \overline{SW}$

$\overline{WA} = \overline{WB}$ (Vor.)

$\sphericalangle A = \sphericalangle B = 90°$

$\Rightarrow \triangle ASW \cong \triangle BSW$ (SsW)

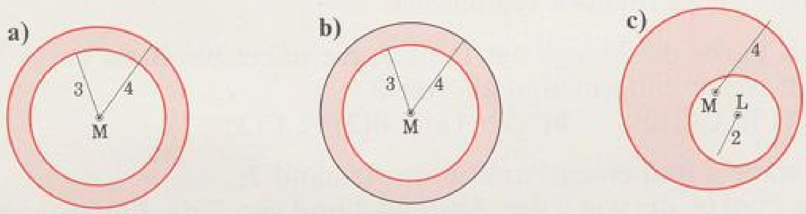
$\Rightarrow \sphericalangle WSA = \sphericalangle BSW$ q.e.d.

Aufgaben

1. Zeichne ein Quadrat mit der Seitenlänge 5 und kennzeichne mit Farbe den geometrischen Ort der Punkte, die von jeder Ecke höchstens die Entfernung 5 haben.

2. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 5 und kennzeichne mit Farbe den geometrischen Ort der Punkte, die von jeder Ecke mindestens die Entfernung 5 haben.

3. PLURAL
Beschreibe die rot gezeichneten Figuren als geometrische Örter in Worten und in Symbol-Schreibweise.

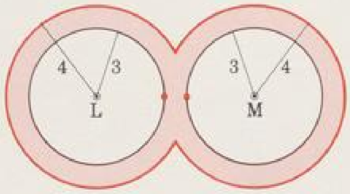


•4. Zeichne die Punkte A(0|0), B(1|0) und C(2|0). Kennzeichne mit Farbe alle Punkte, die von A mehr als 1,5 und von B höchstens 3 und von C mehr als 2,5 entfernt sind.
Beschreibe diese Punktmenge mit Symbolen.

5. Zeichne die Punkte A(0|0), B(3|0) und C(1,5|0).
Kennzeichne mit Farbe folgende Punktmengen:
a) $\{P|\overline{PB} < 1\} \cup [\{P|\overline{PA} < 2{,}5\} \cap \{P|\overline{PC} > 3\}]$
b) $[\{P|\overline{PB} < 1\} \cup \{P\ |\overline{PA} < 2{,}5\}] \cap \{P|\overline{PC} > 3\}$

6. Zeichne die Punkte A(0 | 0) und B(4,5 | 0). Kennzeichne mit Farbe alle Punkte, die von A mindestens 1,5 und höchstens 3 und von B mehr als 4 entfernt sind. Wie lautet die Symbol-Schreibweise für diese Punktmenge?

:7. SINGULAR
Beschreibe die rot gezeichnete Figur als geometrischen Ort in Worten und Symbolen.



8. Was ist der geometrische Ort der Mittelpunkte von Kreisen mit Radius 4, die durch einen gegebenen Punkt A gehen? Zeichne einige dieser Kreise.

•9. Was ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller gleich langen Sehnen in einem Kreis? (Genaue Beschreibung!)

10. Zeichne die Punkte A und B mit $\overline{AB} = 4$.
a) Zeichne vier Kreise, die durch A und B laufen.
b) Zeichne einen Kreis mit Radius 2,5 durch A und B.
c) Wie groß ist der Radius des kleinsten Kreises durch A und B? Zeichne ihn.
d) Was ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise durch A und B?

11. Zeichne eine Strecke a mit der Länge 5.
Was ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Rechtecke mit der Seite a?

12. Zeichne einen Kreis mit Radius 3,5 und eine Sehne s. Was ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller zu s parallelen Sehnen?

13. Zeichne die Punkte A und B mit $\overline{AB} = 6$. Kennzeichne mit Farbe alle Punkte,
a) die näher bei A als bei B liegen
b) deren Entfernung von B höchstens so groß ist wie von A
c) Beschreibe jede dieser Mengen symbolisch.

14. Kennzeichne mit Farbe die Menge der Punkte, die näher bei B als bei A liegen, aber von C nicht weiter entfernt sind als von B.
a) A(−2 | 0), B(1 | 0), C(5 | 0) **b)** A(−1 | 1), B(2 | 1), C(3 | −1)

15. Zeichne eine Gerade g und einen Punkt P im Abstand 2.
Konstruiere alle Punkte, die von g den Abstand 3 und von P die Entfernung 6 haben.

•16. Zeichne eine Gerade g und einen Punkt P im Abstand d.
Konstruiere alle Punkte, die von g den Abstand 3 und von P die Entfernung 4 haben.
Für welche Werte von d gibt es keine, einen, zwei, drei oder vier solcher Punkte?

17. Zeichne zwei Geraden g und h, die sich schneiden.
Konstruiere alle Punkte, die von g den Abstand 3 und von h den Abstand 4 haben.

•**18.** Zeichne eine Gerade g und zwei Punkte P und Q auf derselben Seite von g. Konstruiere alle Punkte, die von g den Abstand 2 haben und von P und Q gleich weit entfernt sind. Bei welcher Lage von P und Q gibt es keine bzw. unendlich viele Lösungen?

⁝**19.** Zeichne eine Strecke [AB] der Länge 5 und konstruiere alle Punkte, für die es mindestens einen Streckenpunkt gibt, der höchstens die Entfernung 2 hat.

⁝**20.** Zeichne ein Dreieck mit den Seiten $a = 6$, $b = 7$ und $c = 9$.
Konstruiere alle Punkte, die vom Dreieck mindestens die Entfernung 1,5 haben.

•**21.** Zeichne die drei Geraden g, h und i so, dass sie sich in drei Punkten schneiden. 15
0 0 15
(Schnittpunkte: (4|4), (11|4), (7|10)). 0
Konstruiere alle Punkte, die von jeder Gerade mindestens den Abstand 1 haben.

22. Zeichne zwei Punkte A und B mit der Entfernung 5.
Bestimme den geometrischen Ort der Punkte C für den Fall, dass das Dreieck ABC die Höhe $h_c = 6$ hat.

23. Zeichne zwei Parallelen im Abstand 2 und bestimme die Ortslinie der Mittelpunkte aller Querstrecken.

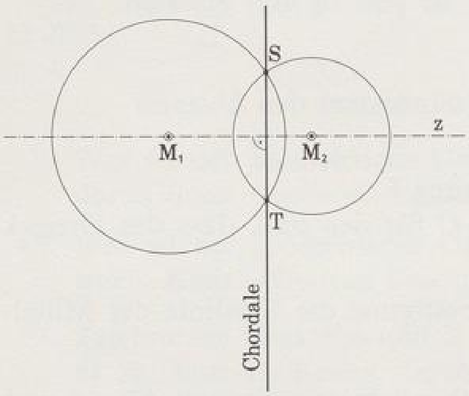
24. Bestimme die Ortslinie der Mittelpunkte von Parallelogrammen mit $\overline{AB} = 6$ und $h_a = 4$.

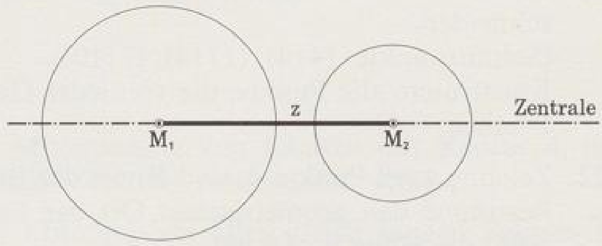
25. g und h schneiden sich in S. Wo liegen alle Punkte, die von g und h gleichen Abstand und von S die Entfernung 2 haben?

26. Zeichne zwei Parallelen im Abstand 4 und eine dritte Gerade, die die Parallelen schneidet.
Konstruiere alle Punkte, die von den drei Geraden denselben Abstand haben.

3.2 Zwei Kreise

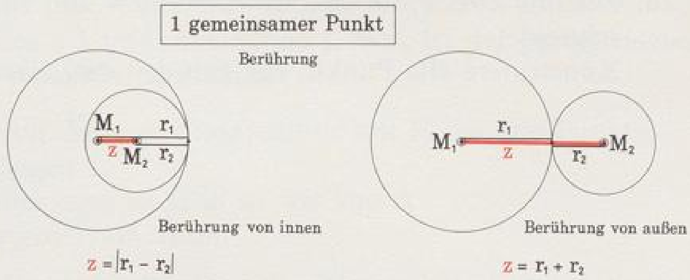
Die Lage zweier Kreise wird von der Entfernung z ihrer Mittelpunkte bestimmt, z heißt auch **Zentrale** der beiden Kreise, und je nach Bedarf meint man damit die Gerade M_1M_2, die Strecke $[M_1M_2]$ oder auch die Länge $\overline{M_1M_2}$. Die Zentrale ist Symmetrieachse der beiden Kreise. Schneiden sich die Kreise in zwei Punkten S und T, dann liegen diese Schnittpunkte symmetrisch bezüglich der Zentrale. Die Verbindungsgerade ST heißt **Chordale** der beiden Kreise. Chordale und Zentrale stehen aufeinander senkrecht (Achsensymmetrie!).





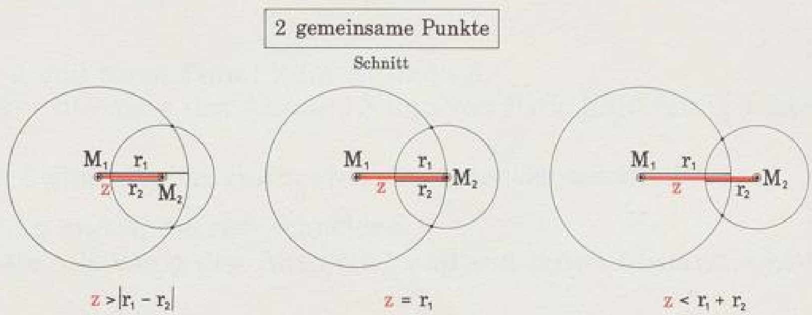
Zwei Kreise haben entweder keinen, einen oder zwei Punkte gemeinsam. Der für uns wichtigste Fall ist der mit einem gemeinsamen Punkt. Wir sagen dann: Die Kreise **berühren** sich. Dabei gibt es zwei Möglichkeiten: Berührung von außen und Berührung von innen.

$z = |r_1 - r_2|$ oder $z = r_1 + r_2$



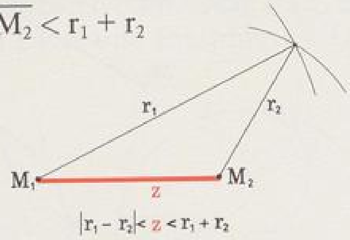
Verschieben wir den äußeren kleinen Kreis nach innen oder den inneren kleinen Kreis nach außen, dann gibt es jedesmal zwei Schnittpunkte. Hätten wir den kleinen Kreis jeweils in die Gegenrichtung verschoben, dann hätten sich die Kreise nicht mehr getroffen.

$|r_1 - r_2| < z < r_1 + r_2$

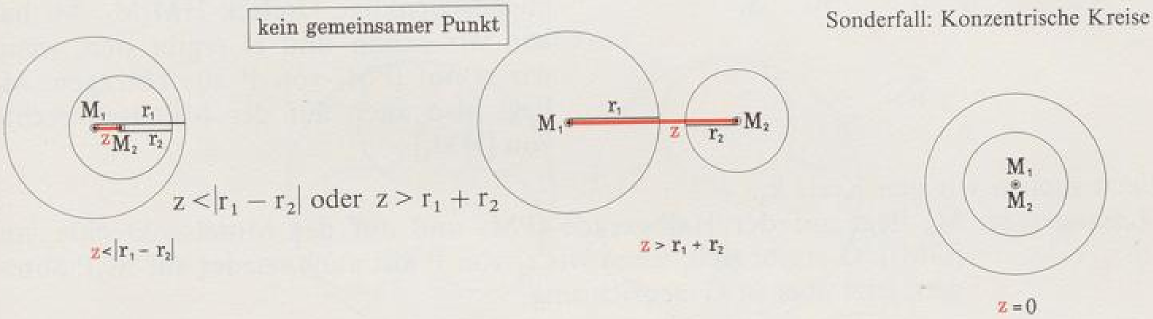


Die komplizierten algebraischen Beziehungen zwischen den Radien und der Zentrale entpuppen sich als Formen der Dreiecksungleichung. Wenn es zwei Schnittpunkte gibt, dann braucht man sich bloß die Dreiecksungleichung hinzuschreiben:

$|r_1 - r_2| < \overline{M_1M_2} < r_1 + r_2$

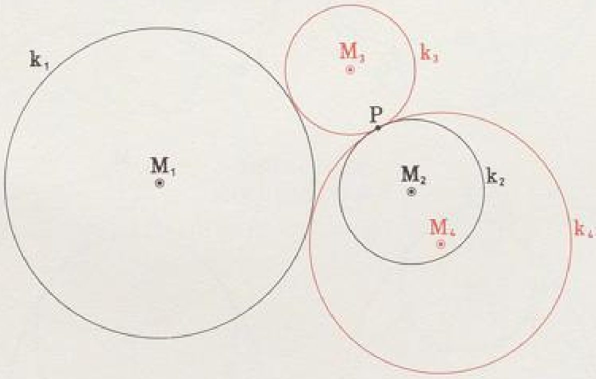


Keinen gemeinsamen Punkt gibt es, wenn mindestens eines der Ungleichungszeichen andersrum steht.



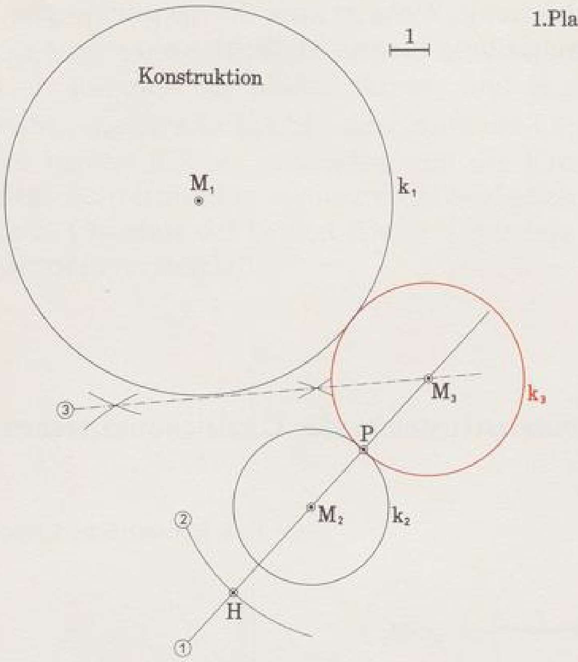
Zum Thema Kreisberührung gibt es viele Aufgaben. Eine führen wir vor:
Gegeben sind zwei Kreise k_1 und k_2 mit den Radien $r_1 = 5$ und $r_2 = 2$ und $\overline{M_1M_2} = 8{,}4$ sowie ein Punkt P auf k_2.
Konstruiere einen Kreis, der k_2 im Punkt P und k_1 berührt.

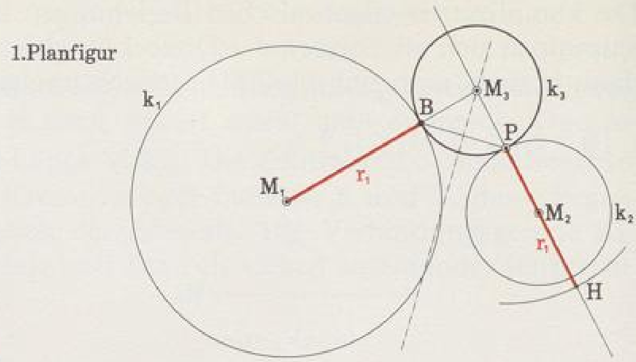
Überlegungsfigur



Weil sich zwei Kreise von innen oder von außen berühren können, müssen wir mehrere Fälle unterscheiden. Wie die Überlegungsfigur zeigt, gibt es in unserm Beispiel zwei Fälle, die Kreise k_3 und k_4. Wir nehmen uns die Fälle einzeln vor.

Zuerst suchen wir den Kreis k_3, der beide Kreise von außen berührt.
Lösungsidee: M_3 liegt auf alle Fälle auf der Halbgeraden $[M_2P$.

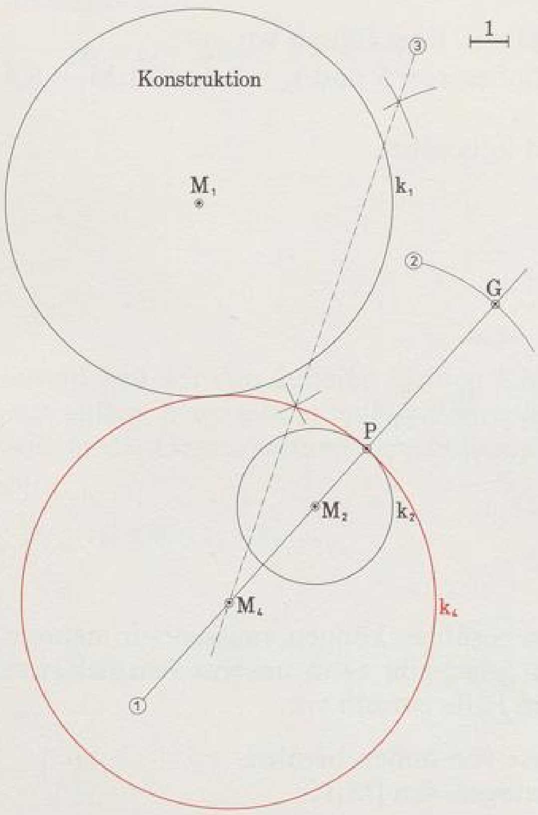


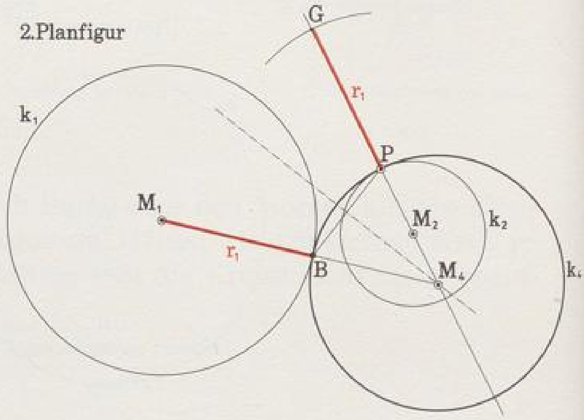


Das Dreieck PM_3B ist gleichschenklig, aber leider kennen wir M_3 und den Berührungspunkt B nicht. Verlängern wir beide Schenkel um r_1, dann bekommen wir das gleichschenklige Dreieck HM_3M_1. M_1 haben wir schon und H ergibt sich, wenn wir r_1 auf $[PM_2$ von P aus abtragen. M_3 liegt also auch auf der Mittelsenkrechte von $[HM_1]$.

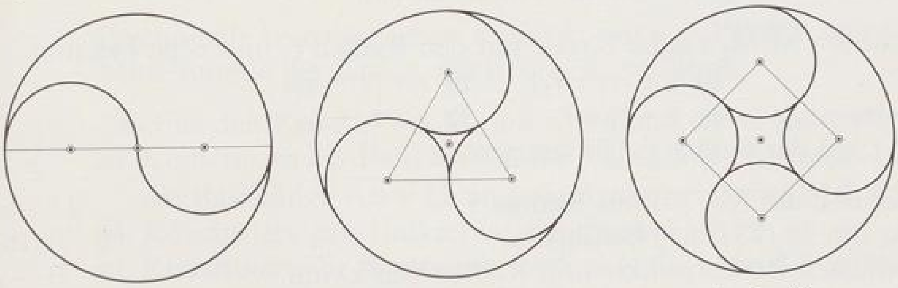
Jetzt suchen wir den Kreis k_4.

Lösungsidee: M_4 liegt auf der Halbgerade $[PM_2$ und auf der Mittelsenkrechte von $[GM_1]$. G ergibt sich, wenn wir r_1 von P aus auch wieder auf M_2P abtragen, jetzt aber in Gegenrichtung.





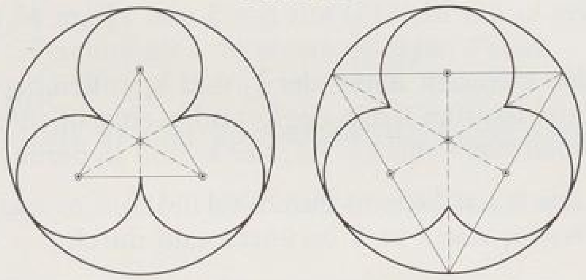
Vor allem im Maßwerk der gotischen (Kirchen-)Fenster gehören Kreise, die sich schneiden oder berühren, zu den unverkennbaren Stilelementen. Maßwerk ist eine Sammelbezeichnung für räumliche, steinerne, mit dem Zirkel »gemessene« Zierfüllungen zum Beispiel in den Fensterrosen sowie Rad- und Spitzbogenfenstern. Die Grundformen des Maßwerks sind Pässe und Fischblasen. Die folgenden Bilder zeigen einige einfache Beispiele.



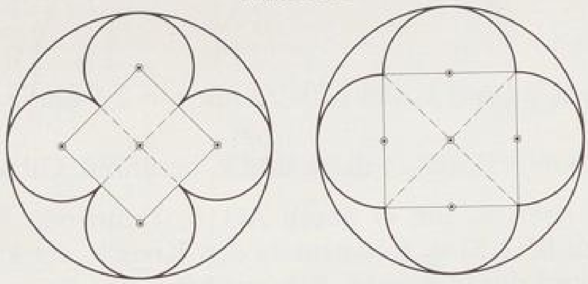
FISCHBLASEN

zweischweifig dreischweifig vierschweifig

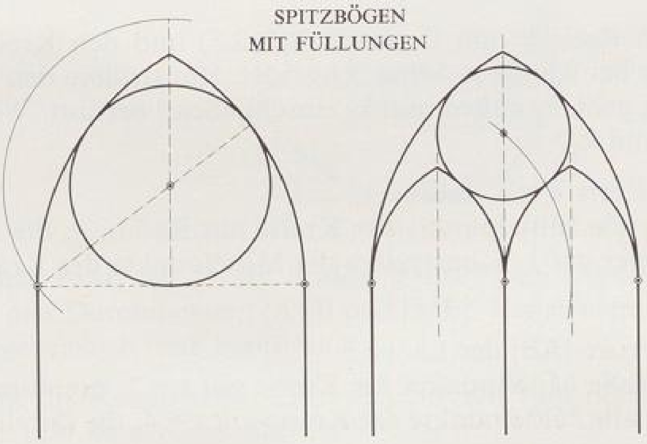
DREIPÄSSE



VIERPÄSSE



SPITZBÖGEN
MIT FÜLLUNGEN



Aufgaben

1. Der Kreis k_1 hat den Radius $r_1 = 24$, die Zentrale z hat die Länge 37.
Was weiß man vom Radius r_2 des Kreises k_2,
a) wenn k_2 den Kreis k_1 berührt,
b) wenn k_2 den Kreis k_1 in zwei Punkten schneidet,
c) wenn k_2 und k_1 keinen gemeinsamen Punkt haben?

•2. Von der Zentrale $z = \overline{M_1M_2}$ zweier Kreise mit den Radien r_1 und r_2 ist bekannt:
a) $z = 0$ b) $z < |r_1 - r_2|$ c) $z = |r_1 - r_2|$
d) $r_1 + r_2 > z > |r_1 - r_2|$ e) $z = r_1 + r_2$ f) $z > r_1 + r_2$.
Beschreibe die Lage der Kreise möglichst genau.

3. Zeichne den Kreis k um M(7 | 7) mit Radius 5. 14
a) Der Kreis k_1 um $M_1(13 | 11{,}5)$ berührt k. 0 0 16
Gib die möglichen Berührpunkte und Radien von k_1 an. 0
b) Der Kreis k_2 um $M_2(5 | 8{,}5)$ berührt k.
Gib die möglichen Berührpunkte und Radien von k_2 an.

4. Zeichne die Kreise k_1 um $M_1(5 | 5)$ mit $r_1 = 5$ und k_2 um $M_2(11 | 13)$ mit 16
$r_2 = 2{,}5$. 0 0 15
a) Konstruiere den kleinsten Kreis, der k_1 und k_2 außen berührt. 0
b) Konstruiere den kleinsten Kreis, der k_1 und k_2 einschließend berührt.
c) Konstruiere einen Kreis mit $r = 1{,}5$, der k_1 und k_2 berührt.

5. Zeichne einen Kreis k um M(6 | 6) durch T(11 | 8,5). 12
Konstruiere die Kreise, die k in T berühren und durch 0 0 17
a) A(15 | 10,5) 0
b) B(13 | 9)
c) C(14 | 2,5)
d) D(5 | 2,5) gehen.

6. Zeichne die Kreise k_1 und k_2 um M(6 | 6) mit $r_1 = 2{,}5$ und $r_2 = 5$ sowie den Punkt P(7,5 | 10).
Konstruiere die Kreise durch P, die k_1 und k_2 berühren. Gib die Berührpunkte an.

7. a) Zeichne den Kreis k_1 um O durch A(1 | 5,5) und den Kreis k_2 um 12
P(10 | 7) durch B(11,5 | 4). Konstruiere den Kreis k, der k_1 und k_2 au- 2 0 14
ßen berührt und durch A geht. Wo berührt k den Kreis k_2? 0

b) Zeichne den Kreis k_1 um O durch A(5 | 2,5) und den Kreis k_2 um 9
P(11 | 3), der bei 9,5 die x-Achse schneidet. Konstruiere den Kreis k, 1 0 16
der durch A geht, k_1 außen und k_2 einschließend berührt. Wo berüh- 1
ren sich k und k_2?

8. Zeichne einen Kreis k mit Radius 3.
a) Konstruiere alle Mittelpunkte der Kreise mit Radius 1, die k berühren.
b) P ist ein Punkt auf k. Konstruiere die Mittelpunkte der Kreise, die k in P berühren.

9. Zeichne die Strecke [AB] der Länge 5.
a) Konstruiere alle Mittelpunkte der Kreise mit $r = 2$, die durch A laufen.
b) Konstruiere alle Mittelpunkte der Kreise mit $r = 4$, die durch A und B laufen.

•10. Zeichne einen Kreis k um M mit Radius 4 und einen Punkt P auf k. Der Punkt A hat von P die Entfernung 3.

a) Konstruiere für $\overline{MA} = 6$ den Kreis, der k in P berührt und durch A läuft.

b) Wo liegt A, wenn Aufgabe **a)** keine Lösung hat?

c) Konstruiere die Punkte A, für die der gesuchte Kreis den kleinstmöglichen Radius hat.

11. Zeichne die konzentrischen Kreise k_1 mit $r_1 = 3$ und k_2 mit $r_2 = 5$. Konstruiere alle Mittelpunkte der Kreise, die k_1 und k_2 berühren.

12. Zeichne den Kreis k_1 um M_1 mit $r_1 = 4$ und einen Kreispunkt P.

a) Konstruiere die Punkte A und B so, dass das Dreieck APB gleichschenklig ist, die Basislänge $\overline{AB} = 12$ und die Symmetrieachse M_1P hat. M_1 liegt auf AB.

b) Konstruiere den Umkreis k_2 des Dreiecks APB.

c) Konstruiere die Kreise mit Radius 3, die k_2 in A berühren.

13. Zeichne einen Kreis k um M und einen Punkt P außerhalb von k. Der Thaleskreis über [MP] schneidet k in S und T.

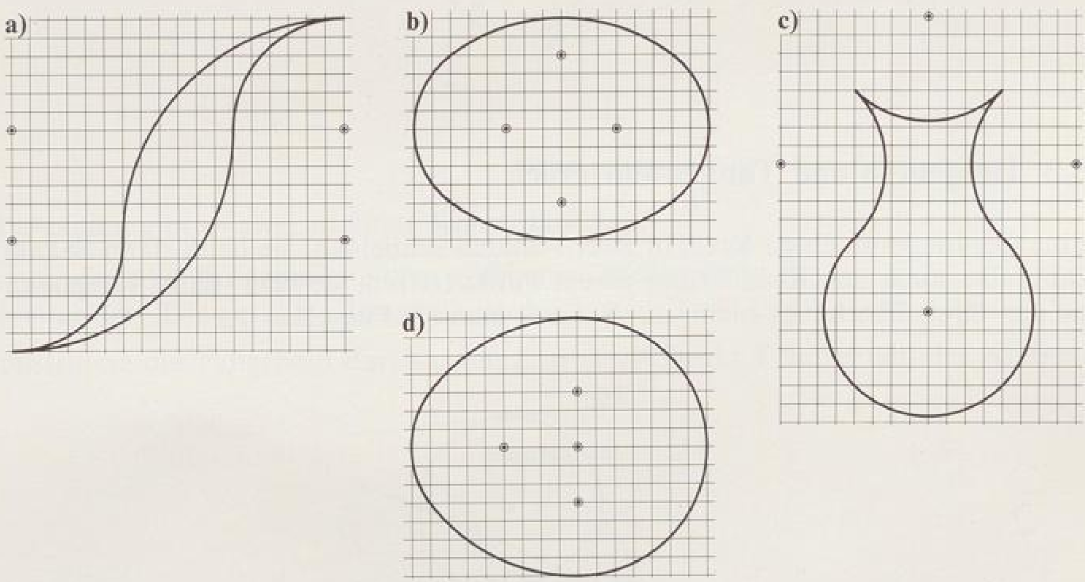
Begründe: **a)** $\overline{SP} = \overline{PT}$

b) SP schneidet k in einem einzigen Punkt.

14. BOGENBILDER

Die Figuren **a)** bis **d)** sind aus Bögen sich berührender Kreise zusammengesetzt.

Zeichne die Figuren ins Heft und markiere die Punkte, in denen sich zwei Bögen treffen.



:15. Zeichne einen Kreis um M mit Radius 5 und einen Durchmesser [AB] sowie die Kreise mit den Durchmessern [AM] und [MB]. Konstruiere die beiden Kreise, die die drei gegebenen Kreise berühren.

16. Überlege dir die Konstruktionen in den Bildern zum Maßwerk auf Seite 65, beschreibe sie und konstruiere nach.

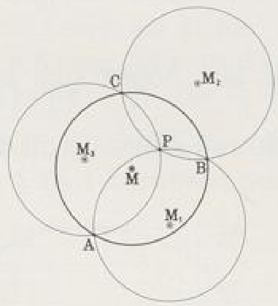
•17. Zeichne zwei gleich große Kreise so, dass einer durch den Mittelpunkt des andern geht.
Konstruiere in den Durchschnitt der Kreisflächen zwei gleich große Kreise, die sich und die gegebenen Kreise berühren.

•18. Zwei Kreise k_1 und k_2 berühren sich in B. Eine Gerade durch B schneidet die Kreise in S_1 und S_2.
Zeige: $M_1S_1 \parallel M_2S_2$.

19. Zwei Kreise k_1 und k_2 schneiden sich in P und Q, $[PK_1]$ und $[PK_2]$ sind Durchmesser.
Zeige: Q liegt auf $[K_1K_2]$.

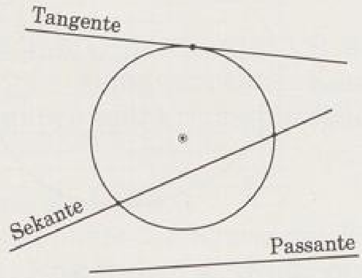
•20. SAUL ist ein Parallelogramm mit dem Mittelpunkt M.
Zeige: Die Umkreise der Dreiecke SAM und ULM berühren sich.

⁝21. BIERDECKEL
Zeichne drei Kreise mit demselben Radius r, die sich in einem Punkt P schneiden. Dabei entstehen noch drei weitere Schnittpunkte A, B und C.
Zeige: Auch A, B und C liegen auf einem Kreis mit Radius r.



3.3 Tangenten und Tangentenviereck

Eine Gerade kann einen Kreis in zwei Punkten schneiden, sie heißt dann **Sekante;** sie kann aber auch den Kreis in nur einem Punkt treffen, sie heißt dann **Tangente.** Trifft sie den Kreis überhaupt nicht, dann nennt man sie **Passante.**

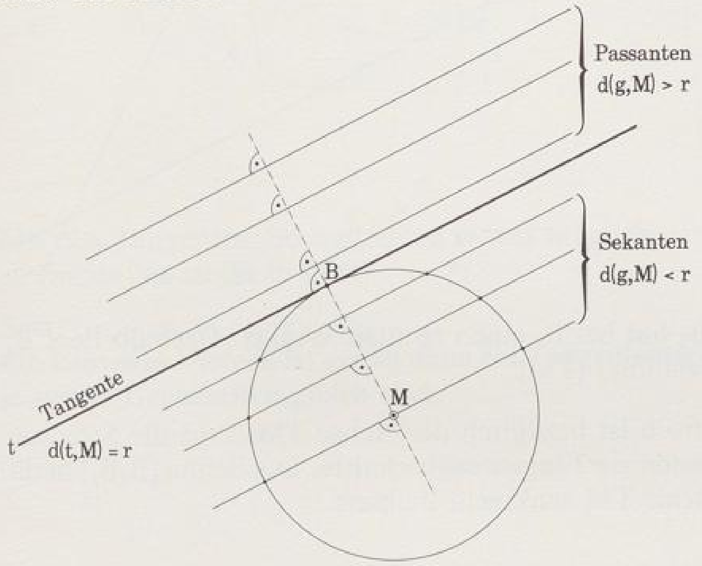


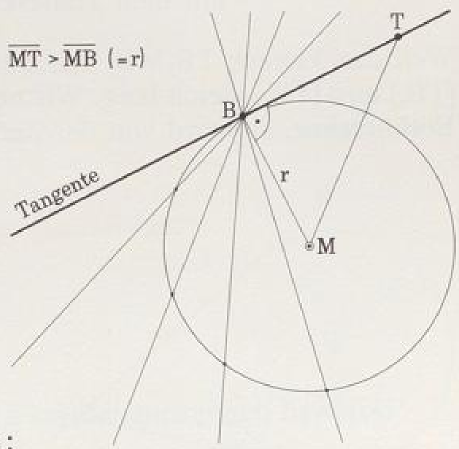
Der Abstand einer Gerade g vom Kreismittelpunkt M entscheidet, ob die Gerade Sekante, Tangente oder Passante ist. Von diesen Geraden ist die Tangente die Bedeutsamste. Weil sie vom Mittelpunkt M den Abstand r hat, steht sie im Berührpunkt B senkrecht auf dem Radius [BM]. Diese Eigenschaft verwenden wir zur

Definition

> Eine Gerade, die in einem Kreispunkt B senkrecht auf dem Radius [BM] steht, heißt **Tangente.** B heißt **Berührpunkt.**
> Man sagt auch: Die Tangente **berührt** den Kreis.

Jeder Punkt T der Tangente (außer B!) ist von M weiter entfernt als B, liegt also außerhalb des Kreises.

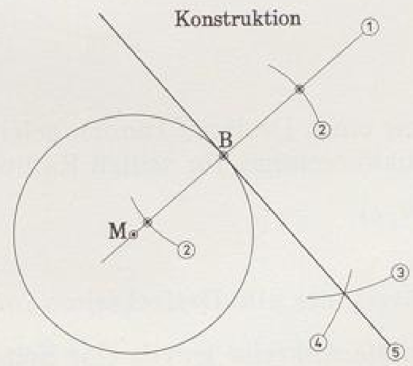


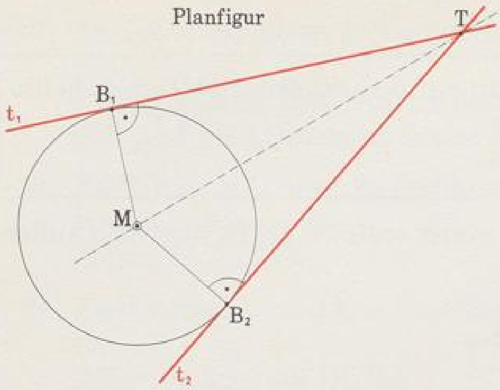


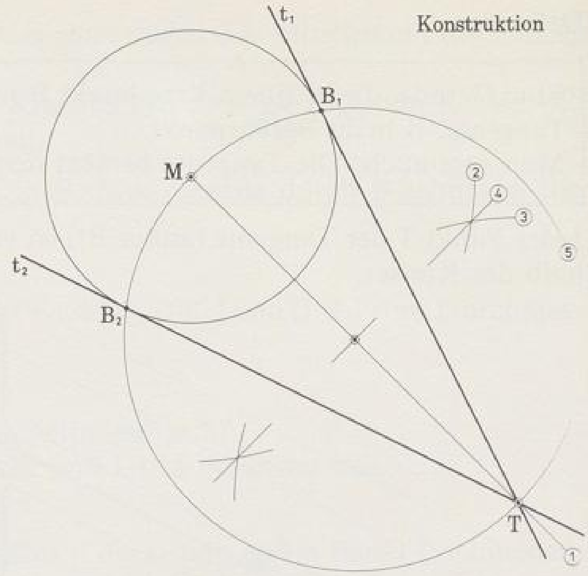
Für Tangenten gibt es zwei wichtige Konstruktionen:

1. Konstruiere die Tangente in einem gegebenen Berührpunkt B.
Lösungsidee: Die gesuchte Tangente ist das Lot in B auf BM.

2. Konstruiere die Tangenten durch einen gegebenen Punkt T außerhalb des Kreises.

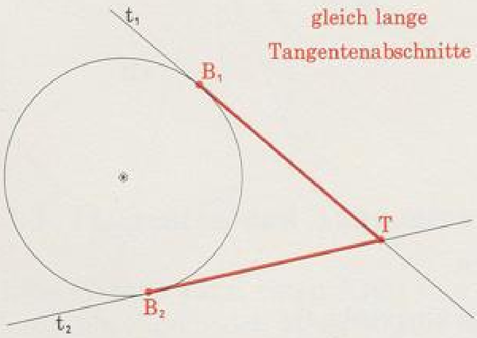


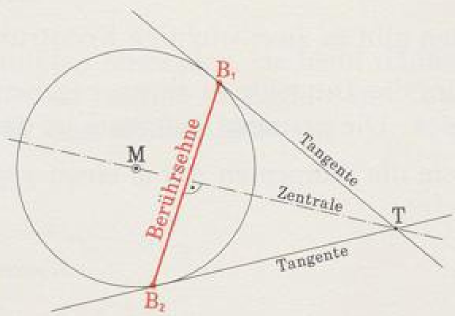




Lösungsidee: Das Dreieck MTB_1 hat bei B_1 einen rechten Winkel. Deshalb liegt B_1 auf dem Thaleskreis über [TM].

Weil das Viereck TB_1MB_2 symmetrisch ist bezüglich der Achse TM, sind die Strecken $[TB_1]$ und $[TB_2]$ gleich lang. Wir nennen sie **Tangentenabschnitte.** Die Sehne $[B_1B_2]$ heißt **Berührsehne,** sie wird von der Zentrale TM senkrecht halbiert.





Früher haben wir den Inkreis eines Dreiecks kennen gelernt. Sein Mittelpunkt ist der Schnittpunkt W der Winkelhalbierenden, für seinen Radius r gilt

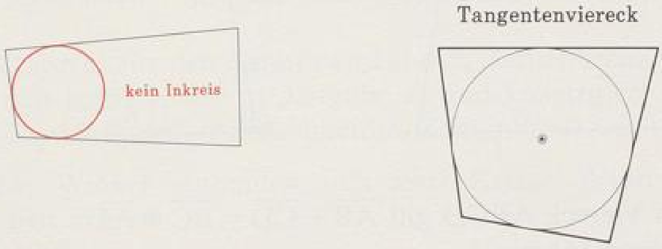
$$r = d(W, a) = d(W, b) = (W, c).$$

Jetzt können wir auch sagen:

Der Inkreis ist derjenige Kreis, der alle Dreieckseiten von innen berührt.

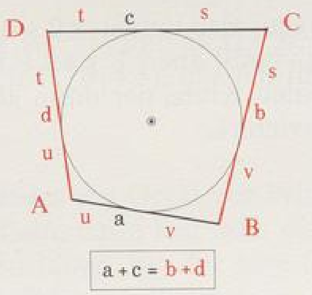
Dementsprechend berühren die Ankreise jeweils eine Seite und zwei Verlängerungen.

Allgemein definiert man den Inkreis eines (konvexen) Vielecks als den Kreis, der alle Vieleckseiten von innen berührt. Im Gegensatz zum Dreieck hat nicht jedes Vieleck einen Inkreis, was wir schon bei Vierecken sehen. Vierecke, die einen Inkreis haben, heißen **Tangentenvierecke,** weil ihre Seiten Tangenten am Inkreis sind. Deshalb schneiden sich beim Tangentenviereck (und nur bei diesem) alle vier Winkelhalbierenden in genau einem Punkt, nämlich dem Inkreis-Mittelpunkt.



Mit den Tangentenabschnitten ist es uns möglich, ein Kriterium für Tangentenvierecke zu finden; es steckt in dem

Satz:
Ein konvexes Viereck ist genau dann ein Tangentenviereck, wenn die Summen der Längen je zweier Gegenseiten gleich sind.

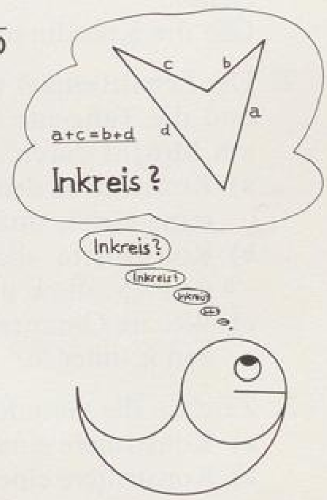


Wegen der Formulierung »genau dann« müssen wir zwei Behauptungen beweisen.

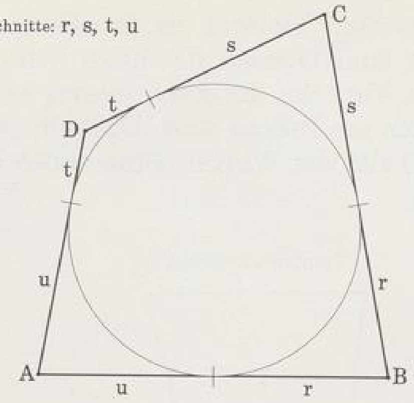
Vor.: ABCD ist ein Tangentenviereck.
Beh.: $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$

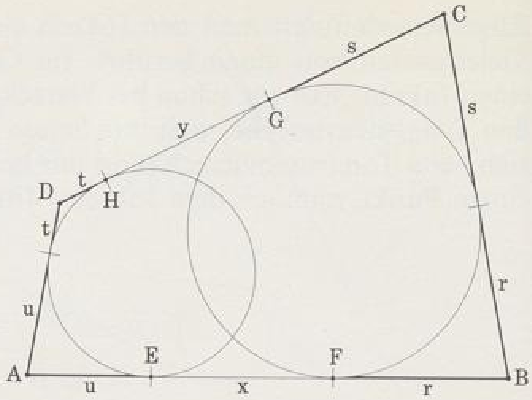
Bew.: $\left.\begin{aligned} \overline{AB} + \overline{CD} &= u + v + s + t \\ \overline{BC} + \overline{AD} &= v + s + u + t \end{aligned}\right\}$ also $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$

und jetzt die Gegenrichtung:



Tangentenabschnitte: r, s, t, u





Vor.: Im konvexen Viereck ABCD gilt $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$

Beh.: ABCD hat einen Inkreis.

Bew.: Wenn es keinen Inkreis gäbe, dann existierten mindestens zwei Kreise, von denen jeder drei Viereckseiten (oder die Verlängerungen) berührte, aber die vierte nicht, wie zum Beispiel im Bild. Wegen der Voraussetzung gilt

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB} + \overline{CD} = u + x + r + s + y + t \\ \overline{BC} + \overline{AD} = r + s + u + t \end{array}\right\} \quad \text{also muss } x + y = 0 \text{ sein.}$$

Weil x und y Streckenlängen, also immer $\geqq 0$ sind, müssen sie einzeln gleich null sein: $x = 0$ und $y = 0$. Das heißt aber, E und F fallen zusammen, ebenso G und H. Folglich gibt es nur einen Kreis, der dann aber alle vier Seiten berührt. Das Viereck ist ein Tangentenviereck.

Aufgaben

1. Zeichne den Kreis um M(4|2) durch A(2|5). 6
   Konstruiere die Tangenten in den Schnittpunkten von Kreis und x-Achse. 0 0 8 5
   Gib die Koordinaten des Tangenten-Schnittpunkts an.

2. Der **Schnittwinkel von Kreis und Gerade** ist der Winkel, den die Gerade und die Tangente in einem Schnittpunkt bilden. Zeichne den Kreis k um M(6|6) durch A(8,5|11). 12 0 0 14 0
   a) Konstruiere den Schnittwinkel von k und AB mit B(1|6) und gib seine Größe auf 0,5° genau an.
   b) Konstruiere die Sekanten durch den Kreispunkt $C(11|y_c)$ mit $y_c < 8{,}5$, die k unter 45° schneiden.
   c) Welche Geraden durch den Kreispunkt $D(x_d|7)$ mit $x_d < 11$ schneiden k unter 90° bzw. 0°?

3. Zeichne die Gerade AB mit A(7|2) und B(5|8). 9
   a) Konstruiere einen Kreis mit r = 5, der AB in A unter 55° schneidet. 0 0 12
   b) Konstruiere einen Kreis durch A und B, der AB unter 45° schneidet. 0

4. Der **Schnittwinkel zweier Kreise** ist der Winkel, den die Tangenten in einem Schnittpunkt bilden.

a) Zeichne den Kreis k_1 um $M_1(5|5)$ durch $A(8{,}5|3)$ und den Kreis k_2 14
um $M_2(13|9)$ durch A. Konstruiere den Schnittwinkel von k_1 und 0 0 14
k_2 und gib seine Größe auf 0,5° genau an. 0

b) Zeichne den Kreis k_1 um $M_1(5|6)$ durch $A(9|9)$ und konstruiere 14
einen Kreis k_2 mit $r = 2{,}5$, der k_1 in A senkrecht schneidet. 0 0 13
0

•**c)** Löse Aufgabe **b)** für den Schnittwinkel 60°, Zahlenkreuz wie **b)**.

d) Zeichne den Kreis k_1 wie in Aufgabe **a)** und konstruiere einen Kreis k_2 um $M_2(10|9{,}5)$, der k_1 senkrecht schneidet, Zahlenkreuz wie in **a)**.

5. Unter welchem Winkel schneiden sich zwei Kreise, deren Radien in einem Schnittpunkt den Winkel

a) 50° **b)** 130°
c) 90° **d)** 180° bilden?

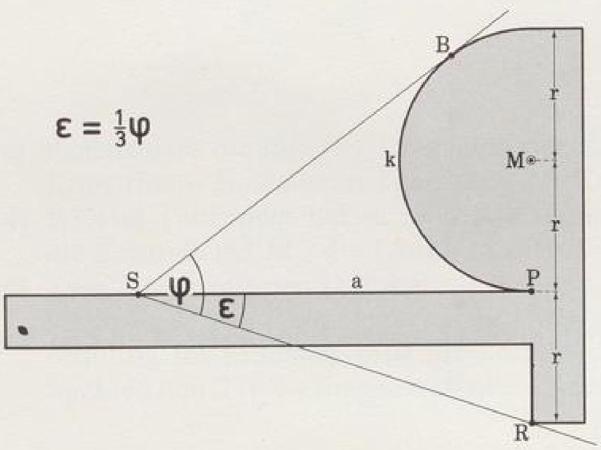
6. Der Kreis k um $M(5|2{,}5)$ geht durch den Ursprung. 15
Konstruiere die Tangenten durch $P(15|-5)$. Wie lang ist die Berühr- 1 0 17
sehne? 6
Welchen Winkel bilden die Tangenten? Wie lang sind die Tangentenabschnitte?

7. Zeichne die Gerade AB mit $A(5|1)$ und $B(3|1{,}5)$. 9
Konstruiere den Kreis durch $P(10|5{,}5)$, der AB in B berührt. 0 0 11
1

•8. WINKELDRITTLER
Um 300 v. Chr. hat Archimedes ein Gerät zur Winkel-Dreiteilung erfunden. Will man die Winkel φ dritteln, dann legt man die Kante a durch den Scheitel S und verrutscht das Gerät so lange, bis der eine Schenkel des Winkels durch R geht und der andere den Halbkreis k berührt.

Begründe: $\varepsilon = \frac{1}{3}\varphi$. Warum ist das keine Konstruktion?

Stelle durch Konstruieren fest, welche spitzen Winkel sich nicht dritteln lassen, wenn $a = 4r$.



9. Zeichne einen Kreis um M(6|8) mit r = 5 und die Gerade PQ mit 14
P(9|2,5) und Q(17|8,5). 0 0 20
a) Konstruiere die Tangenten, die parallel zu PQ sind. 0
b) Konstruiere Tangenten, die mit PQ einen Winkel von 53° bilden.
•c) Konstruiere Punkte so auf PQ, dass die Tangentenabschnitte die Länge 5 haben.
•d) Y ist ein Punkt der y-Achse. Zwei Kreistangenten durch Y bestimmen eine Berührsehne der Länge 6. Konstruiere Y und die Berührsehne.

10. Gegeben ist ein Kreis k_1, auf ihm ein Punkt P und eine Passante g. Konstruiere einen Kreis k_2, der k_1 in P und außerdem g berührt.

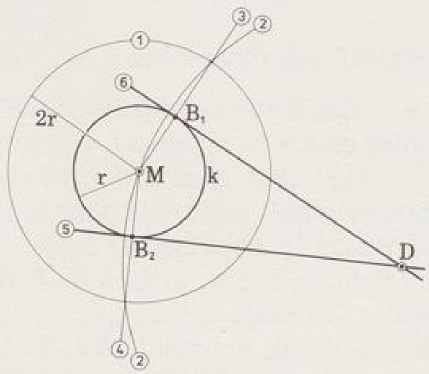
•11. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge 8.
Konstruiere drei kongruente Kreise, die sich berühren und von denen jeder außerdem noch
a) zwei Dreieckseiten berührt
b) eine Dreieckseite in der Mitte berührt.

•12. Zeichne ein Quadrat mit der Seitenlänge 8.
Konstruiere vier kongruente Kreise so, dass sich je drei Kreise berühren und jeder außerdem noch
a) zwei Quadratseiten berührt
b) eine Quadratseite in der Mitte berührt.

13. Zeichne einen Kreis k mit r = 2 und einen Punkt P, der vom Kreismittelpunkt die Entfernung 5 hat.
Konstruiere durch P die beiden Kreistangenten t_1 und t_2. Konstruiere die Kreise, die t_1, t_2 und k berühren.

:14. Zeichne einen Kreis k um M mit r = 5 und eine Gerade g, die von M den Abstand d = 0,5 hat.
a) Konstruiere die Kreise mit Radius 2, die g und k berühren. (Achtung!)
b) Bei welchen Abständen d ergeben sich 7, 6, 5 (!), 4, 2, 1, 0 Kreise mit Radius 2, die g und k berühren?

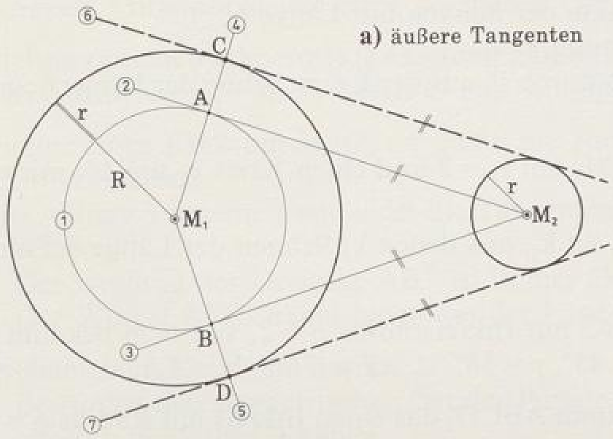
15. DEUTERATANG



Deute die zweite Tangentenkonstruktion (Konstruktion durch D an den Kreis).

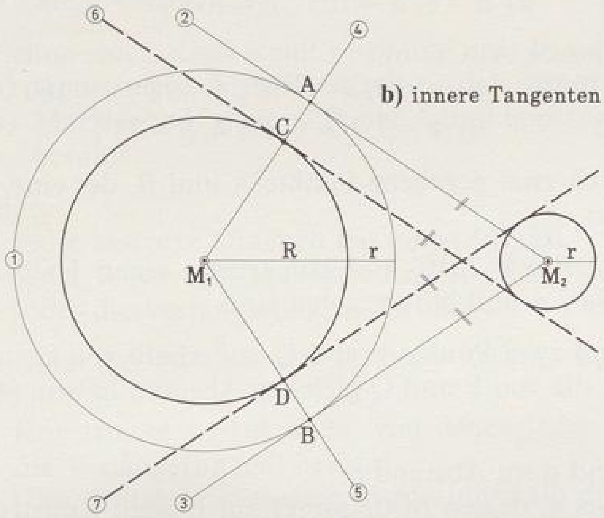
•16. GEMEINSAME TANGENTEN

a) Das Bild zeigt die Konstruktion der **äußeren Tangenten.** Beschreibe 12
sie und führe sie durch für k_1 um $M_1(3|0)$ durch $P_1(2{,}5|1{,}5)$ und k_2 0 0 13
um $M_2(8|5)$ durch $P_2(9{,}5|9{,}5)$. 2
Bestimme die Koordinaten der Berührpunkte.



a) äußere Tangenten

b) Das Bild zeigt die Konstruktion der **inneren Tangenten.** 18
Beschreibe sie und führe sie durch für k_1 um $M_1(15|4)$ durch 0 0 18
$P_1(16|1)$ und k_2 um $M_2(5|14)$ durch $P_2(2|5)$. 0
Bestimme die Koordinaten der Berührpunkte.



b) innere Tangenten

c) Konstruiere die inneren Tangenten der Kreise von Aufgabe **a).**
Konstruiere die äußeren Tangenten der Kreise von Aufgabe **b).** Berührpunkte!

d) Wieviel Tangenten haben zwei Kreise mit $r = 3$ und $R = 5$ gemeinsam, wenn die Zentrale $[M_1M_2]$ die Länge 11 oder 8 oder 4 oder 2 oder 1 hat?

e) Zwei Räder mit den Durchmessern 1 m und 0,6 m sind mit einem Treibriemen verbunden. Die Radachsen haben einen Abstand von 1,4 m. Zeichne die Anordnung im Maßstab 1:20 für »offenen Trieb« (gleichlaufende Räder) und »gekreuzten Trieb« (gegenlaufende Räder).

17. Zwei gerade Bahnlinien mit einem Richtungsunterschied von 160° sollen durch einen Kreisbogen von 1 200 m Radius so verbunden werden, dass die Bahnlinien Tangenten am Kreisbogen sind.
Konstruiere einen Lageplan im Maßstab 1:10 000.

18. Zeichne einen Kreis k um M mit $r = 5$.
a) Wo liegen die Mittelpunkte der Sehnen mit Länge 6?
b) P hat von M die Entfernung 8.
Konstruiere eine Sekante durch P, aus der k eine Sehne der Länge 6 ausschneidet.

•19. Zeichne einen Kreis k_1 um M_1 mit $r_1 = 2$ und einen Kreis k_2 um M_2 mit $r_2 = 4$ so, dass $\overline{M_1M_2} = 9$ ist.
Konstruiere jene Tangenten an k_1, aus denen k_2 Sehnen der Länge 5,5 ausschneidet.

20. Konstruiere ein Dreieck ABC mit Inkreisradius $\varrho = 2$, von dem bekannt ist
a) $\alpha = 67°, c = 8$ **b)** $\beta = 45°, \gamma = 58°$ **c)** $\gamma = 60°, h_a = 5{,}5$.

21. Konstruiere ein Parallelogramm ABCD, das einen Inkreis mit Radius $\varrho = 1{,}5$ und
a) $\alpha = 45°$ **b)** $\overline{AC} = 6$ hat.

22. Konstruiere ein Trapez ABCD mit Inkreis, bei dem die Basis $a = 7$, $\alpha = 60°$ und $h = 5$ ist.

23. Konstruiere ein Tangentenviereck ABCD mit Inkreisradius $\varrho = 2$ sowie
a) $\beta = 75°$, $a = 5$ und $b = 4{,}5$ **b)** $d = 6, \alpha = 105°, \beta = 135°$.

24. Konstruiere ein Tangentenviereck ABCD mit
a) $a = 5, b = 6, \alpha = 95°, \beta = 100°$ **b)** $a = 3, \alpha = 108°, \beta = 98°, \gamma = 100°$
c) $a = 4, b = 5, c = 7, \overline{AC} = 8$ **d)** $a = 7, b = 6, c = 4, \beta = 75°$.

25. Konstruiere einen Kreis durch zwei gegebene Punkte A und B, der eine vorgegebene Parallele zu AB berührt.

26. Zeichne ein spitzwinkliges Dreieck ABC und konstruiere einen Halbkreis mit dem Mittelpunkt auf c so, dass a und b Tangenten sind.

•27. Gegeben sind ein Kreis k und zwei Punkte P und Q außerhalb von k.
Konstruiere jene Tangenten, die von P und Q gleichen Abstand haben. (4 Lösungen!)

28. Zeichne zwei Parallelen p und q im Abstand 6.
a) k_1 ist ein Kreis mit Radius 4, dessen Mittelpunkt auf p liegt. Konstruiere die Kreise, die p und q berühren und deren Mittelpunkte auf k_1 liegen.
b) A liegt zwischen p und q im Abstand 2 von p.
Konstruiere die Kreise durch A, die p und q berühren.
c) Die Gerade a schneidet p unter 60°.
Konstruiere Kreise mit den Tangenten a, p und q.
d) p und q sind Tangenten am Kreis k_2.
Konstruiere Kreise, die k_2, p und q berühren.
e) Der Mittelpunkt des Kreises k_3 liegt nicht auf der Mittelparallele von p und q.
Konstruiere die Kreise, die k_3, p und q berühren.

•29. Zeichne eine Gerade g und konstruiere einen Kreis mit Radius 2, der g berührt und

a) von einem gegebenen Punkt P den Abstand 3 hat
(der Abstand Punkt–Kreis ist die kürzeste Entfernung eines Kreispunkts von dem Punkt)

b) dessen Mittelpunkt von einer gegebenen Gerade h den Abstand 3 hat.

30. Zeichne zwei sich schneidende Geraden g und h und markiere einen Punkt G auf g. Konstruiere einen Kreis durch G mit Mittelpunkt auf g und der Tangente h.

•31. Zeichne einen Kreis um M mit $r = 2$ und die Tangenten t_1 und t_2, die sich in T unter 50° schneiden.
Eine weitere Tangente t schneidet die Tangentenabschnitte von t_1 und t_2 in A und B. Zeige:

a) Der Umfang des Dreiecks ABT ist immer gleich, egal, wie t liegt.

b) Der Winkel AMB hängt nicht von der Lage von t ab.

•32. Zeichne einen Kreis mit Radius 2.

a) Bestimme den geometrischen Ort der Punkte, von denen aus die Tangentenabschnitte die Länge 3 haben.

b) Zeichne außerdem die Passante p und konstruiere einen Punkt X auf p, von dem aus die Tangentenabschnitte die Länge 3 haben.

:33. Zeichne die Punkte P und Q mit der Entfernung 7. Konstruiere einen Kreis mit $r = 1{,}5$ so, dass die Tangentenabschnitte von P aus die Länge 3 und von Q aus die Länge 4 haben

34. Zeichne einen Kreis k mit $r = 2$ und eine Passante p.

a) Konstruiere einen Kreis mit $r = 1{,}5$, der p und k berührt.

:b) Markiere auf p einen Punkt A und konstruiere einen Kreis, der p in A und k berührt.

35. Zeige:

a) Jeder konvexe Drachen hat einen Inkreis.

b) Jeder Windvogel hat einen Ankreis, das heißt einen Kreis, der alle vier Seiten (oder die Verlängerungen) berührt.

36. Zeichne das Viereck ABCD mit A(0|6), B(14|6), C(11,5|12) und D(4,5|12).

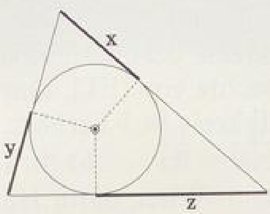
12
0 0 14
0

a) Konstruiere 4 »Inkreise«, von denen jeder drei Viereckseiten (oder die Verlängerungen) berührt.
(Die Mittelpunkte sollen nicht außerhalb des Vierecks liegen).

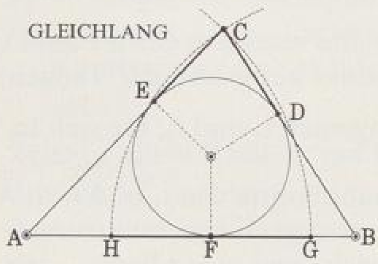
b) Zeige: Fallen zwei solcher »Inkreise« zusammen, dann ist ABCD ein Tangentenviereck.

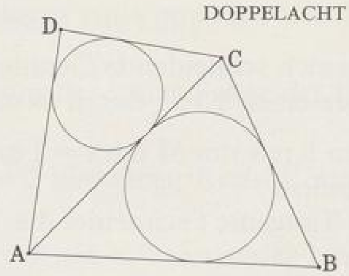
•37. Zeichne ein Parallelogramm, das sich in zwei Tangenten-Trapeze zerlegen lässt.

38. UMFANG
Gegeben ist ein Dreieck mit seinem Inkreis.
Der Umfang des Dreiecks sei u.
Zeige: $u = 2(x + y + z)$.



39. GLEICHLANG
Gegeben ist ein Dreieck ABC mit seinem Inkreis.
Der Kreis um A mit Radius b schneidet c in G, der Kreis um B mit Radius a schneidet c in H.
Zeige: $\overline{HF} = \overline{EC} = \overline{FG} = \overline{CD}$.





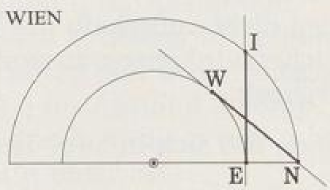
40. DOPPELACHT
Zeichne zwei Kreise, die sich außen berühren, und eine Strecke [AC], die auf der Tangente durch den Berührpunkt liegt. [AC] ist gemeinsame Seite der Dreiecke ACD und ABC.
Die beiden Kreise sind die Inkreise dieser Dreiecke.
Zeige: **a)** ABCD ist ein Tangentenviereck.
b) Auch die Inkreise der Dreiecke ABD und BCD berühren sich.

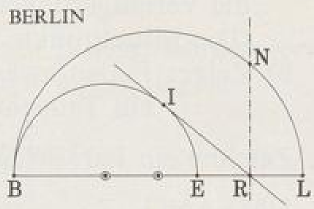
41. Zeichne einen Kreis um M und um ihn herum ein Tangententrapez.
Zeige: Von M aus sieht man die Schenkel unter dem gleichen Winkel. Wie groß ist er?

42. Zeichne die Kreise k_1 um M_1 und k_2 um M_2, die sich außen in B berühren, und ihre gemeinsame Tangente t. Eine äußere gemeinsame Tangente w berührt k_1 in P und k_2 in Q.
Zeige: **a)** Der Schnittpunkt A von t und w ist die Mitte von [PQ].
b) $\sphericalangle PBQ = \sphericalangle M_1AM_2 = 90°$.

•43. Zwei Kreise berühren sich in B. Eine Sekante durch B schneidet die Kreise in S und T. Zeige: Die Tangenten in S und T sind parallel.

•44. WIEN
Zeichne zwei konzentrische Halbkreise. Die Tangente am kleinen Kreis in E schneidet den großen Kreis in I und die Tangente durch N an den kleinen Kreis berührt in W.
Zeige: $\overline{EI} = \overline{WN}$.





•45. BERLIN
Zwei Halbkreise berühren sich von innen in B. Der Kreispunkt N liegt auf der Mittelsenkrechte von [EL]. Durch die Mitte R von [EL] geht eine Gerade, die den kleinen Halbkreis in I berührt.
Zeige: **a)** $\overline{NR} = \overline{RI}$ **b)** B, I und N liegen auf einer Gerade.
(*Tip:* erst nach Wien, dann Halbkreis schieben bis Berührung!)