Anschauliche Geometrie

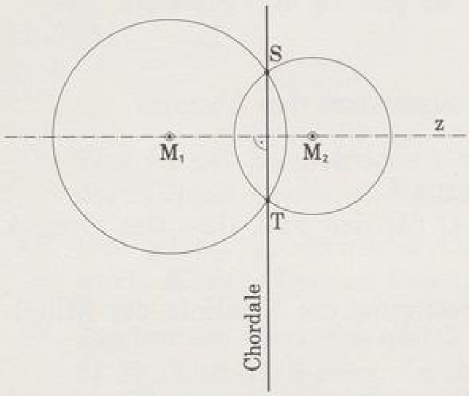
Barth, Friedrich

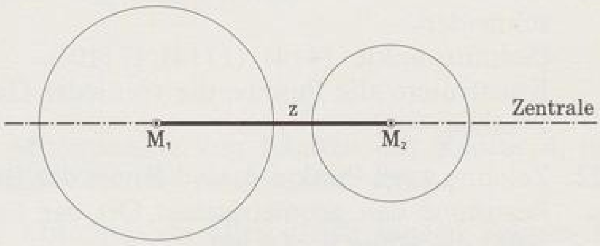
München, 2000

3.2 Zwei Kreise

3.2 Zwei Kreise

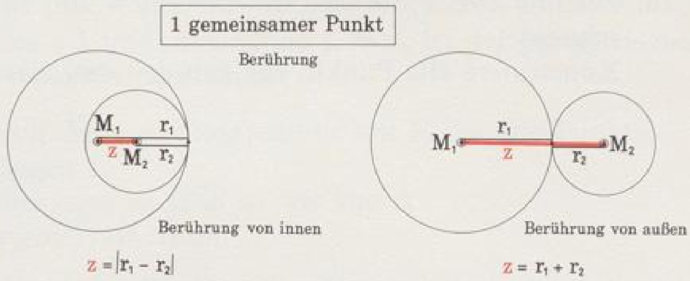
Die Lage zweier Kreise wird von der Entfernung z ihrer Mittelpunkte bestimmt, z heißt auch **Zentrale** der beiden Kreise, und je nach Bedarf meint man damit die Gerade M_1M_2, die Strecke $[M_1M_2]$ oder auch die Länge $\overline{M_1M_2}$. Die Zentrale ist Symmetrieachse der beiden Kreise. Schneiden sich die Kreise in zwei Punkten S und T, dann liegen diese Schnittpunkte symmetrisch bezüglich der Zentrale. Die Verbindungsgerade ST heißt **Chordale** der beiden Kreise. Chordale und Zentrale stehen aufeinander senkrecht (Achsensymmetrie!).





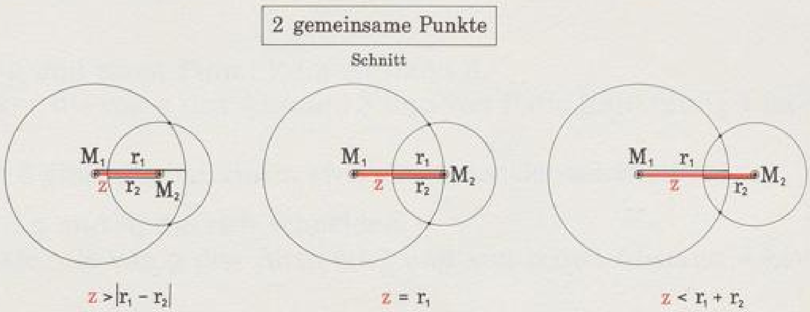
Zwei Kreise haben entweder keinen, einen oder zwei Punkte gemeinsam. Der für uns wichtigste Fall ist der mit einem gemeinsamen Punkt. Wir sagen dann: Die Kreise **berühren** sich. Dabei gibt es zwei Möglichkeiten: Berührung von außen und Berührung von innen.

$z = |r_1 - r_2|$ oder $z = r_1 + r_2$



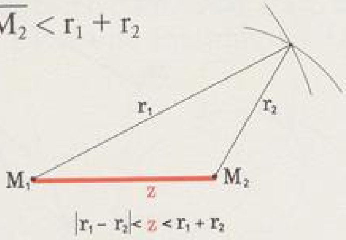
Verschieben wir den äußeren kleinen Kreis nach innen oder den inneren kleinen Kreis nach außen, dann gibt es jedesmal zwei Schnittpunkte. Hätten wir den kleinen Kreis jeweils in die Gegenrichtung verschoben, dann hätten sich die Kreise nicht mehr getroffen.

$|r_1 - r_2| < z < r_1 + r_2$

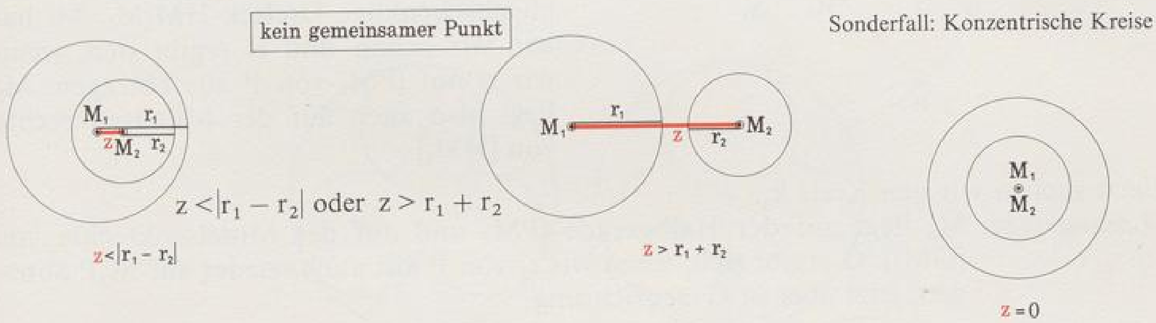


Die komplizierten algebraischen Beziehungen zwischen den Radien und der Zentrale entpuppen sich als Formen der Dreiecksungleichung. Wenn es zwei Schnittpunkte gibt, dann braucht man sich bloß die Dreiecksungleichung hinzuschreiben:

$|r_1 - r_2| < \overline{M_1M_2} < r_1 + r_2$

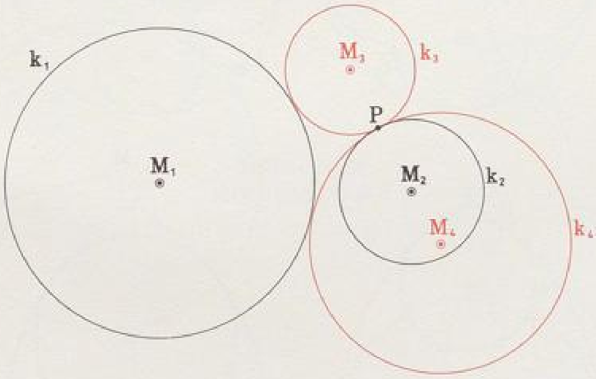


Keinen gemeinsamen Punkt gibt es, wenn mindestens eines der Ungleichungszeichen andersrum steht.



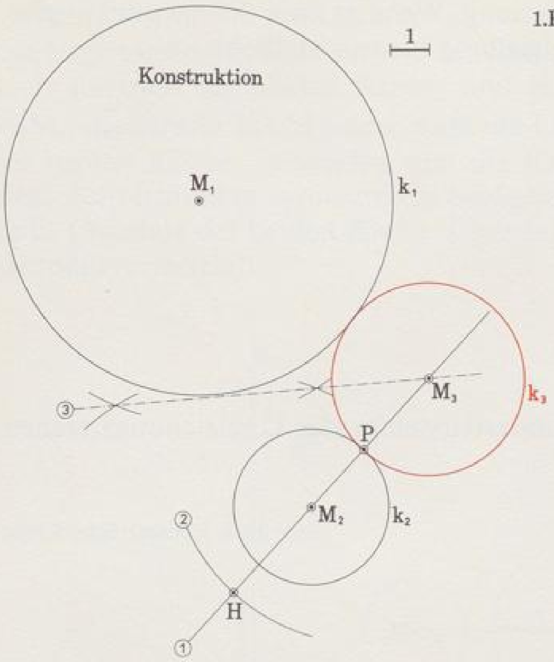
Zum Thema Kreisberührung gibt es viele Aufgaben. Eine führen wir vor:
Gegeben sind zwei Kreise k_1 und k_2 mit den Radien $r_1 = 5$ und $r_2 = 2$ und $\overline{M_1M_2} = 8{,}4$ sowie ein Punkt P auf k_2.
Konstruiere einen Kreis, der k_2 im Punkt P und k_1 berührt.

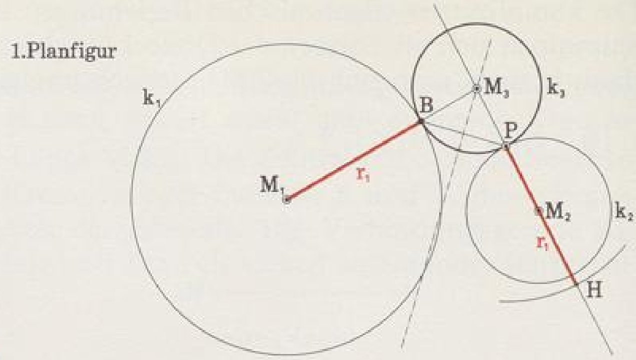
Überlegungsfigur



Weil sich zwei Kreise von innen oder von außen berühren können, müssen wir mehrere Fälle unterscheiden. Wie die Überlegungsfigur zeigt, gibt es in unserm Beispiel zwei Fälle, die Kreise k_3 und k_4. Wir nehmen uns die Fälle einzeln vor.

Zuerst suchen wir den Kreis k_3, der beide Kreise von außen berührt.
Lösungsidee: M_3 liegt auf alle Fälle auf der Halbgeraden $[M_2P$.

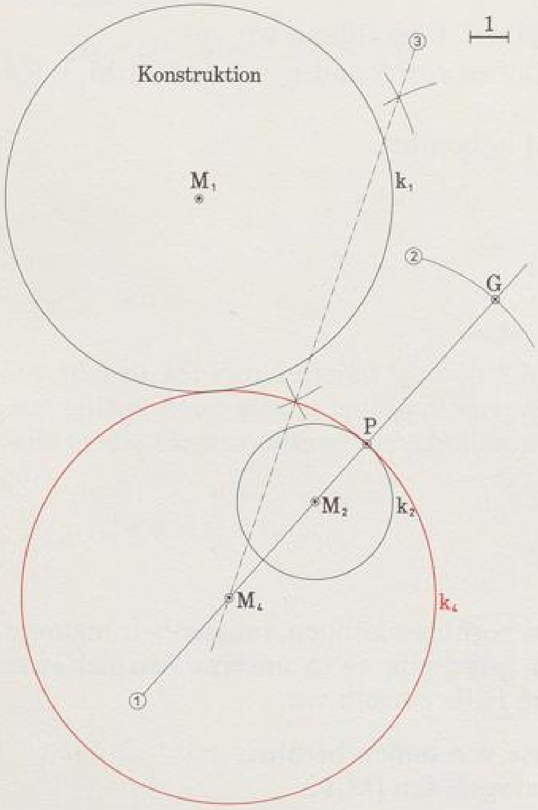


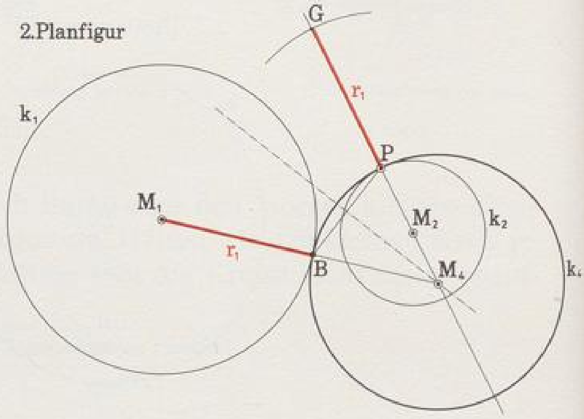


Das Dreieck PM_3B ist gleichschenklig, aber leider kennen wir M_3 und den Berührungspunkt B nicht. Verlängern wir beide Schenkel um r_1, dann bekommen wir das gleichschenklige Dreieck HM_3M_1. M_1 haben wir schon und H ergibt sich, wenn wir r_1 auf $[PM_2$ von P aus abtragen. M_3 liegt also auch auf der Mittelsenkrechte von $[HM_1]$.

Jetzt suchen wir den Kreis k_4.

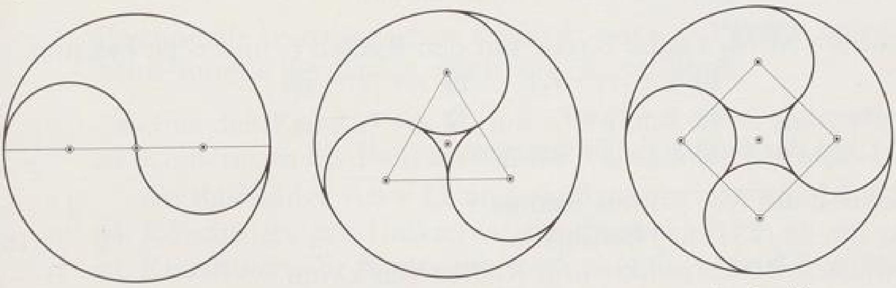
Lösungsidee: M_4 liegt auf der Halbgerade $[PM_2$ und auf der Mittelsenkrechte von $[GM_1]$. G ergibt sich, wenn wir r_1 von P aus auch wieder auf M_2P abtragen, jetzt aber in Gegenrichtung.





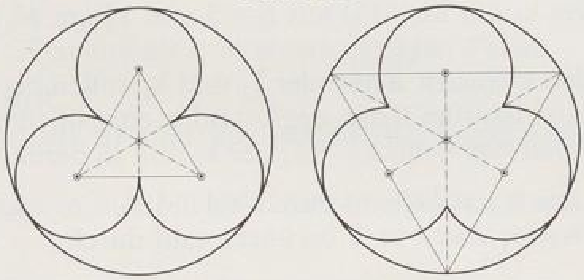
Vor allem im Maßwerk der gotischen (Kirchen-)Fenster gehören Kreise, die sich schneiden oder berühren, zu den unverkennbaren Stilelementen. Maßwerk ist eine Sammelbezeichnung für räumliche, steinerne, mit dem Zirkel »gemessene« Zierfüllungen zum Beispiel in den Fensterrosen sowie Rad- und Spitzbogenfenstern. Die Grundformen des Maßwerks sind Pässe und Fischblasen. Die folgenden Bilder zeigen einige einfache Beispiele.

FISCHBLASEN

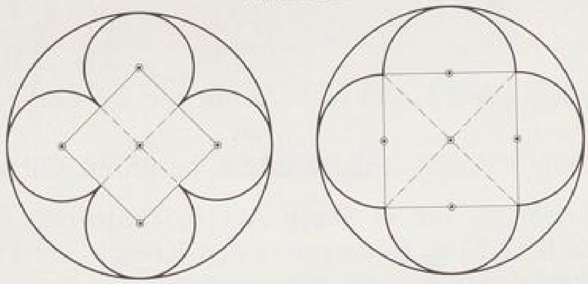


zweischweifig dreischweifig vierschweifig

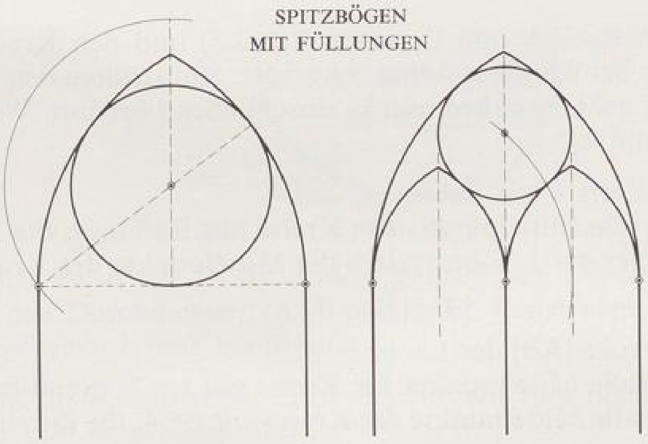
DREIPÄSSE



VIERPÄSSE



SPITZBÖGEN
MIT FÜLLUNGEN



Aufgaben

1. Der Kreis k_1 hat den Radius $r_1 = 24$, die Zentrale z hat die Länge 37.
Was weiß man vom Radius r_2 des Kreises k_2,
a) wenn k_2 den Kreis k_1 berührt,
b) wenn k_2 den Kreis k_1 in zwei Punkten schneidet,
c) wenn k_2 und k_1 keinen gemeinsamen Punkt haben?

•2. Von der Zentrale $z = \overline{M_1M_2}$ zweier Kreise mit den Radien r_1 und r_2 ist bekannt:
a) $z = 0$ **b)** $z < |r_1 - r_2|$ **c)** $z = |r_1 - r_2|$
d) $r_1 + r_2 > z > |r_1 - r_2|$ **e)** $z = r_1 + r_2$ **f)** $z > r_1 + r_2$.
Beschreibe die Lage der Kreise möglichst genau.

3. Zeichne den Kreis k um M(7 | 7) mit Radius 5. 14
a) Der Kreis k_1 um $M_1(13 | 11{,}5)$ berührt k. 0 0 16
Gib die möglichen Berührpunkte und Radien von k_1 an. 0
b) Der Kreis k_2 um $M_2(5 | 8{,}5)$ berührt k.
Gib die möglichen Berührpunkte und Radien von k_2 an.

4. Zeichne die Kreise k_1 um $M_1(5 | 5)$ mit $r_1 = 5$ und k_2 um $M_2(11 | 13)$ mit 16
$r_2 = 2{,}5$. 0 0 15
a) Konstruiere den kleinsten Kreis, der k_1 und k_2 außen berührt. 0
b) Konstruiere den kleinsten Kreis, der k_1 und k_2 einschließend berührt.
c) Konstruiere einen Kreis mit $r = 1{,}5$, der k_1 und k_2 berührt.

5. Zeichne einen Kreis k um M(6 | 6) durch T(11 | 8,5). 12
Konstruiere die Kreise, die k in T berühren und durch 0 0 17
a) A(15 | 10,5) 0
b) B(13 | 9)
c) C(14 | 2,5)
d) D(5 | 2,5) gehen.

6. Zeichne die Kreise k_1 und k_2 um M(6 | 6) mit $r_1 = 2{,}5$ und $r_2 = 5$ sowie den Punkt P(7,5 | 10).
Konstruiere die Kreise durch P, die k_1 und k_2 berühren. Gib die Berührpunkte an.

7. **a)** Zeichne den Kreis k_1 um O durch A(1 | 5,5) und den Kreis k_2 um 12
P(10 | 7) durch B(11,5 | 4). Konstruiere den Kreis k, der k_1 und k_2 au- 2 0 14
ßen berührt und durch A geht. Wo berührt k den Kreis k_2? 0

b) Zeichne den Kreis k_1 um O durch A(5 | 2,5) und den Kreis k_2 um 9
P(11 | 3), der bei 9,5 die x-Achse schneidet. Konstruiere den Kreis k, 1 0 16
der durch A geht, k_1 außen und k_2 einschließend berührt. Wo berüh- 1
ren sich k und k_2?

8. Zeichne einen Kreis k mit Radius 3.
a) Konstruiere alle Mittelpunkte der Kreise mit Radius 1, die k berühren.
b) P ist ein Punkt auf k. Konstruiere die Mittelpunkte der Kreise, die k in P berühren.

9. Zeichne die Strecke [AB] der Länge 5.
a) Konstruiere alle Mittelpunkte der Kreise mit $r = 2$, die durch A laufen.
b) Konstruiere alle Mittelpunkte der Kreise mit $r = 4$, die durch A und B laufen.

•10. Zeichne einen Kreis k um M mit Radius 4 und einen Punkt P auf k. Der Punkt A hat von P die Entfernung 3.

a) Konstruiere für $\overline{MA} = 6$ den Kreis, der k in P berührt und durch A läuft.

b) Wo liegt A, wenn Aufgabe **a)** keine Lösung hat?

c) Konstruiere die Punkte A, für die der gesuchte Kreis den kleinstmöglichen Radius hat.

11. Zeichne die konzentrischen Kreise k_1 mit $r_1 = 3$ und k_2 mit $r_2 = 5$. Konstruiere alle Mittelpunkte der Kreise, die k_1 und k_2 berühren.

12. Zeichne den Kreis k_1 um M_1 mit $r_1 = 4$ und einen Kreispunkt P.

a) Konstruiere die Punkte A und B so, dass das Dreieck APB gleichschenklig ist, die Basislänge $\overline{AB} = 12$ und die Symmetrieachse M_1P hat. M_1 liegt auf AB.

b) Konstruiere den Umkreis k_2 des Dreiecks APB.

c) Konstruiere die Kreise mit Radius 3, die k_2 in A berühren.

13. Zeichne einen Kreis k um M und einen Punkt P außerhalb von k. Der Thaleskreis über [MP] schneidet k in S und T.

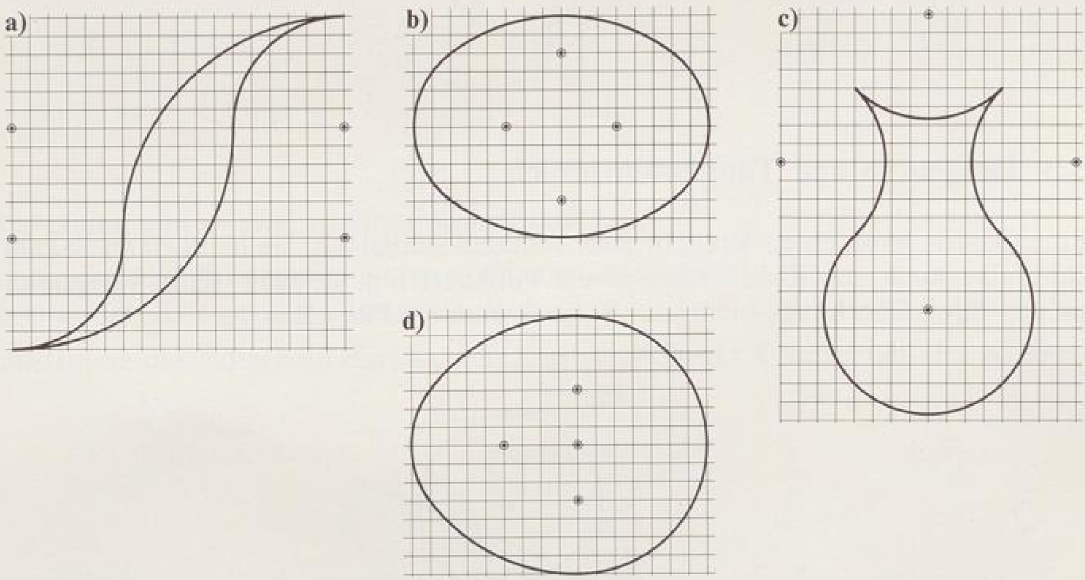
Begründe: **a)** $\overline{SP} = \overline{PT}$

b) SP schneidet k in einem einzigen Punkt.

14. BOGENBILDER

Die Figuren **a)** bis **d)** sind aus Bögen sich berührender Kreise zusammengesetzt.

Zeichne die Figuren ins Heft und markiere die Punkte, in denen sich zwei Bögen treffen.



⁝15. Zeichne einen Kreis um M mit Radius 5 und einen Durchmesser [AB] sowie die Kreise mit den Durchmessern [AM] und [MB]. Konstruiere die beiden Kreise, die die drei gegebenen Kreise berühren.

16. Überlege dir die Konstruktionen in den Bildern zum Maßwerk auf Seite 65, beschreibe sie und konstruiere nach.

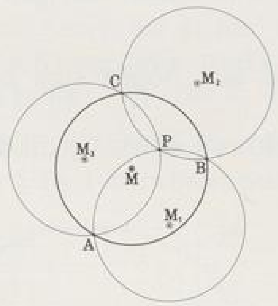
• **17.** Zeichne zwei gleich große Kreise so, dass einer durch den Mittelpunkt des andern geht.
Konstruiere in den Durchschnitt der Kreisflächen zwei gleich große Kreise, die sich und die gegebenen Kreise berühren.

• **18.** Zwei Kreise k_1 und k_2 berühren sich in B. Eine Gerade durch B schneidet die Kreise in S_1 und S_2.
Zeige: $M_1S_1 \parallel M_2S_2$.

19. Zwei Kreise k_1 und k_2 schneiden sich in P und Q, $[PK_1]$ und $[PK_2]$ sind Durchmesser.
Zeige: Q liegt auf $[K_1K_2]$.

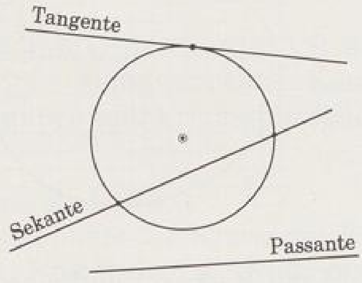
• **20.** SAUL ist ein Parallelogramm mit dem Mittelpunkt M.
Zeige: Die Umkreise der Dreiecke SAM und ULM berühren sich.

⁝ **21.** BIERDECKEL
Zeichne drei Kreise mit demselben Radius r, die sich in einem Punkt P schneiden. Dabei entstehen noch drei weitere Schnittpunkte A, B und C.
Zeige: Auch A, B und C liegen auf einem Kreis mit Radius r.



3.3 Tangenten und Tangentenviereck

Eine Gerade kann einen Kreis in zwei Punkten schneiden, sie heißt dann **Sekante;** sie kann aber auch den Kreis in nur einem Punkt treffen, sie heißt dann **Tangente.** Trifft sie den Kreis überhaupt nicht, dann nennt man sie **Passante.**



Der Abstand einer Gerade g vom Kreismittelpunkt M entscheidet, ob die Gerade Sekante, Tangente oder Passante ist. Von diesen Geraden ist die Tangente die Bedeutsamste. Weil sie vom Mittelpunkt M den Abstand r hat, steht sie im Berührpunkt B senkrecht auf dem Radius [BM]. Diese Eigenschaft verwenden wir zur