Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 2000

4.3 Regelmäßige Vielecke

urn:nbn:de:hbz:466:1-83477

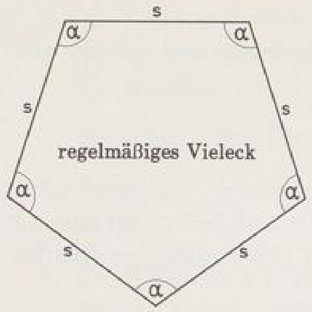
• **18.** Zeichne ein Dreieck ABC und seinen Umkreis k.
U ist ein beliebiger Punkt auf k; U und B liegen auf verschiedenen Seiten von [AC].
Z ist der Fußpunkt des Lots von U auf AB,
G ist der Fußpunkt des Lots von U auf BC und
F ist der Fußpunkt des Lots von U auf CA.
Wenn du ordentlich gezeichnet hast, dann liegen Z, G und F auf einer Gerade, sie heißt »Simson'sche Gerade«, nach Robert Simson (1687–1768 englischer Mathematiker).
Beweise: **1.** FUAZ, FUGC und ZUGB sind Sehnenvierecke.
2. $\sphericalangle AUC = \sphericalangle ZUG = 180° - \beta$
3. $\sphericalangle GUC = \sphericalangle ZUA = \sphericalangle AFZ = \sphericalangle GFC$
4. F liegt auf GZ.

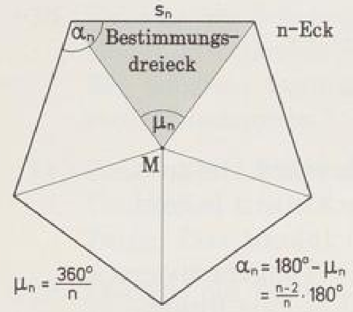
• **19.** Beweise oder widerlege folgende Sätze:
a) Wenn ein Trapez einen Inkreis hat, dann hat es auch einen Umkreis.
b) Wenn ein Trapez einen Umkreis hat, dann hat es auch einen Inkreis.
c) Wenn ein Viereck ein Drachen ist, dann hat es einen Inkreis.
d) Wenn ein Drachen einen Umkreis hat, dann ist er ein Tangentenviereck.
e) Wenn ein Parallelogramm einen Inkreis hat, dann ist es eine Raute.
f) Wenn eine Raute einen Umkreis hat, dann ist sie ein Quadrat.
g) Wenn ein Tangentenviereck achsensymmetrisch ist, dann ist es ein Drachen.

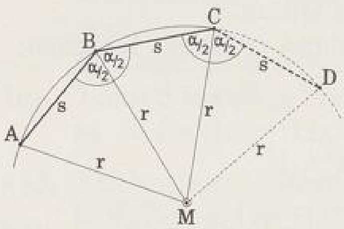
⁝ **20.** Zeichne in einem beliebigen Dreieck ABC den Punkt A_1 auf a, B_1 auf b und C_1 auf c.
Zeichne die Umkreise der Dreiecke AB_1C_1, BC_1A_1 und CA_1B_1.
a) Beweise den Satz von A. Miquel (um 1840):
Die Kreise gehen alle durch einen Punkt P (Miquel'scher Punkt zu A_1, B_1 und C_1).
(Die Sehnenvierecke AC_1PB_1, BA_1PC_1 und CB_1PA_1 helfen.)
b) Zeige: $\sphericalangle PB_1A = \sphericalangle PC_1B = \sphericalangle PA_1C$.

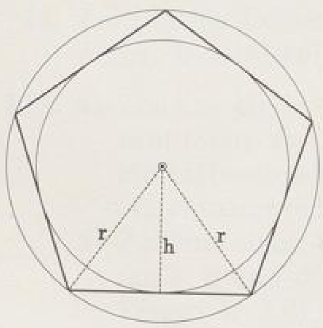
4.3 Regelmäßige Vielecke

Wegen ihres ästhetischen Reizes haben die einfach konstruierbaren regelmäßigen Vielecke schon immer als Zierfiguren in Ornamenten gedient. Die ältesten Darstellungen verwendeten vor allem Quadrate, Achtecke, Sechzehnecke usw. Dann tauchten das Sechseck und seine Abkömmlinge wie Zwölfeck und 24-Eck usw. auf, bis es schließlich den Pythagoräern gelang, das regelmäßige Fünfeck, Zehneck usw. zu konstruieren.









Mathematisch beschreiben wir ein regelmäßiges n-Eck mit der

Definition

> Ein n-Eck heißt **regelmäßig,**
> wenn alle Seiten gleich lang und alle Winkel gleich groß sind.

Ab n = 4 genügt eine Bedingung allein nicht: Eine Raute muss nicht lauter gleich große Winkel haben und ein Rechteck muss nicht lauter gleich lange Seiten haben.

Jedes regelmäßige n-Eck besteht aus n kongruenten gleichschenkligen Dreiecken. Ein solches Dreieck nennen wir **Bestimmungsdreieck.**

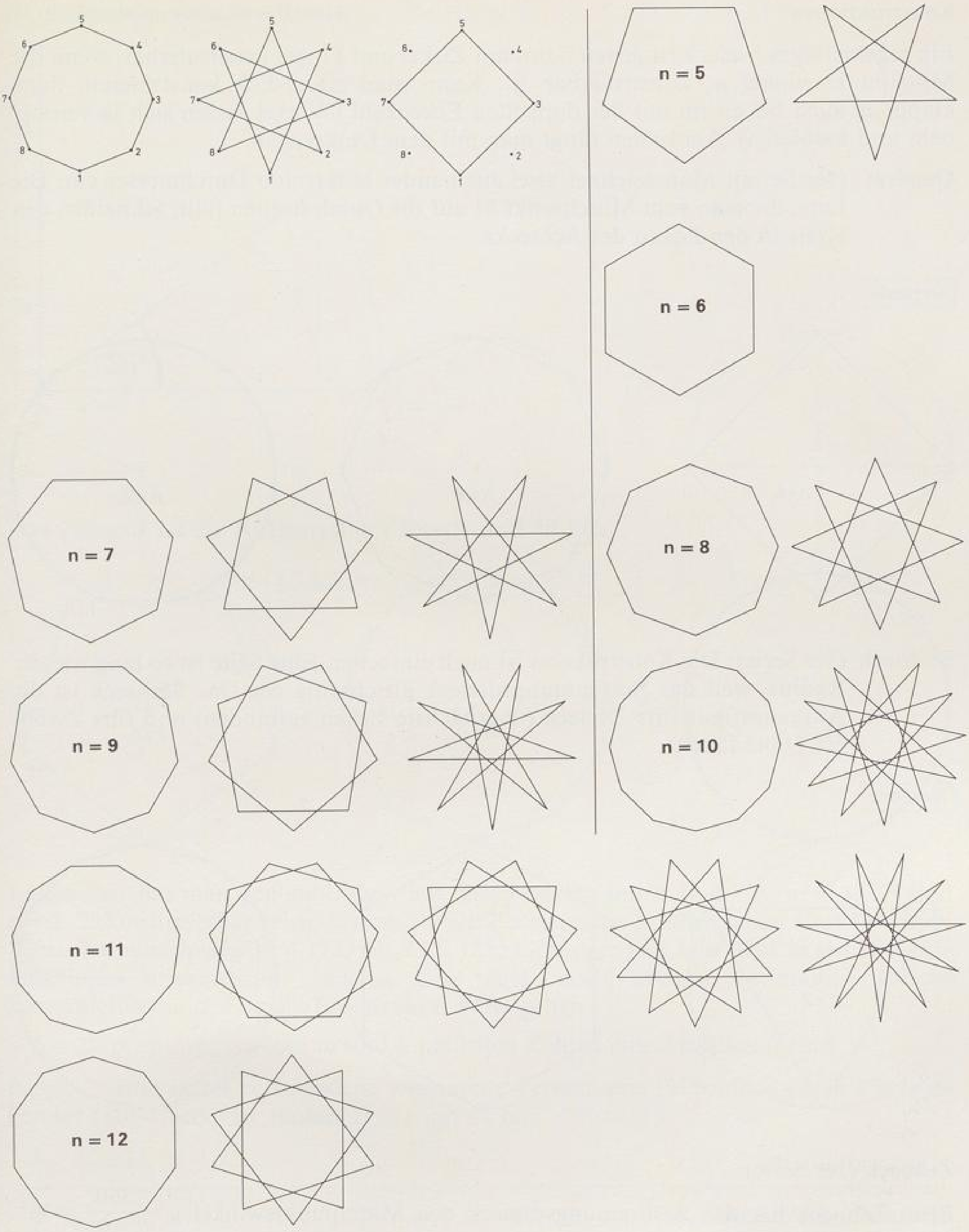
Begründung: Je drei benachbarte Ecken haben einen Umkreis (Mittelpunkt M), also gilt
$\triangle AMB \cong \triangle BMC$ (SSS)
Verbindet man M mit der nächsten Ecke (D), so entsteht das Dreieck CMD, es ist wegen SWS kongruent zu den andern beiden Dreiecken. Diese Überlegung lässt sich auf die andern Ecken fortsetzen.

Damit ist auch gezeigt, dass jedes regelmäßige Vieleck einen Umkreis und einen Inkreis hat (Inkreisradius = Höhe auf der Basis des Bestimmungsdreiecks). Wegen der kongruenten Bestimmungsdreiecke gilt

$$\mu_n = \frac{360°}{n}, \quad \alpha_n = 180° - \mu_n = \frac{n-2}{n} \cdot 180°$$

Lässt man auch überschlagene n-Ecke zu, dann entstehen regelmäßige **Sternvielecke.** Sie sind schon von Thomas Bradwardine (1290 bis 1349), dem späteren Erzbischof von Canterbury, untersucht worden.

Es gibt zum Beispiel zwei verschiedene regelmäßige Achtecke. Beim üblichen Achteck verbindet man jede Ecke mit der nächsten, beim Sternachteck mit der überübernächsten Ecke. Verbindet man dagegen jede Ecke mit der übernächsten Ecke, so ergibt sich ein Quadrat.
Allgemein gilt: Ein n-Eck ergibt sich genau dann, wenn man jede Ecke mit der k-ten darauf folgenden Ecke verbindet und n und k teilerfremd sind. Die Verbindungen der Ecken n und k liefert dasselbe n-Eck wie die Verbindung der Ecken n und n − k.

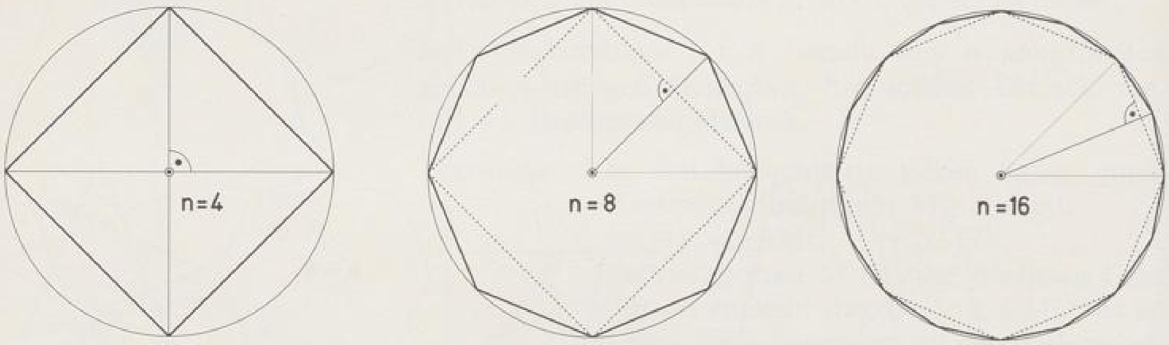

n = 5
n = 6
n = 7
n = 8
n = 9
n = 10
n = 11
n = 12

Konstruktionen

Ein regelmäßiges Vieleck ist genau dann mit Zirkel und Lineal konstruierbar, wenn der Mittelpunktswinkel μ_n konstruierbar ist. Kann man ein n-Eck konstruieren, dann klappt es auch bei einem mit der doppelten Eckenzahl (Winkel lassen sich ja verdoppeln und halbieren). Am besten fängt man mit dem Umkreis an.

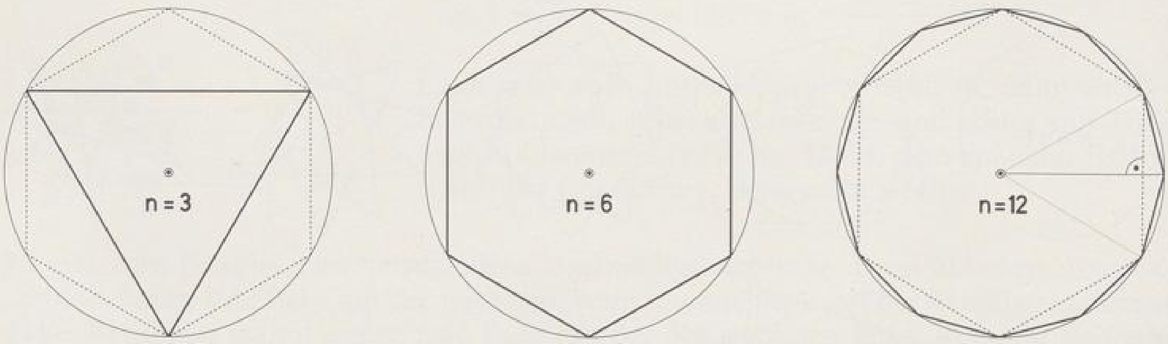
Quadrat (4er Serie): Man zeichnet zwei zueinander senkrechte Durchmesser ein. Die Lote, die man vom Mittelpunkt M auf die Quadratseiten fällt, schneiden den Kreis in den Ecken des Achtecks.

4er-Serie



Sechseck (3er Serie): Die Konstruktion ist noch einfacher. Eine Seite ist so lang wie der Radius, weil das Bestimmungsdreieck gleichseitig ist. Das Sechseck ist die Ausgangsfigur fürs Dreieck (übernächste Ecken verbinden) und fürs Zwölfeck (Lote fällen).

3er-Serie

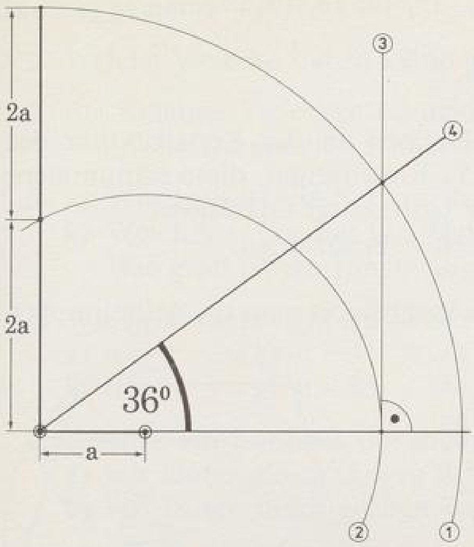


Zehneck (5er Serie):

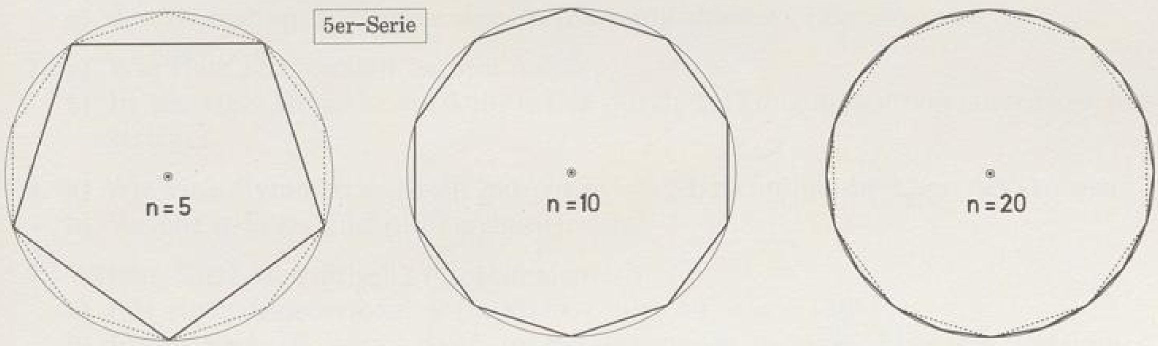
Beim Zehneck hat das Bestimmungsdreieck den Mittelpunktswinkel $\mu = \frac{360°}{10} = 36°$.

Ein 36°-Winkel lässt sich mit Zirkel und Lineal konstruieren. Die Begründung für die Konstruktion folgt im nächsten Jahr.

Konstruktion eines 36° -Winkels



Das Zehneck ist die Ausgangsfigur fürs 5- und 20-Eck.



Lange Zeit hat man geglaubt, dass nur Vieleckserien mit $n = 4 \cdot 2^k$, $n = 3 \cdot 2^k$ und $n = 5 \cdot 2^k$ konstruierbar seien, bis schließlich der deutsche Mathematiker Carl Friedrich Gauss (Braunschweig 30.4.1777 bis 23.2.1855 Göttingen) im Jahr 1801 in seinen »Disquisitiones arithmeticae« bewies, dass auch noch andere regelmäßige n-Ecke konstruierbar sind. Für die Eckenzahl n muss gelten

$n = 2^k \cdot p_1 \cdot p_2 \ldots p_m$, wobei m und k natürlich Zahlen einschließlich 0 sind

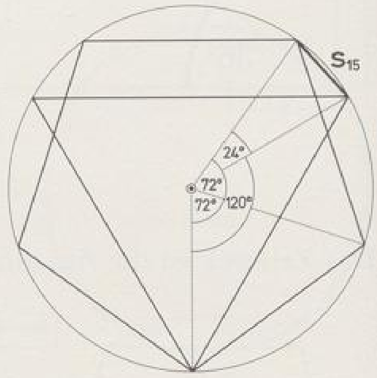
$p_1, p_2, \ldots$ sind lauter verschiedene sogenannte Fermat'sche Primzahlen (nach Pierre de Fermat 1601–1665) der Bauart $2^{2^i} + 1$ mit $i \in \mathbb{N}_0$

i	$2^{2^i} + 1$	
0	3	Fermat'sche Primzahl
1	5	Fermat'sche Primzahl
2	17	Fermat'sche Primzahl
3	257	Fermat'sche Primzahl
4	65537	Fermat'sche Primzahl
5	$4294967297 = 641 \cdot 6700417$	keine Primzahl

Konstruierbar sind demnach die n-Ecke mit n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, …
Nicht konstruierbar sind die n-Ecke mit n = 7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, …

1825 konstruierten Pauker und Erdinger das 17-Eck.
1832 konstruierte Richelot das 257-Eck, und
Ende des letzten Jahrhunderts wagte sich Prof. Hermes an die Konstruktion des 65 537-Ecks. Er brauchte 10 Jahre und beschrieb 250 Riesenseiten, diese schlummern heute in einer Kiste im Mathematischen Institut der Universität Göttingen.
Bis heute (1989) kennt man keine weiteren Fermat'schen Primzahlen.

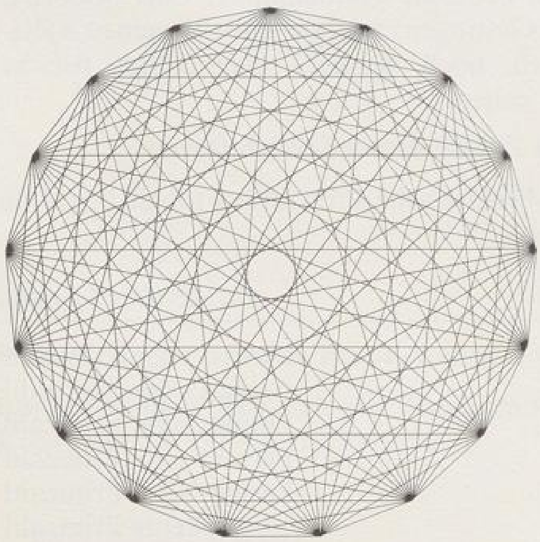
Enthält n mehr als eine Fermat'sche Primzahl, dann kombiniert man die Mittelpunktswinkel geeignet, zum Beispiel n = 15

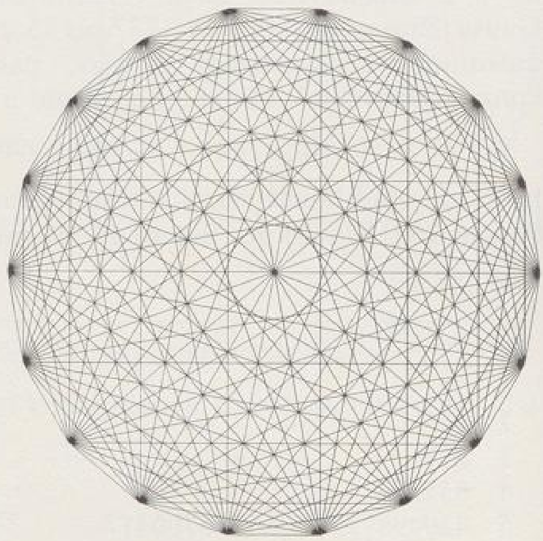


$$\frac{1}{15} = \frac{a}{5} + \frac{b}{3}, \quad \text{also} \quad \frac{1}{15} = \frac{3a+5b}{15} \Leftrightarrow 1 = 3a + 5b$$

wir wählen a = 2 und b = −1

$$\frac{1}{15} = \frac{2}{5} + \frac{-1}{3} \,\| \cdot 360°, \quad \text{also} \quad 24° = 2 \cdot 72° - 120°$$





Falls nicht anders vermerkt, ist mit Vieleck (n-Eck) immer ein regelmäßiges Vieleck (n-Eck) gemeint.

1. Welche Vielecke haben keine parallelen Seiten?

2. Bei welchen Vielecken schneiden sich Diagonalen im Mittelpunkt des Vielecks? Wie viele Diagonalen schneiden sich dann?

3. **a)** Wie groß ist die Summe der Innenwinkel in einem Zwölfeck?
b) Welches n-Eck hat die Winkelsumme 17 640°?
Wie groß ist ein Innenwinkel?

4. Wie groß ist jeweils ein Innenwinkel im n-Eck?
a) $n = 3$ **b)** $n = 4$ **c)** $n = 5$ **d)** $n = 15$ **e)** $n = 17$
f) $n = 51$ **g)** $n = 85$ **h)** $n = 255$ **i)** $n = 257$

5. Zeichne ein Fünfeck, das nicht regelmäßig ist:
a) mit lauter gleich langen Seiten
b) mit lauter gleich großen Winkeln.

6. Wie groß ist im n-Eck
a) ein Innenwinkel **b)** die Innenwinkelsumme
c) die Außenwinkelsumme **d)** ein Basiswinkel im Bestimmungsdreieck
e) der Winkel an der Spitze des Bestimmungsdreiecks (Zentriwinkel)?

7. **a)** Wie viele Diagonalen hat ein n-Eck?
b) In wie viele Dreiecke wird ein n-Eck durch die Diagonalen von einer Ecke aus zerlegt?

8. **a)** Wie viele Symmetrieachsen hat ein n-Eck? Beschreibe die Lage der Achsen.
b) Welche n-Ecke sind punktsymmetrisch?

9. Welche Sätze sind falsch? (Gegenbeispiel!)
a) Für einen Innenwinkel α im Vieleck gilt: $60° \leq \alpha \leq 120°$.
b) Ein Vieleck ist genau dann regelmäßig, wenn es einen Umkreis und lauter gleich lange Seiten hat.
c) Ein Vieleck ist genau dann regelmäßig, wenn es einen Inkreis und lauter gleich lange Seiten hat.
d) Ein Vieleck ist genau dann regelmäßig, wenn es einen Umkreis und lauter gleich große Winkel hat.
e) Ein n-Eck und ein k-Eck sind genau dann ähnlich, wenn $n = k$ ist.
f) Zwei Vielecke sind kongruent, wenn sie denselben Umkreis haben.

•10. Wie viele Sternvielecke gibt es mit
a) 15 **b)** 16 **c)** 17 **d)** 18 **e)** 100 Ecken?

⁚11. Zeige: Ist p eine Primzahl, gibt es in einem Kreis $(p - 1)/2$ regelmäßige p-Ecke.

12. **a)** In welchem n-Eck gibt es 1 175 Diagonalen?
b) In welchem n-Eck ist ein Innenwinkel $\alpha_n = 178{,}2°$?

13. Konstruiere in einen Kreis mit $r = 8$ ein
a) Dreieck und Zwölfeck **b)** Achteck
c) Zehneck und Fünfeck **d)** Fünfzehneck.

•14. Begründe, warum das n-Eck konstruierbar ist:
a) $n = 192$ **b)** $n = 512$ **e)** $n = 8\,589\,934\,594$
c) $n = 1\,920$ **d)** $n = 17\,408$

15. Das 51-Eck lässt sich über das 17-Eck und das gleichseitige Dreieck konstruieren, das 85-Eck über das 17-Eck und Fünfeck. Gib jeweils die Gleichung für die Konstruktion des Mittelpunktswinkels an. (Keine Konstruktion!)

16. **a)** Konstruiere ein Achteck mit $s = 5$.
b) Konstruiere ein Zwölfeck mit $s = 3$.

•17. »Konstruktion« des Siebenecks mit dem Einschiebelineal (nach Breidenbach)
Ein Einschiebelineal ist ein Lineal, auf dem man zwei Punkte markiert. Man legt das Lineal so durch einen gegebenen Punkt, dass die beiden markierten Punkte auf gegebenen Linien liegen (einschieben).
Das Siebeneck ist einem Kreis k um O mit Radius 4 einbeschrieben.
- Zeichne $H(-4|6)$ und OH.
- Markiere auf einem Lineal R und S so, dass $\overline{RS} = 6$ ist.
  Einschiebung: Lege das Lineal so durch $L(-4|2)$, dass R auf HO und S auf der positiven x-Achse zu liegen kommen.
- Die Mittelsenkrechte von [OS] schneidet den Kreis in P (über der x-Achse). P und Q $(4|0)$ bilden eine Seite des Siebenecks.

Konstruiere nach diesem Verfahren ein Siebeneck.

•18. »Konstruktion« des Neunecks mit dem Einschiebelineal (nach Breidenbach)
Das Neuneck ist einem Kreis k um O mit Radius 4 einbeschrieben.
- Zeichne den Kreispunkt $H(2|y > 0)$.
- Einschiebung: Passe die Strecke [RS] der Länge 8 so ein, dass R auf der y-Achse, S auf der x-Achse und H auf RS zu liegen kommen.
- Die Mittelsenkrechte von [OS] schneidet den Kreis in P (über der x-Achse). P und $Q(4|0)$ bilden eine Seite des Neunecks.
  Konstruiere nach diesem Verfahren ein Neuneck.