Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 2000

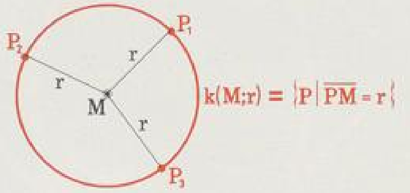
3.1 Der Kreis als geometrischer Ort

urn:nbn:de:hbz:466:1-83477

3.1 Der Kreis als geometrischer Ort

Ein Kreis ist definiert als Menge aller Punkte der Ebene, die von einem bestimmten Punkt M die feste Entfernung r haben. M ist der Mittelpunkt und r der Radius des Kreises. Einen Kreis bezeichnet man kurz mit k (M; r).
Die Definition sagt zweierlei:

1. Jeder Punkt P der Ebene mit $\overline{PM} = r$ liegt auf dem Kreis k (M; r).
2. Jeder Punkt auf dem Kreis k (M; r) erfüllt die Bedingung $\overline{PM} = r$.



Beide Bedingungen ergeben zusammen in symbolischer Kurzform
$P \in k(M; r) \Leftrightarrow \overline{PM} = r.$
Der Kreis ist ein geometrischer Ort. Allgemein definiert man

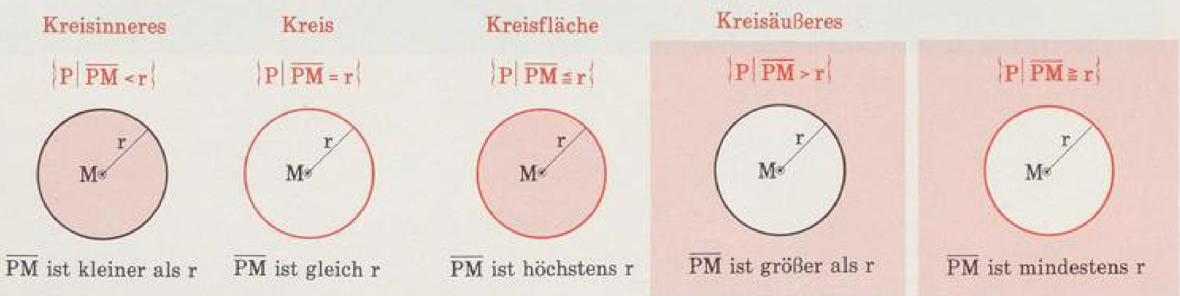
Definition

> Die Menge aller Punkte, die eine Bedingung B erfüllen, heißt **geometrischer Ort** zur Bedingung B.

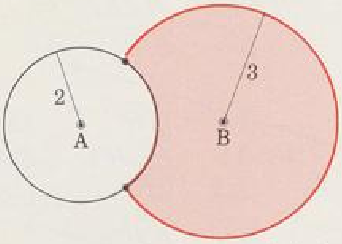
Diese Definition besagt:
Alle Punkte des geometrischen Orts erfüllen die Bedingung B, und umgekehrt:
Alle Punkte, die B erfüllen, gehören zum geometrischen Ort.
Ist der geometrische Ort eine Gerade oder ein Kreis, dann nennen wir ihn auch Ortslinie. Der Kreis k (M; r) ist also die Ortslinie zur Bedingung $\overline{PM} = r$. Ausführlicher: Der Kreis k um M mit dem Radius r ist die Ortslinie der Punkte P, die von M die Entfernung r haben. Symbolisch: $k(M; r) = \{P \mid \overline{PM} = r\}$.

Beachte: Der Kreis ist eine Linie (und nicht etwa eine Fläche)!
Die Kreisfläche ist der geometrische Ort der Punkte P, die von einem bestimmten Punkt M höchstens die Entfernung r haben, kurz: $\{P \mid \overline{PM} \leqq r\}$.

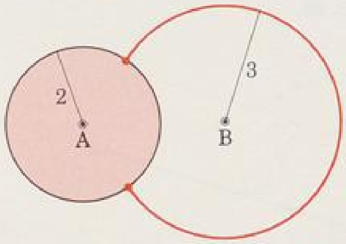
Mit den Wörtern »gleich, größer, mindestens und höchstens« lassen sich fünf kreisförmige geometrische Örter definieren, es sind die rot gezeichneten Figuren.



Kompliziertere Figuren können wir erzeugen, indem wir diese Bedingungen mit »und« oder mit »oder« oder mit beiden kombinieren, dazu zwei Beispiele:
Im Bild links sehen wir die Menge aller Punkte, die von A mehr als 2 und von B höchstens 3 entfernt sind.
Im Bild rechts sehen wir die Menge aller Punkte, die von A weniger als 2 oder von B genau 3 entfernt sind.



$\{P \mid \overline{PA} > 2 \wedge \overline{PB} \leqq 3\} = \{P \mid \overline{PA} > 2\} \cap \{P \mid \overline{PB} \leqq 3\}$

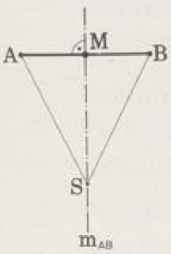


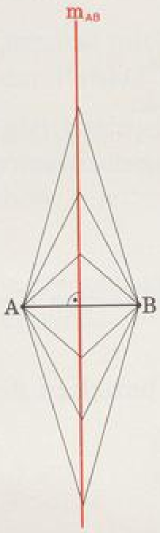
$\{P \mid \overline{PA} < 2 \vee \overline{PB} = 3\} = \{P \mid \overline{PA} < 2\} \cup \{P \mid \overline{PB} = 3\}$

Geraden als geometrische Örter haben wir schon kennen gelernt:

Der geometrische Ort aller Punkte, die von A und B gleich weit entfernt sind, ist die Mittelsenkrechte m_{AB}.

Ausführlicher formuliert heißt das:
1. Jeder Punkt auf m_{AB} ist von A und B gleich weit entfernt und umgekehrt:
2. Jeder Punkt, der von A und B gleich weit entfernt ist, liegt auf m_{AB}.





Beide Behauptungen beweisen wir.

1. Vor.: S liegt auf m_{AB}
   Beh.: $\overline{SA} = \overline{SB}$
   Bew.:

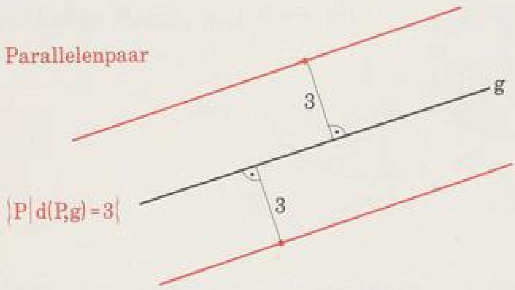
$$\begin{array}{lr} \overline{MA} = \overline{MB} & \text{(V)} \\ \overline{MS} = \overline{MS} & \\ \sphericalangle BMS = \sphericalangle SMA = 90^\circ & \text{(V)} \\ \hline \Rightarrow \triangle BSM \cong \triangle ASM & \text{(SWS)} \\ \Rightarrow \quad \overline{SA} = \overline{SB} & \text{q.e.d.} \end{array}$$

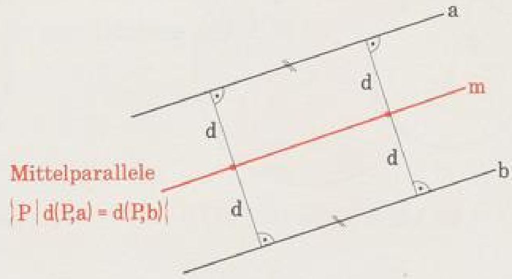
2. Vor.: $\overline{SA} = \overline{SB}$ (V)
   Beh.: S liegt auf m_{AB}.
   Bew.: Nach Voraussetzung ist Dreieck SAB gleichschenklig, S ist die Spitze. Deshalb liegt S auf der Symmetrieachse des Dreiecks SAB, das ist die Mittelsenkrechte m_{AB}. q.e.d.

Der geometrische Ort der Punkte, die von einer Gerade g den Abstand d haben, ist das Parallelenpaar im Abstand d von der Gerade g.

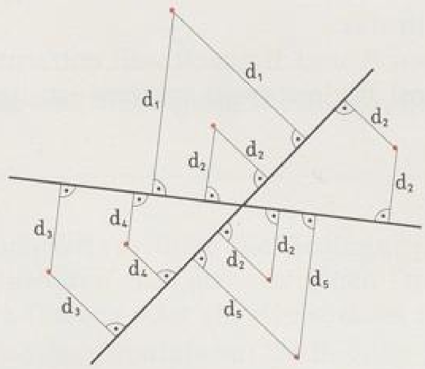
Die Geradenpunkte von g haben selber auch eine gemeinsame Eigenschaft: Ihre Abstände von den beiden Parallelen sind gleich groß.

Der geometrische Ort der Punkte, die von zwei Parallelen denselben Abstand haben, ist die Mittelparallele m.



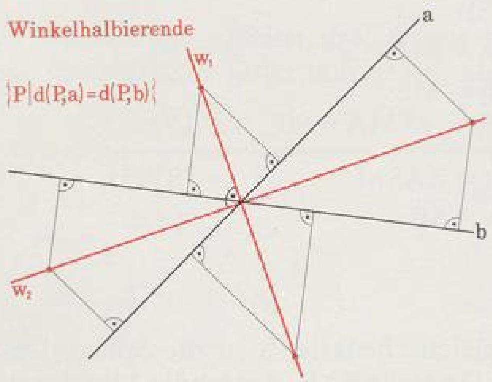


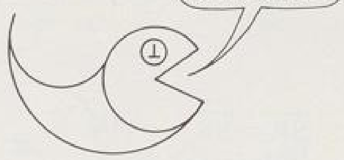
Wenn sich zwei Geraden a und b schneiden, wo liegen dann die Punkte, die von a und b denselben Abstand haben? Ein paar davon sehen wir im Bild.



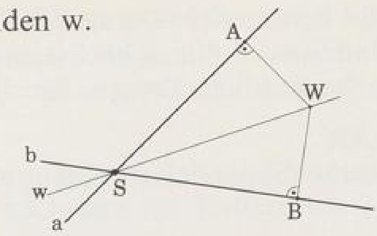
Der geometrische Ort der Punkte, die von zwei sich schneidenden Geraden gleichen Abstand haben, ist das Paar der Winkelhalbierenden.

Jeder dieser drei Sätze enthält zwei Behauptungen. Wir beweisen den letzten Satz.





1. Vor.: W liegt auf einer Winkelhalbierenden w.



Beh.: $\overline{WA} = \overline{WB}$

Bew.: $\overline{SW} = \overline{SW}$

$\sphericalangle A = \sphericalangle B = 90°$

$\sphericalangle WSA = \sphericalangle BSW$ (Vor.)

$\Rightarrow \triangle ASW \cong \triangle BSW$ (SWW)

$\Rightarrow \overline{WA} = \overline{WB}$ q.e.d.

2. Vor.: $\overline{WA} = \overline{WB}$

Beh.: $\sphericalangle WSA = \sphericalangle BSW$

Bew.: $\overline{SW} = \overline{SW}$

$\overline{WA} = \overline{WB}$ (Vor.)

$\sphericalangle A = \sphericalangle B = 90°$

$\Rightarrow \triangle ASW \cong \triangle BSW$ (SsW)

$\Rightarrow \sphericalangle WSA = \sphericalangle BSW$ q.e.d.

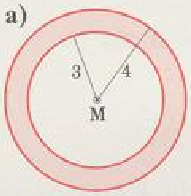
Aufgaben

1. Zeichne ein Quadrat mit der Seitenlänge 5 und kennzeichne mit Farbe den geometrischen Ort der Punkte, die von jeder Ecke höchstens die Entfernung 5 haben.

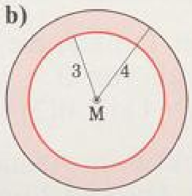
2. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 5 und kennzeichne mit Farbe den geometrischen Ort der Punkte, die von jeder Ecke mindestens die Entfernung 5 haben.

3. PLURAL
Beschreibe die rot gezeichneten Figuren als geometrische Örter in Worten und in Symbol-Schreibweise.

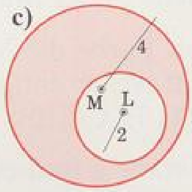
a)



b)



c)

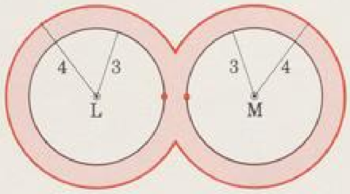


•4. Zeichne die Punkte A(0|0), B(1|0) und C(2|0). Kennzeichne mit Farbe alle Punkte, die von A mehr als 1,5 und von B höchstens 3 und von C mehr als 2,5 entfernt sind.
Beschreibe diese Punktmenge mit Symbolen.

5. Zeichne die Punkte A(0|0), B(3|0) und C(1,5|0).
Kennzeichne mit Farbe folgende Punktmengen:
a) $\{P|\overline{PB} < 1\} \cup [\{P|\overline{PA} < 2{,}5\} \cap \{P|\overline{PC} > 3\}]$
b) $[\{P|\overline{PB} < 1\} \cup \{P\ |\overline{PA} < 2{,}5\}] \cap \{P|\overline{PC} > 3\}$

6. Zeichne die Punkte A(0 | 0) und B(4,5 | 0). Kennzeichne mit Farbe alle Punkte, die von A mindestens 1,5 und höchstens 3 und von B mehr als 4 entfernt sind. Wie lautet die Symbol-Schreibweise für diese Punktmenge?

:7. SINGULAR
Beschreibe die rot gezeichnete Figur als geometrischen Ort in Worten und Symbolen.



8. Was ist der geometrische Ort der Mittelpunkte von Kreisen mit Radius 4, die durch einen gegebenen Punkt A gehen? Zeichne einige dieser Kreise.

•9. Was ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller gleich langen Sehnen in einem Kreis? (Genaue Beschreibung!)

10. Zeichne die Punkte A und B mit $\overline{AB} = 4$.
a) Zeichne vier Kreise, die durch A und B laufen.
b) Zeichne einen Kreis mit Radius 2,5 durch A und B.
c) Wie groß ist der Radius des kleinsten Kreises durch A und B? Zeichne ihn.
d) Was ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kreise durch A und B?

11. Zeichne eine Strecke a mit der Länge 5.
Was ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Rechtecke mit der Seite a?

12. Zeichne einen Kreis mit Radius 3,5 und eine Sehne s. Was ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller zu s parallelen Sehnen?

13. Zeichne die Punkte A und B mit $\overline{AB} = 6$. Kennzeichne mit Farbe alle Punkte,
a) die näher bei A als bei B liegen
b) deren Entfernung von B höchstens so groß ist wie von A
c) Beschreibe jede dieser Mengen symbolisch.

14. Kennzeichne mit Farbe die Menge der Punkte, die näher bei B als bei A liegen, aber von C nicht weiter entfernt sind als von B.
a) A(−2 | 0), B(1 | 0), C(5 | 0) **b)** A(−1 | 1), B(2 | 1), C(3 | −1)

15. Zeichne eine Gerade g und einen Punkt P im Abstand 2.
Konstruiere alle Punkte, die von g den Abstand 3 und von P die Entfernung 6 haben.

•16. Zeichne eine Gerade g und einen Punkt P im Abstand d.
Konstruiere alle Punkte, die von g den Abstand 3 und von P die Entfernung 4 haben.
Für welche Werte von d gibt es keine, einen, zwei, drei oder vier solcher Punkte?

17. Zeichne zwei Geraden g und h, die sich schneiden.
Konstruiere alle Punkte, die von g den Abstand 3 und von h den Abstand 4 haben.

•**18.** Zeichne eine Gerade g und zwei Punkte P und Q auf derselben Seite von g. Konstruiere alle Punkte, die von g den Abstand 2 haben und von P und Q gleich weit entfernt sind. Bei welcher Lage von P und Q gibt es keine bzw. unendlich viele Lösungen?

:**19.** Zeichne eine Strecke [AB] der Länge 5 und konstruiere alle Punkte, für die es mindestens einen Streckenpunkt gibt, der höchstens die Entfernung 2 hat.

:**20.** Zeichne ein Dreieck mit den Seiten $a = 6$, $b = 7$ und $c = 9$.
Konstruiere alle Punkte, die vom Dreieck mindestens die Entfernung 1,5 haben.

•**21.** Zeichne die drei Geraden g, h und i so, dass sie sich in drei Punkten 15
schneiden. 0 0 15
(Schnittpunkte: (4|4), (11|4), (7|10)). 0
Konstruiere alle Punkte, die von jeder Gerade mindestens den Abstand 1 haben.

22. Zeichne zwei Punkte A und B mit der Entfernung 5.
Bestimme den geometrischen Ort der Punkte C für den Fall, dass das Dreieck ABC die Höhe $h_c = 6$ hat.

23. Zeichne zwei Parallelen im Abstand 2 und bestimme die Ortslinie der Mittelpunkte aller Querstrecken.

24. Bestimme die Ortslinie der Mittelpunkte von Parallelogrammen mit $\overline{AB} = 6$ und $h_a = 4$.

25. g und h schneiden sich in S. Wo liegen alle Punkte, die von g und h gleichen Abstand und von S die Entfernung 2 haben?

26. Zeichne zwei Parallelen im Abstand 4 und eine dritte Gerade, die die Parallelen schneidet.
Konstruiere alle Punkte, die von den drei Geraden denselben Abstand haben.