Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

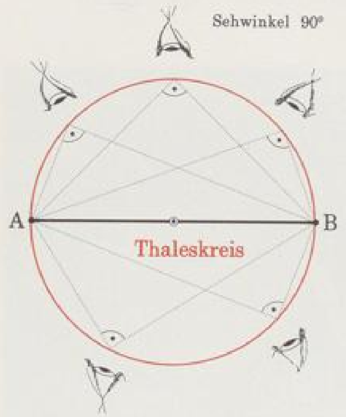
München, 2000

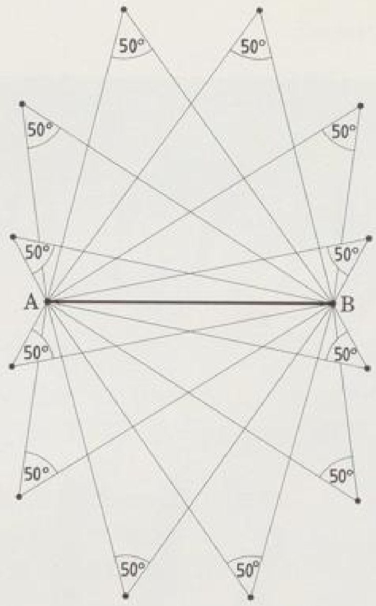
4.1 Fasskreisbogen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83477

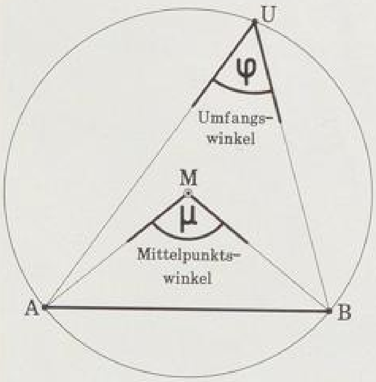
4.1 Fasskreisbogen

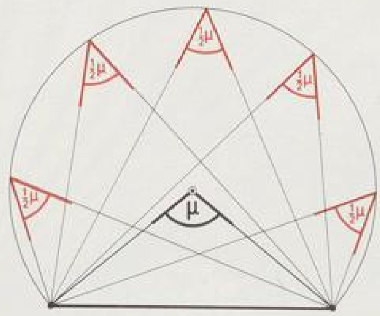
Alle Punkte, von denen aus man eine Strecke [AB] unter einem 90°-Winkel sieht, liegen auf dem Thaleskreis über [AB].





Wo aber liegen alle Punkte, von denen aus man die Strecke [AB] zum Beispiel unter einem 50°-Winkel sieht? Wir konstruieren uns einige Punkte; wir achten darauf, dass $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180° - 50° = 130°$ ist. Die Punkte liegen dem Augenschein nach auf zwei Kreisbögen mit der gemeinsamen Sehne [AB]. Die Vermutung stimmt, aber um sie zu beweisen, müssen wir einen kleinen Umweg machen. Für den Beweis brauchen wir noch zwei neue Begriffe. Im Bild sehen wir einen Kreis mit dem Mittelpunkt M, einen Punkt U auf dem Umfang des Kreises und eine Sehne [AB].





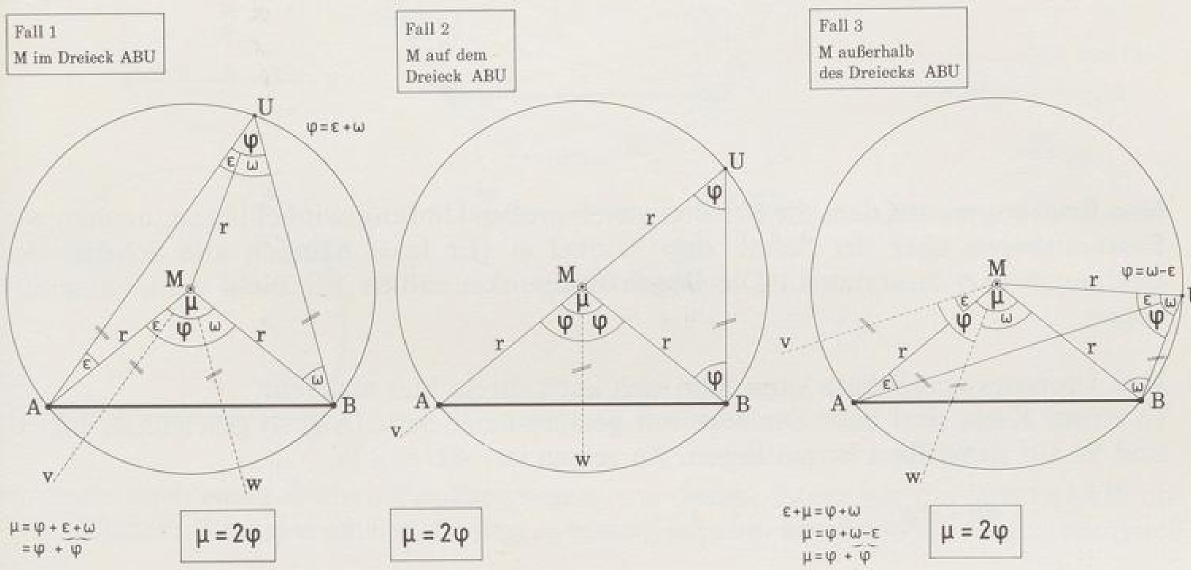
Der Winkel $\mu = \sphericalangle AMB$ heißt **Mittelpunktswinkel** über der Sehne [AB], der Winkel $\varphi = \sphericalangle AUB$ heißt **Umfangswinkel** über der Sehne [AB]. Zwischen μ und φ besteht ein einfacher Zusammenhang:

Mittelpunktswinkel-Satz:
Liegen Umfangs- und Mittelpunktswinkel auf derselben Seite einer Sehne [AB], so ist der Mittelpunktswinkel doppelt so groß wie der Umfangswinkel.

Für den Beweis müssen wir drei Fälle unterscheiden (Bilder!).
In allen drei Fällen erleichtern drei Hilfslinien den Beweis:

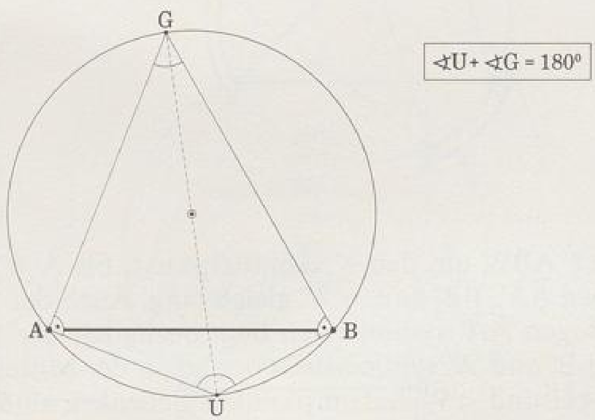
Die erste Hilfslinie verbindet M und U. Dabei entstehen die beiden gleichschenkligen Dreiecke AMU und BMU mit den Basiswinkeln ε und ω.
Die beiden andern Hilfslinien sind v und w, sie gehen durch M, sind parallel zu den Schenkeln des Umfangswinkels φ und bilden selber wieder den Winkel φ. Bei M entstehen außerdem als Z-Winkel nochmals die Winkel ε und ω.

In allen drei Fällen ergibt sich $\mu = 2\varphi$.



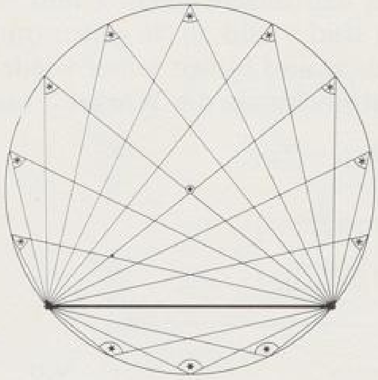
Wandert U auf dem Kreisbogen von A nach B, dann ändert sich der Mittelpunktswinkel μ nicht, also auch nicht der Umfangswinkel φ.
Was ist los, wenn U auf dem kleineren Kreisbogen liegt?
UM schneidet den Kreis in G. Die Winkel bei A und B sind beide gleich 90° (Thales).
Wegen der Winkelsumme im Dreieck gilt deshalb der

Satz:
Die Umfangswinkel auf verschiedenen Seiten einer Sehne ergänzen sich zu 180°.



Und als Zusammenfassung formulieren wir den

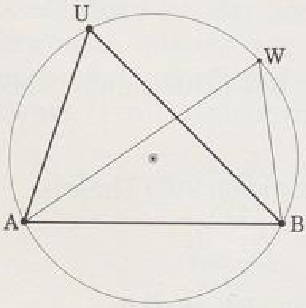
Umfangswinkel-Satz:
Alle Umfangswinkel auf derselben Seite einer Sehne sind gleich groß.

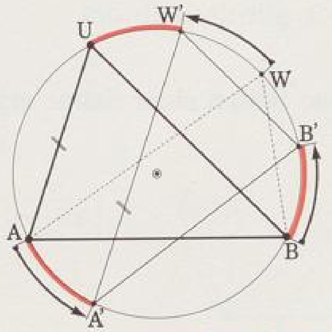


Den Kreisbogen, auf dem die Scheitel gleich großer Umfangswinkel liegen, nennen wir **Fasskreisbogen** über der Sehne zum Winkel φ. (Er fasst nämlich alle Scheitel der Umfangswinkel zusammen.) Die Bogen-Endpunkte zählen wir nicht zum Fasskreisbogen.

Den Umfangswinkel-Satz kann man sich auch direkt klar machen:
In einem Kreis sind zwei Dreiecke mit gemeinsamer Seite [AB] so gezeichnet, dass U und W auf demselben Bogen liegen. Zu zeigen ist: $\sphericalangle U = \sphericalangle W$.

$\sphericalangle U \stackrel{?}{=} \sphericalangle W$



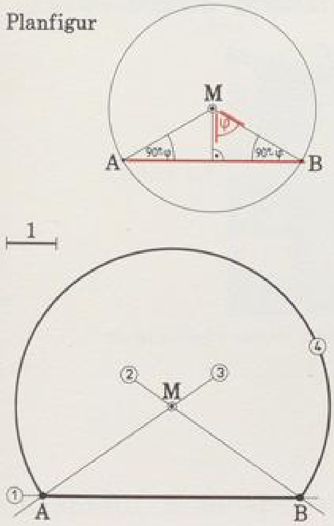


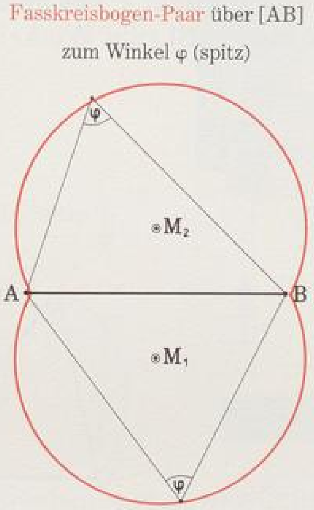
gleich große Bögen

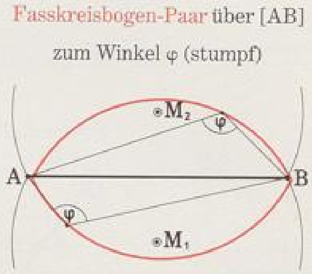
Man dreht das Dreieck ABW um den Kreismittelpunkt, bis $A'W' \parallel AU$ ist. Wegen der Drehung sind die Bögen $\widehat{AA'}$, $\widehat{BB'}$ und $\widehat{WW'}$ gleich lang. Auch der Bogen $\widehat{UW'}$ hat diese Länge, weil er zum Bogen $\widehat{AA'}$ symmetrisch liegt bezüglich der Mittelsenkrechte von [AU]. Also liegen auch B′ und W′ symmetrisch bezüglich der Mittelsenkrechte von [BU], das heißt $B'W' \parallel BU$. $\sphericalangle U$ und $\sphericalangle W'$ haben parallele Schenkel, sind also gleich groß.

Grundkonstruktion: Fasskreisbogen

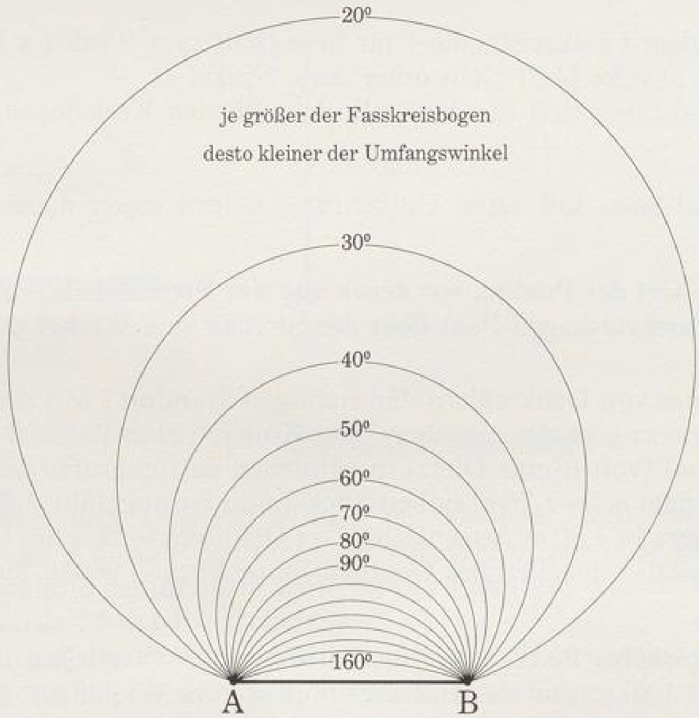
Gegeben ist die Strecke [AB] der Länge 5 und $\varphi = 55°$.
Gesucht ist ein Fasskreisbogen über [AB].
Lösungsidee: Man konstruiert das gleichschenklige Dreieck ABM aus $\overline{AB} = 5$ und $\sphericalangle M = 2\varphi = 110°$. Wegen der Winkelsumme im Dreieck sind die Basiswinkel $90° - \varphi = 35°$.





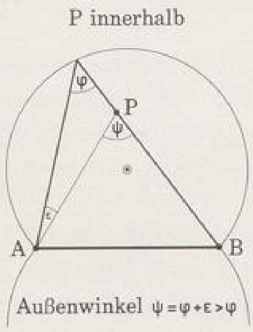


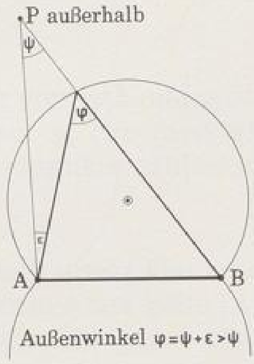
Es gibt noch einen zweiten Fasskreisbogen, von dessen Punkt aus die Strecke [AB] unter gleichem Winkel erscheint. Er liegt symmetrisch zum konstruierten Bogen bezüglich AB.



Ist φ stumpf, dann konstruiert man das Fasskreisbogen-Paar zum jetzt spitzen Supplementwinkel $180° - \varphi$, nimmt aber die kürzeren Bögen. Nach dem Umfangswinkel-Satz sieht man von jedem Punkt des Fasskreisbogen-Paars die Strecke [AB] unter demselben Winkel φ. Liegen umgekehrt alle Punkte, von denen aus [AB] unter dem Winkel φ erscheint, auch auf diesem Fasskreisbogen-Paar? Sie tun's tatsächlich, es gilt nämlich die Umkehrung des Umfangswinkel-Satzes:

Satz:
Wenn man die Strecke [AB] von einem Punkt P aus unter dem Winkel φ sieht, dann liegt P auf dem Fasskreisbogen-Paar über [AB] zum Winkel φ.





Beweis durch Widerspruch:
Wir beweisen die Kontraposition des Satzes, sie lautet:

Wenn P nicht auf dem Fasskreisbogen-Paar über [AB] zum Winkel φ liegt, dann sieht man von P aus die Strecke [AB] nicht unter dem Winkel φ.
Der Beweis der Kontraposition für den Fall, dass PB den Kreisbogen schneidet, steht im Bild.

Der Umfangswinkel-Satz und seine Umkehrung liefern einen neuen geometrischen Ort:

> **Der geometrische Ort der Punkte, von denen aus eine Strecke unter dem Winkel φ erscheint, ist das Fasskreisbogen-Paar über der Strecke zum Winkel φ.**

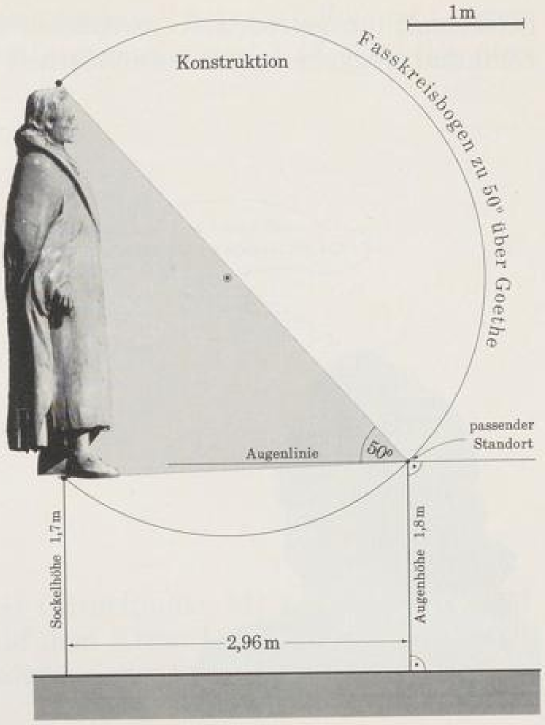
Wie finden Betrachter von Denkmälern den richtigen Standort? Mit dem Umfangswinkel-Satz ist die Antwort schnell gefunden. Herr Knipsall zum Beispiel ist gerade dabei das Goethe-Denkmal (von Elmar Dietz) in München zu fotografieren. Der Münchner Goethe steht auf einem etwa 1,70 m hohen Sockel und ist ungefähr 3,40 m groß. Knipsall hält seine Kamera in 1,80 m Augenhöhe. Der Öffnungswinkel des Objektivs ist 50°. Wo muss sich Knipsall hinstellen um Goethen (ohne Sockel) genau aufs Bild zu bringen?

Lösungsidee: Der gesuchte Punkt ist der Schnittpunkt der Parallele zum Boden im Abstand 1,80 m und des Fasskreisbogens zum Winkel 50° über Goethe.

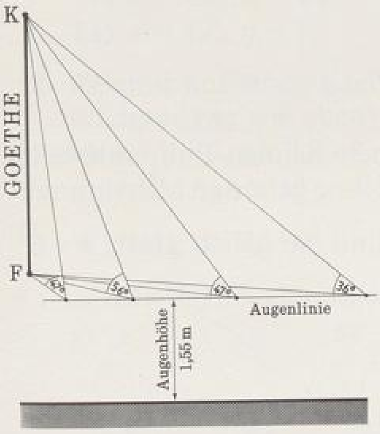
nicht so

sondern so!

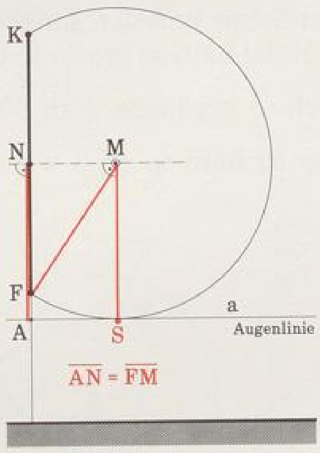
Wo ist der Sehwinkel am größten ?



Knipsalls Frau aber möchte Goethen unter möglichst großem Winkel sehen. Ihre Augenhöhe ist 1,55 m. Wo muss sie sich hinstellen?



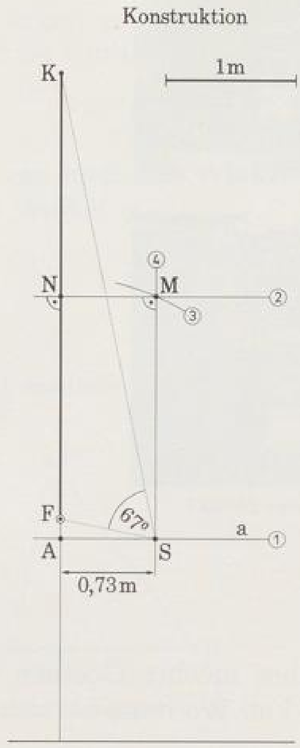
Planfigur



Lösungsidee: Weil zum größeren Winkel der kleinere Fasskreisbogen gehört, sucht Frau Knipsall den kleinsten Fasskreisbogen über Goethe, der ihre Augenlinie gerade noch trifft. In der Planfigur erkennt sie, dass der Mittelpunkt M des Fasskreisbogens

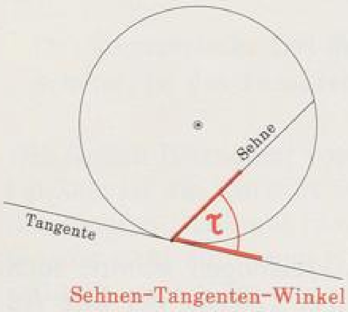
1. auf der Parallele durch N (Goethes Mittelpunkt) zur Augenlinie a,
2. auf dem Kreis um F mit Radius $\overline{AN}$ liegt.

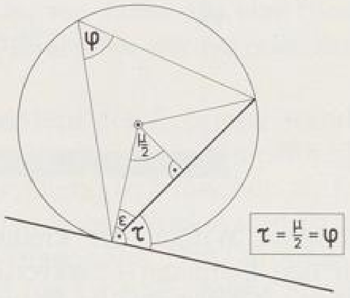
Ihrer maßstabsgetreuen Konstruktion entnimmt Frau Knipsall, dass sie 73 cm vom Denkmal weggehen muss und Goethen dann unter einem Winkel von 67° sieht.



Sehnen-Tangenten-Winkel

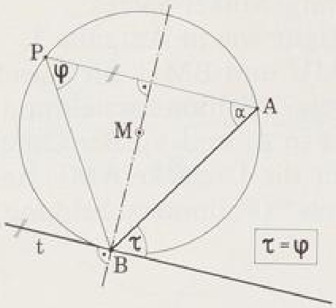
Der Winkel τ zwischen einer Sehne und der Tangente in einem Sehnen-Endpunkt heißt **Sehnen-Tangenten-Winkel.** Er ist halb so groß wie der zur Sehne gehörige Mittelpunktswinkel μ. Sowohl τ als auch $\frac{\mu}{2}$ ergänzen ε zu 90°, also sind sie gleich groß: $\tau = \frac{\mu}{2}$. Auch der Umfangswinkel φ ist halb so groß wie der Mittelpunktswinkel, also ist $\tau = \varphi$.





Zu diesem Schluss gelangt man direkt mit folgender Überlegung:
Weil alle Umfangswinkel auf derselben Seite einer Sehne gleich groß sind (siehe voriges Kapitel), können wir den Scheitel P des Umfangswinkels speziell so wählen, dass BM

Symmetrieachse von A und P ist. Wegen ihres gemeinsamen Lots sind PA und t parallel. φ und α sind gleich groß (Achsensymmetrie!), ebenso α und τ (Z-Winkel!), also gilt: $\tau = \varphi$.



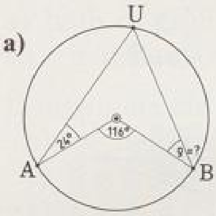
Aufgaben

1. Zeichne als Überlegungsfigur einen Kreis (Mittelpunkt M) mit Radius 4 und einer Sehne [AB]. U und V sind Punkte auf dem Kreis; U und M liegen auf derselben Seite der Sehne, V liegt auf der anderen Seite. Bezeichne die Winkel
   $\sphericalangle AMB = \mu$, $\sphericalangle AUB = \varphi$, $\sphericalangle AVB = \psi$,
   $\sphericalangle BAM = \alpha$, $\sphericalangle MAU = \varepsilon$, $\sphericalangle MBU = \eta$.
   Berechne jeweils die restlichen Winkel, falls gilt:
   a) $\mu = 120°$, $\varepsilon = 15°$ **b)** $\varphi = 40°$, $\eta = 5°$
   c) $\alpha = 20°$, $\eta = 20°$ **•d)** $\psi = 170°$, $\eta = 15°$
   ••e) $\varepsilon = 12°$, $\eta = 3°$ **•f)** $\varepsilon = 0°$, $\eta = 30°$.

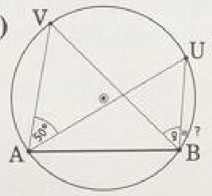
2. Zeichne auf einen Kreis mit Radius 4 die Punkte A, V, B und U so, dass gilt (Bezeichnungen wie oben):
   a) $\mu = 150°$, $\varepsilon = 15°$ **b)** $\varphi = 45°$, $\eta = 22{,}5°$
   c) $\overline{AB} = 6$, $\eta = 30°$ **d)** $\overline{AB} = 6$, $\eta = 0°$.

3. WINKELGRADE?

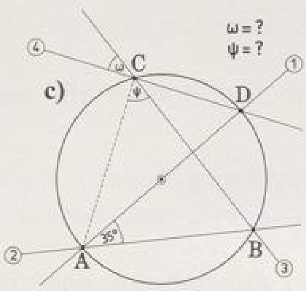
a)



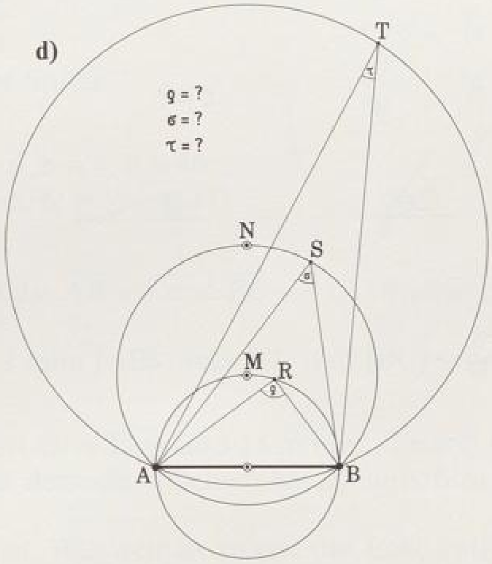
b)



c)



d)



•4. Verbinde auf dem Zifferblatt einer Uhr die Punkte A(11) und B(3) sowie C(1) und D(8).
Berechne den Schnittwinkel der Verbindungsgeraden. Zeichnung!

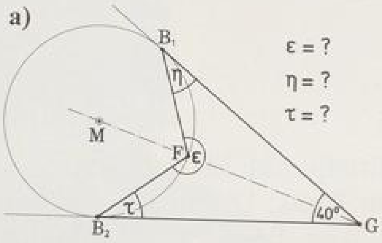
:5. Andere Beweise des Umfangswinkel-Satzes
Zeichne die Überlegungsfigur wie in Aufgabe **1.**

a) Drücke die Winkel AMU und BMU mit ε und η aus. Berechne damit μ.
Wieso ist das der Beweis? (Fallunterscheidung!)

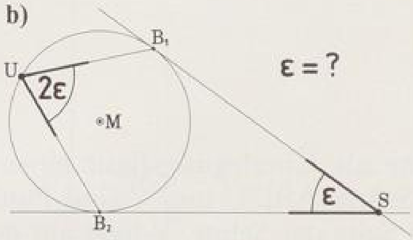
b) Die Gerade UM teilt μ in μ_1 und μ_2. Berechne diese Teilwinkel mit Hilfe des Außenwinkel-Satzes für die Dreiecke AMU und BMU.
Wieso ist das der Beweis? (Fallunterscheidung!)

6. WINKELMUT

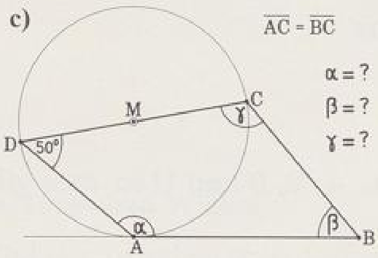
a)



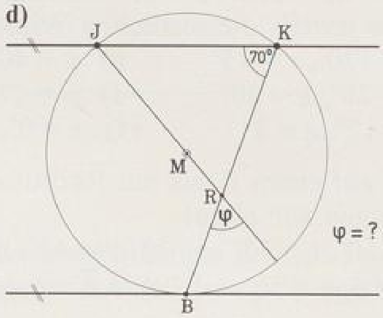
b)



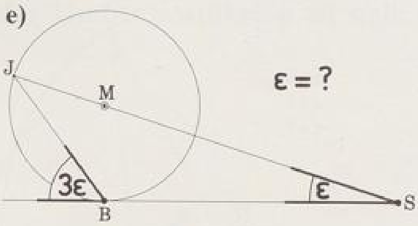
c)



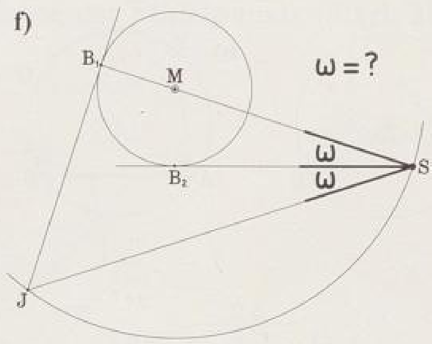
d)



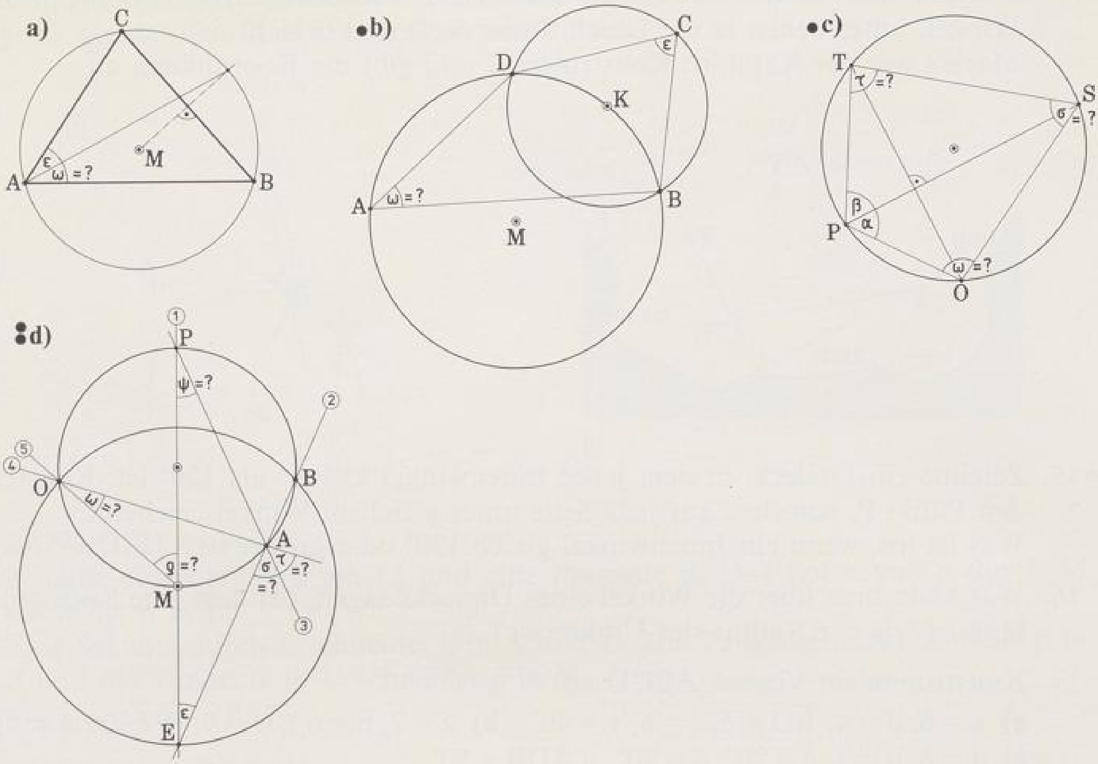
e)



f)



⁚7. ZUSAMMENHANG?



8. Konstruiere über der Strecke [AB] der Länge 5 das Fasskreisbogen-Paar zum Umfangswinkel:
a) 60° **b)** 90° **c)** 75° **d)** 100°.

9. Für welchen Umfangswinkel liegen die Mittelpunkte des Fasskreisbogen-Paars auf dem Fasskreisbogen-Paar? Zeichnung!

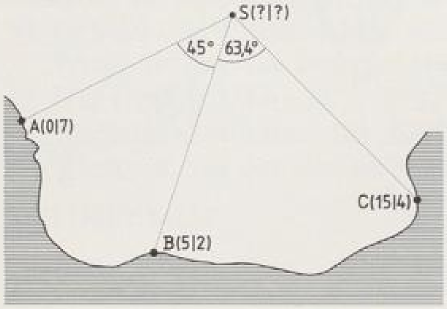
•10. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit der Basis $c = 6$ und $a = 5$. Verwandle dieses Dreieck unter Beibehaltung der Basis in ein anderes Dreieck, bei dem der Winkel an der Spitze
a) halb so groß **b)** doppelt so groß
ist wie der ursprüngliche Winkel an der Spitze.

11. Konstruiere ein Dreieck ABC mit
a) $c = 5$, $h_c = 6$, $\gamma = 30°$ **b)** $a = 6$, $b = 8$, $\beta = 40°$
c) $b = 6$, $\beta = 50°$, $s_b = 5$ **d)** $a = 6$, $h_c = 5$, $\alpha = 45°$
•e) $s_c = 4$, $\beta = 50°$, $\gamma = 100°$.

12. A, B und C liegen so auf einer Gerade, dass $\overline{AB} = 5$ und $\overline{BC} = 4$ ist (B zwischen A und C).
Konstruiere alle Punkte, von denen aus man [AB] unter 60° und [BC] unter 30° sieht.

•13. Ein Haus mit rechteckigem Grundriss ist 20 m lang und 15 m breit. Es soll so fotografiert werden, dass zwei Seiten unter demselben Sehwinkel 30° aufs Bild kommen.
Konstruiere den Standort des Fotografen. Wie weit ist er von der Ecke entfernt?

14. RÜCKWÄRTSEINSCHNEIDEN
Um den Standort S seines Schiffs auf der Karte festzulegen, misst der Kapitän die Winkel, unter denen er die Leuchttürme A, B und C sieht.
Mach's wie der Kapitän: Konstruiere S und gibt die Koordinaten an.



•15. Zeichne ein Dreieck, in dem jeder Innenwinkel kleiner als 120° ist. Konstruiere den Punkt P, von dem aus jede Seite unter gleichem Winkel erscheint.
Was ist los, wenn ein Innenwinkel gleich 120° oder größer ist?

16. Was kann man über die Winkel eines Dreiecks sagen, bei dem eine Seite genauso lang ist wie der Radius des Umkreises?

17. Konstruiere ein Viereck ABCD mit
a) $a = 6$, $d = 4$, $\overline{BD} = 5$, $c = 6$, $\gamma = 40°$ **b)** $a = 7$, $b = 6$, $\overline{BD} = 7$, $\beta = 80°$, $\delta = 110°$
c) $a = 6$, $b = 5$, $\beta = 80°$, $\delta = 90°$, $\sphericalangle ADB = 50°$.

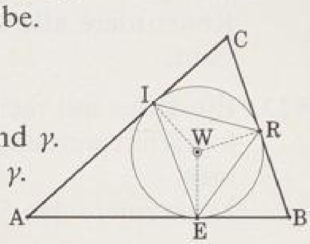
18. **a)** Im Innern eines Vierecks ABCD gebe es einen Punkt P, von dem aus alle vier Seiten unter gleichem Winkel erscheinen. Wie groß ist dieser Winkel, welcher besondere Punkt ist das?
b) Gibt es auch Vierecke, bei denen von einem Punkt P außerhalb des Vierecks alle Seiten unter 90° erscheinen? Welche besonderen Eigenschaften müssen diese Vierecke haben?

19. Konstruiere eine Raute ABCD mit $a = 5$ und $\alpha = 100°$.
a) Konstruiere alle Punkte, von denen aus man alle Rautenseiten unter 20° sieht.
b) Kann man alle Rautenseiten von einem beliebigen Punkt aus unter 50° sehen?

20. Zeichne zwei gleich große Kreise, die sich in P und Q schneiden. Eine Gerade durch Q schneidet die Kreise in A und B.
Zeige: APB ist ein gleichschenkliges Dreieck.

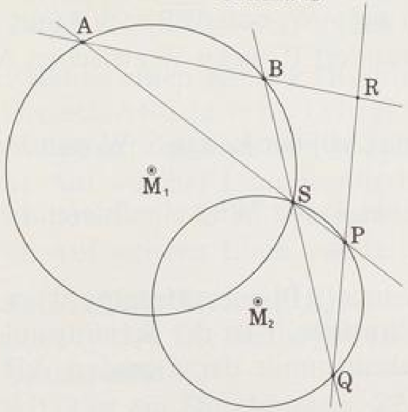
•21. Zwei Kreise k_1 und k_2 schneiden sich in A und D.
Eine Gerade durch D schneidet k_1 außerdem in W und k_2 in U.
Zeige: Der Winkel WAU ist für jede solche Gerade derselbe.

22. VERWINKELT
Gegeben sind ein Dreieck ABC und sein Inkreis um W.
a) Berechne die Winkel EWR, RWI und EWI aus α, β und γ.
b) Berechne die Winkel IRE, REI und EIR aus α, β und γ.
c) Kann das Dreieck ERI rechtwinklig sein?

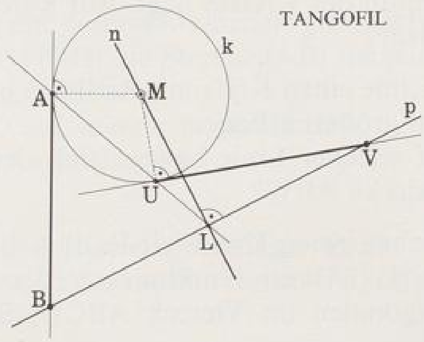


23. SEKTANG
Zeichne die Figur und beweise: Der Schnittwinkel der Sekanten AB und PQ ist so groß wie der Schnittwinkel der beiden Kreise.

SEKTANG



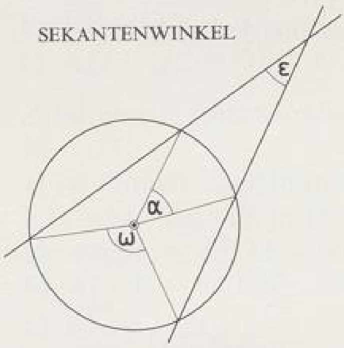
TANGOFIL



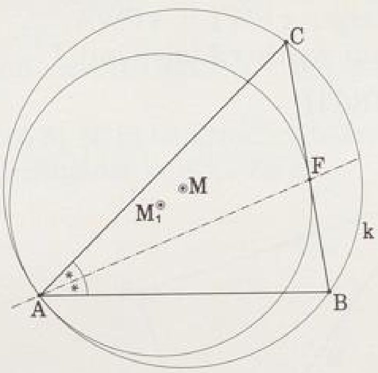
24. TANGOFIL
Zeichne einen Kreis k um M und eine Passante p. Das Lot n von p durch M schneidet p in L.
Eine Sekante durch L schneidet k in A und U. Die Tangente in A schneidet p in B und die Tangente in U schneidet p in V.
Beweise: $\overline{AB} = \overline{UV}$.

25. SEKANTENWINKEL
Beweise: Die halbe Differenz von ω und α ist gleich ε. – Gilt das auch, wenn eine Gerade in eine Tangente übergeht, bzw. wenn beide Geraden Tangenten sind?

SEKANTENWINKEL



SEHTANG



26. SEHTANG
Zeichne ein Dreieck ABC und seinen Umkreis k. Ein weiterer Kreis k_1 berührt k in A und die Dreieckseite a in F.
Zeige: $AF = w_\alpha$.

Geometrische Örter

•**27.** Zeichne eine Strecke [AB] der Länge 5.
Bestimme den geometrischen Ort der Punkte P, sodass die Dreiecke ABP spitzwinklig sind.

•28. Zeichne eine Strecke [AB] der Länge 10. Bestimme den geometrischen Ort der Punkte P, sodass im Dreieck ABP kein Winkel größer als 80° ist.

•29. Zeichne einen Kreis (Mittelpunkt M) mit Radius 3,5 und eine Sehne [AB] der Länge 6.
W wandert auf dem längeren Bogen. P liegt so auf AW, dass $\overline{WB} = \overline{WP}$ und P außerhalb des Kreises liegt. Auf welcher Linie wandert P, wenn W zwischen A und P liegt?

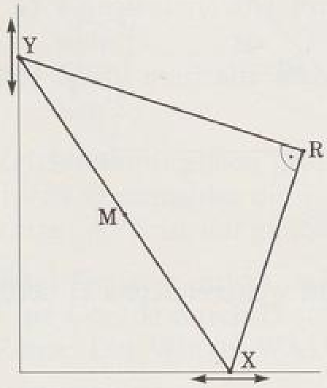
•30. Zeichne einen Kreis mit Radius 5 und die Sehne [AB] der Länge 6. W wandert auf dem größeren Bogen.
Auf welcher Linie bewegt sich der Schnittpunkt P der Winkelhalbierenden des Dreiecks ABW?

•31. Zeichne einen Kreis mit Radius 4 und eine Sehne [AB] zum Mittelpunktswinkel 90°. [DC] ist ein Durchmesser, der AB nicht schneidet. T ist der Schnittpunkt der Diagonalen im Viereck ABCD, S ist der Schnittpunkt der Geraden AD und BC.
Auf welcher Linie laufen S und T, wenn sich der Durchmesser [DC] dreht?

:32. Zeichne einen Kreis mit Radius 4 und den Durchmesser [AB]. C wandert auf einem der beiden Halbkreise.
a) Zeige: Die Winkelhalbierenden w_γ und w_{γ^*} schneiden den Kreis in zwei festen Punkten.
b) Was ist der geometrische Ort der Mitten M_b von [AC]?
c) w_β und w_{α^*} schneiden sich in P. Auf welcher Linie läuft P?
(*Tipp:* $\sphericalangle APB = ?$)

:33. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit a = b und seinen Umkreis.
Ein Wanderpunkt W bestimmt mit C die Sehne s = [WC].
F ist Fußpunkt des Lots von A auf s. AF und BW schneiden sich in T.
a) Zeige: $\sphericalangle FWT = \sphericalangle FWA$.
b) Auf welcher Linie läuft T?

•34. RUTSCH



Ein rechtwinkliges Dreieck rutscht im KOSY.
a) Auf welcher Linie bewegt sich der Mittelpunkt H der Hypotenuse?
b) Auf welcher Linie bewegt sich die Ecke R?

Für Denksportler

⁝35. Zeichne einen Kreis k (Radius 4) mit einem einbeschriebenen gleichschenkligen Dreieck ABC (a = b). w_α schneidet k in U, w_β schneidet k in K. R ist der Inkreismittelpunkt im Dreieck ABC.
Zeige: RUCK ist eine Raute.

⁝36. Zeichne einen Kreis k (Radius 4) mit einem einbeschriebenen gleichschenkligen Dreieck ABC (a = b). D liegt so auf k, dass [CD] die Strecke [AB] schneidet. E ist Fußpunkt des Lots von A auf DC. AE schneidet BD in F.
a) Auf welcher Linie wandert E, wenn D auf seinem Bogen läuft?
b) Beweise: CD ist Symmetrieachse von A und F.
c) Auf welcher Linie wandert F?

⁝37. Zeichne um M einen Kreis k mit Radius 4. I ist ein beliebiger Punkt auf einer Sehne [AU]. Die Sehne [BC] liegt auf der Mittelsenkrechte m von [AI] und hat den Mittelpunkt Z.
[UU'] ist ein Durchmesser. Zeige:
a) I ist Höhenschnittpunkt im Dreieck CUB.
b) CIBU' ist ein Parallelogramm.
c) $\overline{UI} = 2 \cdot \overline{MZ}$.

⁝38. Zeichne ein Dreieck ABC und seinen Umkreis k. w_α, w_β und w_γ schneiden k in U, V und W.
Zeige: Die Winkelhalbierenden von $\triangle$ABC sind Höhen von $\triangle$UVW.

⁝39. Zeichne ein gleichseitiges Dreieck ABC und seinen Umkreis k. D liegt so auf k, dass BD die Seite [AC] schneidet. E liegt so auf [BD], dass $\overline{DE} = \overline{DC}$. Zeige:
a) Das Dreieck DEC ist gleichseitig.
b) $\overline{EB} = \overline{DA}$.
c) $\overline{AD} + \overline{DC} = \overline{DB}$.

⁝40. Zeichne ein spitzwinkliges Dreieck ABC und seinen Umkreis k mit Mittelpunkt M.
H ist Höhenschnittpunkt, M_c ist Mitte von [AB], [CF] ist Durchmesser.
CH schneidet AB in H_c und k in K. [MM_c schneidet k in E. Zeige:
a) $\sphericalangle ABK = \sphericalangle BAF = \sphericalangle ABH$
b) $\sphericalangle FCE = \sphericalangle ECK$
c) $\overline{FK} = 2 \cdot \overline{M_cH_c}$
d) M_c halbiert [FH].
e) $\overline{CH} = 2 \cdot \overline{MM_c}$
f) w_γ halbiert auch $\sphericalangle MCH$.