Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 2000

3.3 Tangenten und Tangentenviereck

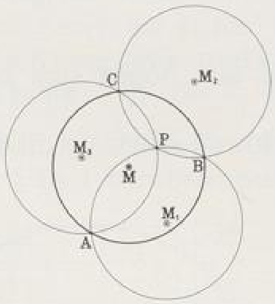
• **17.** Zeichne zwei gleich große Kreise so, dass einer durch den Mittelpunkt des andern geht.
Konstruiere in den Durchschnitt der Kreisflächen zwei gleich große Kreise, die sich und die gegebenen Kreise berühren.

• **18.** Zwei Kreise k_1 und k_2 berühren sich in B. Eine Gerade durch B schneidet die Kreise in S_1 und S_2.
Zeige: $M_1S_1 \parallel M_2S_2$.

19. Zwei Kreise k_1 und k_2 schneiden sich in P und Q, $[PK_1]$ und $[PK_2]$ sind Durchmesser.
Zeige: Q liegt auf $[K_1K_2]$.

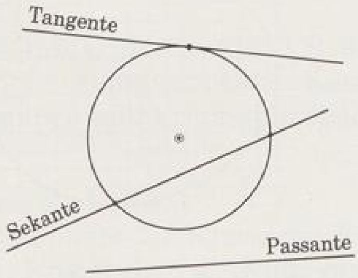
• **20.** SAUL ist ein Parallelogramm mit dem Mittelpunkt M.
Zeige: Die Umkreise der Dreiecke SAM und ULM berühren sich.

21. BIERDECKEL
Zeichne drei Kreise mit demselben Radius r, die sich in einem Punkt P schneiden. Dabei entstehen noch drei weitere Schnittpunkte A, B und C.
Zeige: Auch A, B und C liegen auf einem Kreis mit Radius r.



3.3 Tangenten und Tangentenviereck

Eine Gerade kann einen Kreis in zwei Punkten schneiden, sie heißt dann **Sekante;** sie kann aber auch den Kreis in nur einem Punkt treffen, sie heißt dann **Tangente.** Trifft sie den Kreis überhaupt nicht, dann nennt man sie **Passante.**

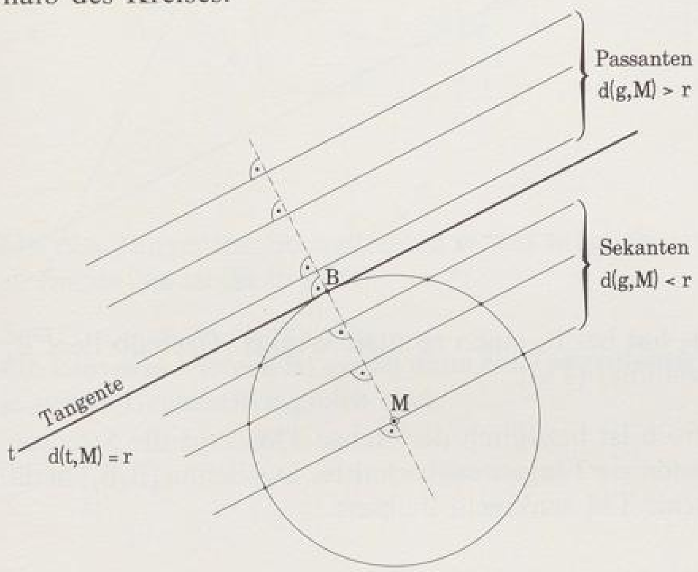


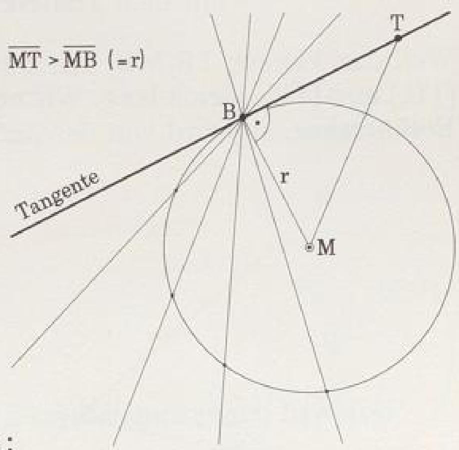
Der Abstand einer Gerade g vom Kreismittelpunkt M entscheidet, ob die Gerade Sekante, Tangente oder Passante ist. Von diesen Geraden ist die Tangente die Bedeutsamste. Weil sie vom Mittelpunkt M den Abstand r hat, steht sie im Berührpunkt B senkrecht auf dem Radius [BM]. Diese Eigenschaft verwenden wir zur

Definition

Eine Gerade, die in einem Kreispunkt B senkrecht auf dem Radius [BM] steht, heißt **Tangente.** B heißt **Berührpunkt.**
Man sagt auch: Die Tangente **berührt** den Kreis.

Jeder Punkt T der Tangente (außer B!) ist von M weiter entfernt als B, liegt also außerhalb des Kreises.

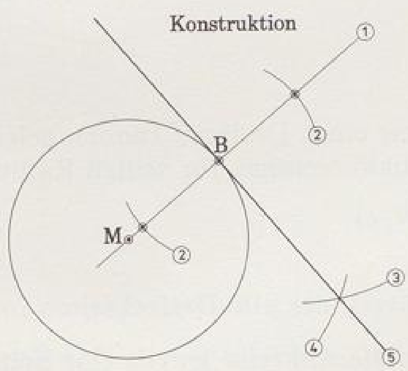


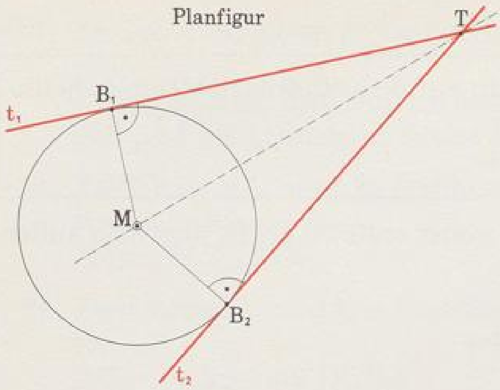


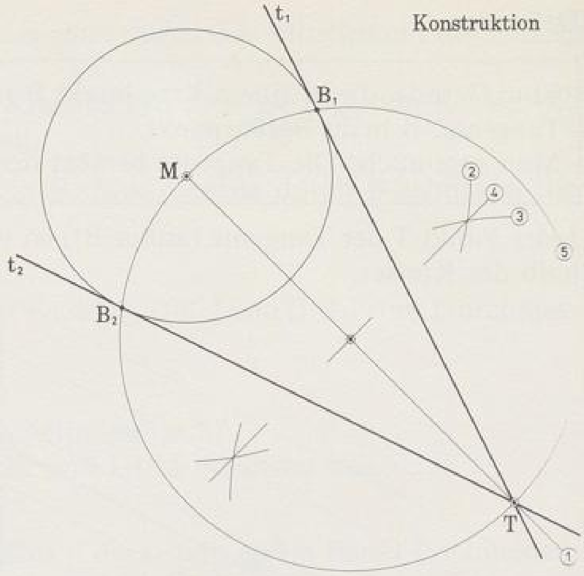
Für Tangenten gibt es zwei wichtige Konstruktionen:

1. Konstruiere die Tangente in einem gegebenen Berührpunkt B.
Lösungsidee: Die gesuchte Tangente ist das Lot in B auf BM.

2. Konstruiere die Tangenten durch einen gegebenen Punkt T außerhalb des Kreises.

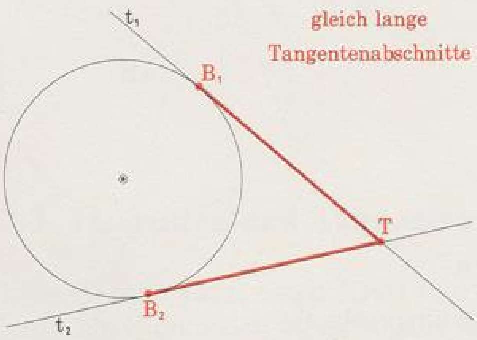


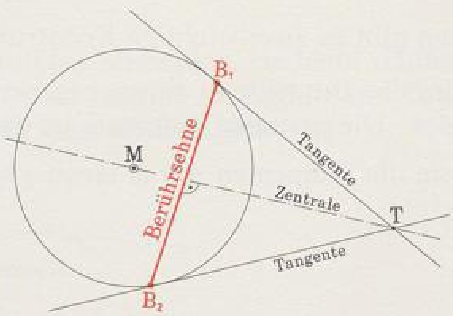




Lösungsidee: Das Dreieck MTB_1 hat bei B_1 einen rechten Winkel. Deshalb liegt B_1 auf dem Thaleskreis über [TM].

Weil das Viereck TB_1MB_2 symmetrisch ist bezüglich der Achse TM, sind die Strecken $[TB_1]$ und $[TB_2]$ gleich lang. Wir nennen sie **Tangentenabschnitte.** Die Sehne $[B_1B_2]$ heißt **Berührsehne,** sie wird von der Zentrale TM senkrecht halbiert.





Früher haben wir den Inkreis eines Dreiecks kennen gelernt. Sein Mittelpunkt ist der Schnittpunkt W der Winkelhalbierenden, für seinen Radius r gilt

$r = d(W, a) = d(W, b) = (W, c).$

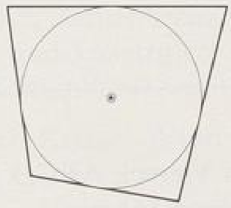
Jetzt können wir auch sagen:

Der Inkreis ist derjenige Kreis, der alle Dreieckseiten von innen berührt.

Dementsprechend berühren die Ankreise jeweils eine Seite und zwei Verlängerungen.

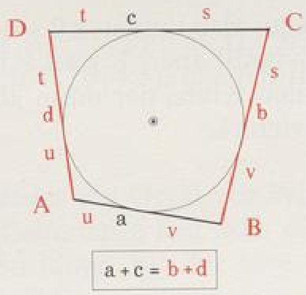
Allgemein definiert man den Inkreis eines (konvexen) Vielecks als den Kreis, der alle Vieleckseiten von innen berührt. Im Gegensatz zum Dreieck hat nicht jedes Vieleck einen Inkreis, was wir schon bei Vierecken sehen. Vierecke, die einen Inkreis haben, heißen **Tangentenvierecke,** weil ihre Seiten Tangenten am Inkreis sind. Deshalb schneiden sich beim Tangentenviereck (und nur bei diesem) alle vier Winkelhalbierenden in genau einem Punkt, nämlich dem Inkreis-Mittelpunkt.

Tangentenviereck



Mit den Tangentenabschnitten ist es uns möglich, ein Kriterium für Tangentenvierecke zu finden; es steckt in dem

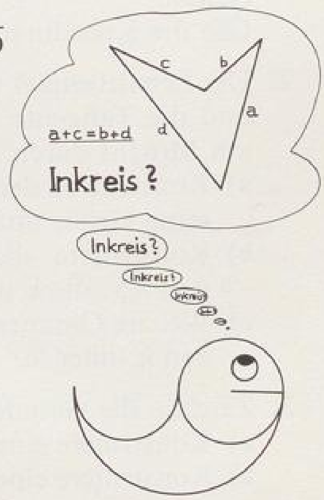
Satz:
Ein konvexes Viereck ist genau dann ein Tangentenviereck, wenn die Summen der Längen je zweier Gegenseiten gleich sind.

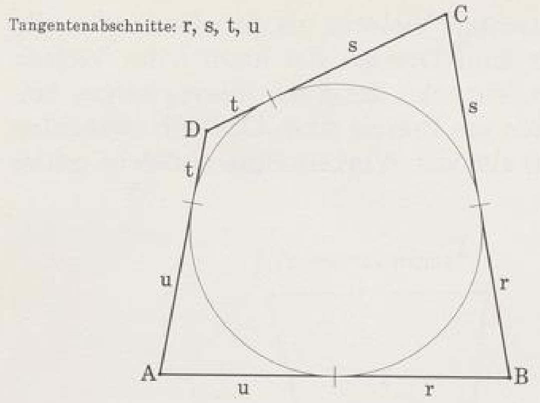


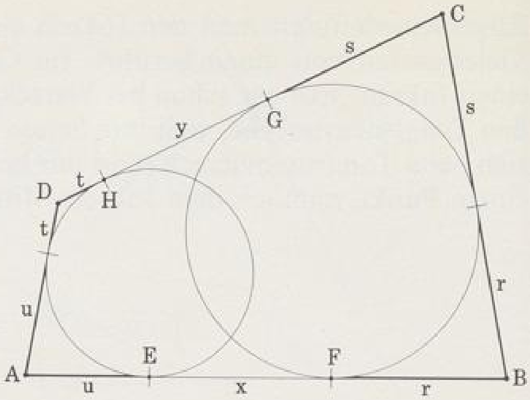
Wegen der Formulierung »genau dann« müssen wir zwei Behauptungen beweisen.

Vor.: ABCD ist ein Tangentenviereck.
Beh.: $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$
Bew.: $\left.\begin{aligned} \overline{AB} + \overline{CD} &= u + v + s + t \\ \overline{BC} + \overline{AD} &= v + s + u + t \end{aligned}\right\}$ also $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$

und jetzt die Gegenrichtung:







Vor.: Im konvexen Viereck ABCD gilt $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$

Beh.: ABCD hat einen Inkreis.

Bew.: Wenn es keinen Inkreis gäbe, dann existierten mindestens zwei Kreise, von denen jeder drei Viereckseiten (oder die Verlängerungen) berührte, aber die vierte nicht, wie zum Beispiel im Bild. Wegen der Voraussetzung gilt

$$\left.\begin{aligned} \overline{AB} + \overline{CD} &= u + x + r + s + y + t \\ \overline{BC} + \overline{AD} &= r + s + u + t \end{aligned}\right\} \quad \text{also muss } x + y = 0 \text{ sein.}$$

Weil x und y Streckenlängen, also immer $\geqq 0$ sind, müssen sie einzeln gleich null sein: $x = 0$ und $y = 0$. Das heißt aber, E und F fallen zusammen, ebenso G und H. Folglich gibt es nur einen Kreis, der dann aber alle vier Seiten berührt. Das Viereck ist ein Tangentenviereck.

Aufgaben

1. Zeichne den Kreis um M(4|2) durch A(2|5). 6
Konstruiere die Tangenten in den Schnittpunkten von Kreis und x-Achse. 0 0 8
5
Gib die Koordinaten des Tangenten-Schnittpunkts an.

2. Der **Schnittwinkel von Kreis und Gerade** ist der Winkel, den die Gerade und die Tangente in einem Schnittpunkt bilden. Zeichne den Kreis k um M(6|6) durch A(8,5|11). 12
0 0 14
0
a) Konstruiere den Schnittwinkel von k und AB mit B(1|6) und gib seine Größe auf 0,5° genau an.
b) Konstruiere die Sekanten durch den Kreispunkt $C(11|y_c)$ mit $y_c < 8{,}5$, die k unter 45° schneiden.
c) Welche Geraden durch den Kreispunkt $D(x_d|7)$ mit $x_d < 11$ schneiden k unter 90° bzw. 0°?

3. Zeichne die Gerade AB mit A(7|2) und B(5|8). 9
a) Konstruiere einen Kreis mit r = 5, der AB in A unter 55° schneidet. 0 0 12
b) Konstruiere einen Kreis durch A und B, der AB unter 45° schneidet. 0

4. Der **Schnittwinkel zweier Kreise** ist der Winkel, den die Tangenten in einem Schnittpunkt bilden.

a) Zeichne den Kreis k_1 um $M_1(5|5)$ durch $A(8{,}5|3)$ und den Kreis k_2 um $M_2(13|9)$ durch A. Konstruiere den Schnittwinkel von k_1 und k_2 und gib seine Größe auf 0,5° genau an. 14 / 0 0 14 / 0

b) Zeichne den Kreis k_1 um $M_1(5|6)$ durch $A(9|9)$ und konstruiere einen Kreis k_2 mit $r = 2{,}5$, der k_1 in A senkrecht schneidet. 14 / 0 0 13 / 0

•**c)** Löse Aufgabe **b)** für den Schnittwinkel 60°, Zahlenkreuz wie **b)**.

d) Zeichne den Kreis k_1 wie in Aufgabe **a)** und konstruiere einen Kreis k_2 um $M_2(10|9{,}5)$, der k_1 senkrecht schneidet, Zahlenkreuz wie in **a)**.

5. Unter welchem Winkel schneiden sich zwei Kreise, deren Radien in einem Schnittpunkt den Winkel

a) 50° **b)** 130°
c) 90° **d)** 180° bilden?

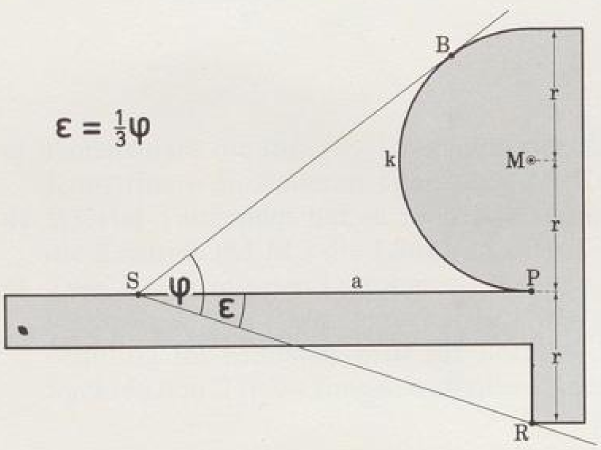
6. Der Kreis k um $M(5|2{,}5)$ geht durch den Ursprung. 15
Konstruiere die Tangenten durch $P(15|-5)$. Wie lang ist die Berührsehne? 1 0 17 / 6
Welchen Winkel bilden die Tangenten? Wie lang sind die Tangentenabschnitte?

7. Zeichne die Gerade AB mit $A(5|1)$ und $B(3|1{,}5)$. 9
Konstruiere den Kreis durch $P(10|5{,}5)$, der AB in B berührt. 0 0 11 / 1

•**8.** WINKELDRITTLER
Um 300 v. Chr. hat Archimedes ein Gerät zur Winkel-Dreiteilung erfunden. Will man die Winkel φ dritteln, dann legt man die Kante a durch den Scheitel S und verrutscht das Gerät so lange, bis der eine Schenkel des Winkels durch R geht und der andere den Halbkreis k berührt.

Begründe: $\varepsilon = \frac{1}{3}\varphi$. Warum ist das keine Konstruktion?

Stelle durch Konstruieren fest, welche spitzen Winkel sich nicht dritteln lassen, wenn $a = 4r$.



9. Zeichne einen Kreis um M(6|8) mit r = 5 und die Gerade PQ mit P(9|2,5) und Q(17|8,5). 14 / 0 0 20 / 0

a) Konstruiere die Tangenten, die parallel zu PQ sind.
b) Konstruiere Tangenten, die mit PQ einen Winkel von 53° bilden.
•c) Konstruiere Punkte so auf PQ, dass die Tangentenabschnitte die Länge 5 haben.
•d) Y ist ein Punkt der y-Achse. Zwei Kreistangenten durch Y bestimmen eine Berührsehne der Länge 6. Konstruiere Y und die Berührsehne.

10. Gegeben ist ein Kreis k_1, auf ihm ein Punkt P und eine Passante g. Konstruiere einen Kreis k_2, der k_1 in P und außerdem g berührt.

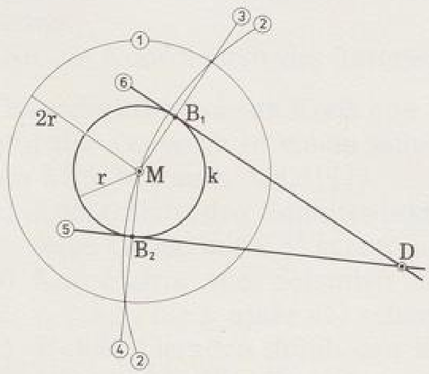
•11. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge 8. Konstruiere drei kongruente Kreise, die sich berühren und von denen jeder außerdem noch
a) zwei Dreieckseiten berührt
b) eine Dreieckseite in der Mitte berührt.

•12. Zeichne ein Quadrat mit der Seitenlänge 8. Konstruiere vier kongruente Kreise so, dass sich je drei Kreise berühren und jeder außerdem noch
a) zwei Quadratseiten berührt
b) eine Quadratseite in der Mitte berührt.

13. Zeichne einen Kreis k mit r = 2 und einen Punkt P, der vom Kreismittelpunkt die Entfernung 5 hat. Konstruiere durch P die beiden Kreistangenten t_1 und t_2. Konstruiere die Kreise, die t_1, t_2 und k berühren.

:14. Zeichne einen Kreis k um M mit r = 5 und eine Gerade g, die von M den Abstand d = 0,5 hat.
a) Konstruiere die Kreise mit Radius 2, die g und k berühren. (Achtung!)
b) Bei welchen Abständen d ergeben sich 7, 6, 5 (!), 4, 2, 1, 0 Kreise mit Radius 2, die g und k berühren?

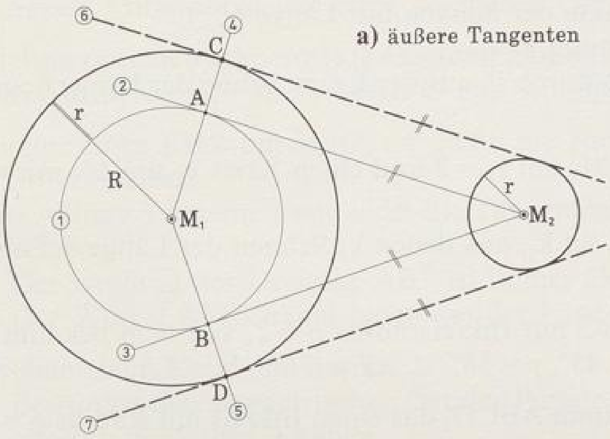
15. DEUTERATANG



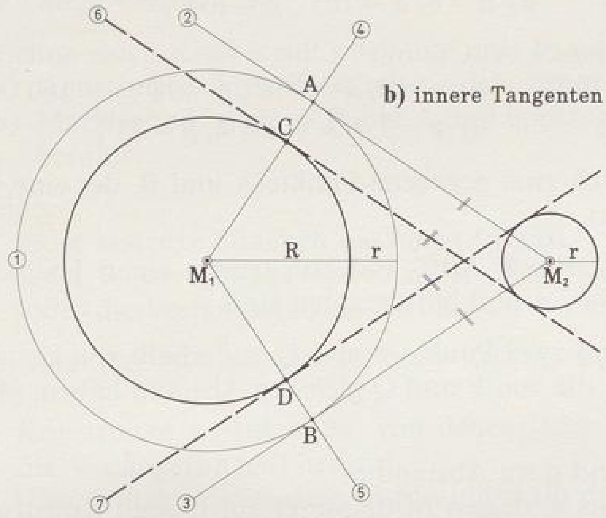
Deute die zweite Tangentenkonstruktion (Konstruktion durch D an den Kreis).

•16. GEMEINSAME TANGENTEN

a) Das Bild zeigt die Konstruktion der **äußeren Tangenten.** Beschreibe 12
sie und führe sie durch für k_1 um $M_1(3|0)$ durch $P_1(2{,}5|1{,}5)$ und k_2 0 0 13
um $M_2(8|5)$ durch $P_2(9{,}5|9{,}5)$. 2
Bestimme die Koordinaten der Berührpunkte.



b) Das Bild zeigt die Konstruktion der **inneren Tangenten.** 18
Beschreibe sie und führe sie durch für k_1 um $M_1(15|4)$ durch 0 0 18
$P_1(16|1)$ und k_2 um $M_2(5|14)$ durch $P_2(2|5)$. 0
Bestimme die Koordinaten der Berührpunkte.



c) Konstruiere die inneren Tangenten der Kreise von Aufgabe **a).**
Konstruiere die äußeren Tangenten der Kreise von Aufgabe **b).** Berührpunkte!

d) Wieviel Tangenten haben zwei Kreise mit $r = 3$ und $R = 5$ gemeinsam, wenn die Zentrale $[M_1M_2]$ die Länge 11 oder 8 oder 4 oder 2 oder 1 hat?

e) Zwei Räder mit den Durchmessern 1 m und 0,6 m sind mit einem Treibriemen verbunden. Die Radachsen haben einen Abstand von 1,4 m. Zeichne die Anordnung im Maßstab 1:20 für »offenen Trieb« (gleichlaufende Räder) und »gekreuzten Trieb« (gegenlaufende Räder).

17. Zwei gerade Bahnlinien mit einem Richtungsunterschied von 160° sollen durch einen Kreisbogen von 1200 m Radius so verbunden werden, dass die Bahnlinien Tangenten am Kreisbogen sind.
Konstruiere einen Lageplan im Maßstab 1:10000.

18. Zeichne einen Kreis k um M mit $r = 5$.
a) Wo liegen die Mittelpunkte der Sehnen mit Länge 6?
b) P hat von M die Entfernung 8.
Konstruiere eine Sekante durch P, aus der k eine Sehne der Länge 6 ausschneidet.

•19. Zeichne einen Kreis k_1 um M_1 mit $r_1 = 2$ und einen Kreis k_2 um M_2 mit $r_2 = 4$ so, dass $\overline{M_1M_2} = 9$ ist.
Konstruiere jene Tangenten an k_1, aus denen k_2 Sehnen der Länge 5,5 ausschneidet.

20. Konstruiere ein Dreieck ABC mit Inkreisradius $\varrho = 2$, von dem bekannt ist
a) $\alpha = 67°, c = 8$ **b)** $\beta = 45°, \gamma = 58°$ **c)** $\gamma = 60°, h_a = 5{,}5$.

21. Konstruiere ein Parallelogramm ABCD, das einen Inkreis mit Radius $\varrho = 1{,}5$ und
a) $\alpha = 45°$ **b)** $\overline{AC} = 6$ hat.

22. Konstruiere ein Trapez ABCD mit Inkreis, bei dem die Basis $a = 7$, $\alpha = 60°$ und $h = 5$ ist.

23. Konstruiere ein Tangentenviereck ABCD mit Inkreisradius $\varrho = 2$ sowie
a) $\beta = 75°$, $a = 5$ und $b = 4{,}5$ **b)** $d = 6, \alpha = 105°, \beta = 135°$.

24. Konstruiere ein Tangentenviereck ABCD mit
a) $a = 5, b = 6, \alpha = 95°, \beta = 100°$ **b)** $a = 3, \alpha = 108°, \beta = 98°, \gamma = 100°$
c) $a = 4, b = 5, c = 7, \overline{AC} = 8$ **d)** $a = 7, b = 6, c = 4, \beta = 75°$.

25. Konstruiere einen Kreis durch zwei gegebene Punkte A und B, der eine vorgegebene Parallele zu AB berührt.

26. Zeichne ein spitzwinkliges Dreieck ABC und konstruiere einen Halbkreis mit dem Mittelpunkt auf c so, dass a und b Tangenten sind.

•27. Gegeben sind ein Kreis k und zwei Punkte P und Q außerhalb von k.
Konstruiere jene Tangenten, die von P und Q gleichen Abstand haben. (4 Lösungen!)

28. Zeichne zwei Parallelen p und q im Abstand 6.
a) k_1 ist ein Kreis mit Radius 4, dessen Mittelpunkt auf p liegt. Konstruiere die Kreise, die p und q berühren und deren Mittelpunkte auf k_1 liegen.
b) A liegt zwischen p und q im Abstand 2 von p.
Konstruiere die Kreise durch A, die p und q berühren.
c) Die Gerade a schneidet p unter 60°.
Konstruiere Kreise mit den Tangenten a, p und q.
d) p und q sind Tangenten am Kreis k_2.
Konstruiere Kreise, die k_2, p und q berühren.
e) Der Mittelpunkt des Kreises k_3 liegt nicht auf der Mittelparallele von p und q.
Konstruiere die Kreise, die k_3, p und q berühren.

•29. Zeichne eine Gerade g und konstruiere einen Kreis mit Radius 2, der g berührt und

a) von einem gegebenen Punkt P den Abstand 3 hat (der Abstand Punkt–Kreis ist die kürzeste Entfernung eines Kreispunkts von dem Punkt)

b) dessen Mittelpunkt von einer gegebenen Gerade h den Abstand 3 hat.

30. Zeichne zwei sich schneidende Geraden g und h und markiere einen Punkt G auf g. Konstruiere einen Kreis durch G mit Mittelpunkt auf g und der Tangente h.

•31. Zeichne einen Kreis um M mit $r = 2$ und die Tangenten t_1 und t_2, die sich in T unter 50° schneiden.
Eine weitere Tangente t schneidet die Tangentenabschnitte von t_1 und t_2 in A und B. Zeige:

a) Der Umfang des Dreiecks ABT ist immer gleich, egal, wie t liegt.

b) Der Winkel AMB hängt nicht von der Lage von t ab.

•32. Zeichne einen Kreis mit Radius 2.

a) Bestimme den geometrischen Ort der Punkte, von denen aus die Tangentenabschnitte die Länge 3 haben.

b) Zeichne außerdem die Passante p und konstruiere einen Punkt X auf p, von dem aus die Tangentenabschnitte die Länge 3 haben.

⁚33. Zeichne die Punkte P und Q mit der Entfernung 7. Konstruiere einen Kreis mit $r = 1{,}5$ so, dass die Tangentenabschnitte von P aus die Länge 3 und von Q aus die Länge 4 haben

34. Zeichne einen Kreis k mit $r = 2$ und eine Passante p.

a) Konstruiere einen Kreis mit $r = 1{,}5$, der p und k berührt.

⁚b) Markiere auf p einen Punkt A und konstruiere einen Kreis, der p in A und k berührt.

35. Zeige:

a) Jeder konvexe Drachen hat einen Inkreis.

b) Jeder Windvogel hat einen Ankreis, das heißt einen Kreis, der alle vier Seiten (oder die Verlängerungen) berührt.

36. Zeichne das Viereck ABCD mit A(0|6), B(14|6), C(11,5|12) und D(4,5|12).

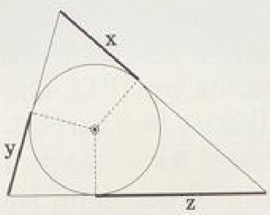
12
0 0 14
0

a) Konstruiere 4 »Inkreise«, von denen jeder drei Viereckseiten (oder die Verlängerungen) berührt.
(Die Mittelpunkte sollen nicht außerhalb des Vierecks liegen).

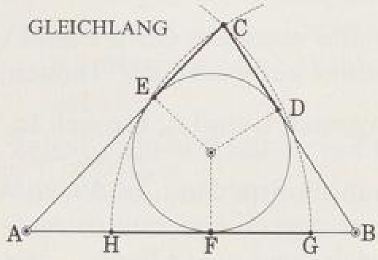
b) Zeige: Fallen zwei solcher »Inkreise« zusammen, dann ist ABCD ein Tangentenviereck.

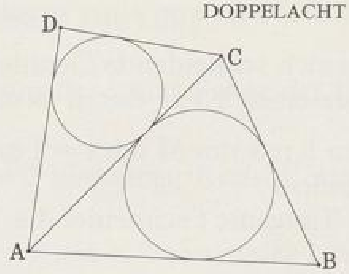
•37. Zeichne ein Parallelogramm, das sich in zwei Tangenten-Trapeze zerlegen lässt.

38. UMFANG
Gegeben ist ein Dreieck mit seinem Inkreis.
Der Umfang des Dreiecks sei u.
Zeige: $u = 2(x + y + z)$.



39. GLEICHLANG
Gegeben ist ein Dreieck ABC mit seinem Inkreis.
Der Kreis um A mit Radius b schneidet c in G, der Kreis um B mit Radius a schneidet c in H.
Zeige: $\overline{HF} = \overline{EC} = \overline{FG} = \overline{CD}$.





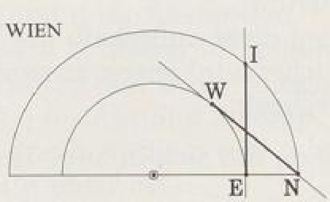
40. DOPPELACHT
Zeichne zwei Kreise, die sich außen berühren, und eine Strecke [AC], die auf der Tangente durch den Berührpunkt liegt. [AC] ist gemeinsame Seite der Dreiecke ACD und ABC.
Die beiden Kreise sind die Inkreise dieser Dreiecke.
Zeige: **a)** ABCD ist ein Tangentenviereck.
b) Auch die Inkreise der Dreiecke ABD und BCD berühren sich.

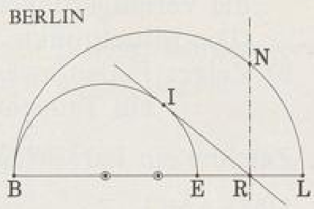
41. Zeichne einen Kreis um M und um ihn herum ein Tangententrapez.
Zeige: Von M aus sieht man die Schenkel unter dem gleichen Winkel. Wie groß ist er?

42. Zeichne die Kreise k_1 um M_1 und k_2 um M_2, die sich außen in B berühren, und ihre gemeinsame Tangente t. Eine äußere gemeinsame Tangente w berührt k_1 in P und k_2 in Q.
Zeige: **a)** Der Schnittpunkt A von t und w ist die Mitte von [PQ].
b) $\sphericalangle PBQ = \sphericalangle M_1AM_2 = 90°$.

•43. Zwei Kreise berühren sich in B. Eine Sekante durch B schneidet die Kreise in S und T. Zeige: Die Tangenten in S und T sind parallel.

•44. WIEN
Zeichne zwei konzentrische Halbkreise. Die Tangente am kleinen Kreis in E schneidet den großen Kreis in I und die Tangente durch N an den kleinen Kreis berührt in W.
Zeige: $\overline{EI} = \overline{WN}$.





⁝45. BERLIN
Zwei Halbkreise berühren sich von innen in B. Der Kreispunkt N liegt auf der Mittelsenkrechte von [EL]. Durch die Mitte R von [EL] geht eine Gerade, die den kleinen Halbkreis in I berührt.
Zeige: **a)** $\overline{NR} = \overline{RI}$ **b)** B, I und N liegen auf einer Gerade.
(*Tip:* erst nach Wien, dann Halbkreis schieben bis Berührung!)