Anschauliche Geometrie

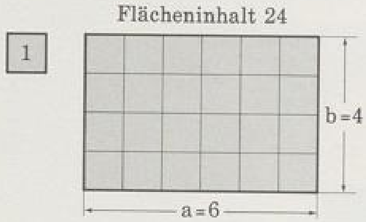
Barth, Friedrich

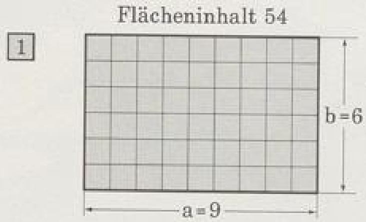
München, 2000

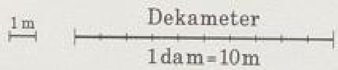
5.1 Grundlagen

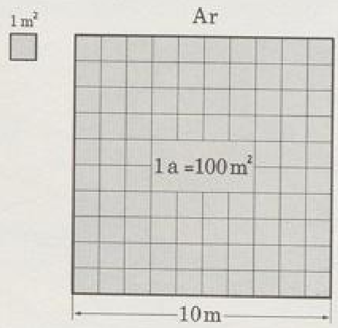
urn:nbn:de:hbz:466:1-83477

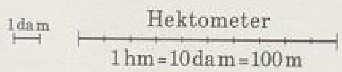
5.1 Grundlagen

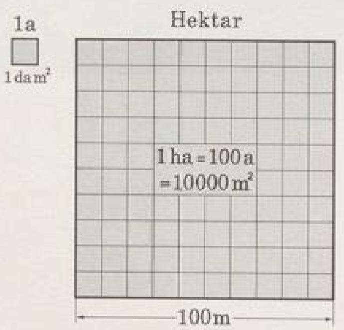












Will man die Länge einer Strecke messen, so muss man feststellen, wie oft eine vorgegebene Einheitsstrecke als Längeneinheit in der Strecke enthalten ist. Passt die Einheitsstrecke zum Beispiel genau neunmal in die Strecke, dann sagt man: Die Strecke hat die Länge 9. 9 ist die Maßzahl bezüglich der gewählten Längeneinheit. Nimmt man eine längere Einheitsstrecke, dann hat dieselbe Strecke eine kleinere Maßzahl.

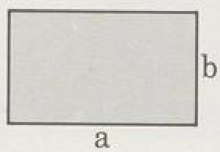
Im Alltag haben bestimmte Einheitsstrecken Namen, diese Namen dienen als Benennung bei der Längenangabe. Früher war der Mensch auch im wörtlichen Sinn das Maß aller Dinge, die alten Längeneinheiten wie Fuß, Elle, Zoll, Spanne und Yard waren vom menschlichen Körper abgeleitet. Die heute verwendeten Maßeinheiten stammen aus der Erdmessung. Am 7. April 1795 hat die französische Nationalversammlung beschlossen, dass der 40millionste Teil des Erdumfangs als neue Einheit der Längenmessung verwendet werden solle. Diese Einheit nannte man 1 Meter und leitete davon die kleineren Einheiten 1 dm, 1 cm, 1 mm und die größere Einheit 1 km ab.

In der Geometrie geben wir Längeneinheiten als Strecken an. Weil wir keine Benennungen verwenden, haben sie die Länge 1. Bei der Flächenmessung macht man's genauso. Als Flächeneinheit dient ein Quadrat mit der Seitenlänge 1: das Einheitsquadrat. Will man den Inhalt einer Fläche messen, dann muss man feststellen, wie oft das Einheitsquadrat in ihr enthalten ist. Passt es zum Beispiel genau 24mal in ein Rechteck, dann sagt man: Das Rechteck hat den Flächeninhalt 24. 24 ist die Maßzahl bezüglich der gewählten Flächeneinheit. Wenn man ein kleineres Einheitsquadrat nimmt, dann erhält dieselbe Fläche eine größere Maßzahl.

Meistens bezeichnet man den Flächeninhalt mit A. Für ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b gilt – wie wir schon wissen:

Flächeninhalt des Rechtecks

$$A = ab$$



In der Geometrie sind auch die Flächeninhalte reine Zahlen. In der Wirklichkeit leitet man die Namen der Flächeninhalte von den Längeneinheiten ab. 1 m² ist zum Beispiel der Flächeninhalt eines Quadrats mit der Seitenlänge 1. Entsprechend sind in Gebrauch 1 dm², 1 cm², 1 m² und 1 km².

Achte auf die unterschiedlichen Umrechnungszahlen bei Längen- und Flächeneinheiten:

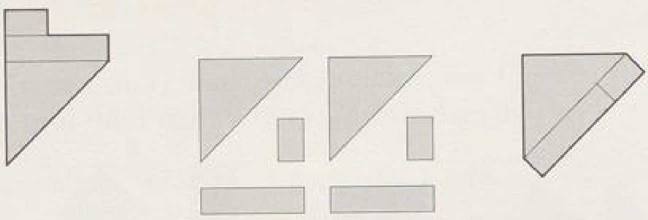
1 km = 10 hm	$1\ \text{km}^2 = 100\ \text{hm}^2 = 100\ \text{ha}$
1 hm = 10 dam	$1\ \text{ha} = 100\ \text{dam}^2 = 100\ \text{a}$
1 dam = 10 m	$1\ \text{a} = 100\ \text{m}^2$
1 m = 10 dm	$1\ \text{m}^2 = 100\ \text{dm}^2$
1 dm = 10 cm	$1\ \text{dm}^2 = 100\ \text{cm}^2$
1 cm = 10 mm	$1\ \text{cm}^2 = 100\ \text{mm}^2$

Beispiel: 1 km = 1 000 m, aber $1\ \text{km}^2 = 1\,000\,000\ \text{m}^2$.

Bei komplizierteren Figuren macht es mehr Mühe, den Flächeninhalt zu bestimmen. Einige nahe liegende Eigenschaften des Flächeninhalts helfen uns dann weiter. Unmittelbar leuchtet ein:

Kongruente Figuren haben den gleichen Flächeninhalt, kurz: sind flächengleich.

Umgekehrt stimmt's meistens nicht:
Setzt man nämlich Figuren aus paarweise kongruenten Teilen zusammen, so entstehen flächengleiche Figuren, die im Allgemeinen nicht kongruent sind.

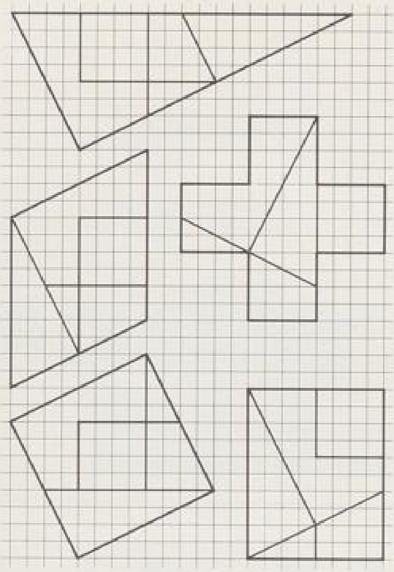


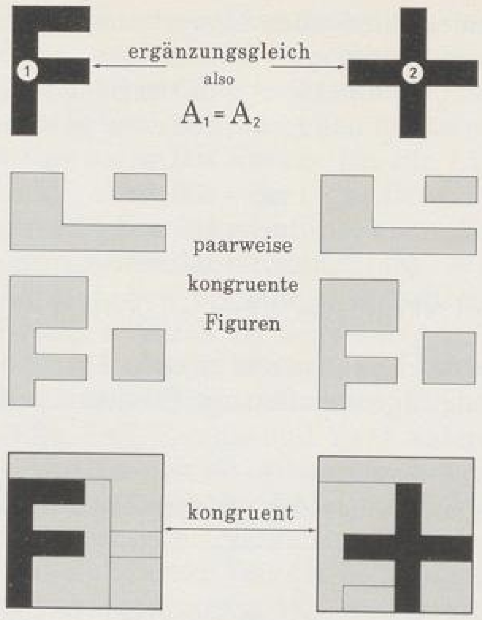
paarweise kongruente Figuren

Gelingt es andrerseits, zwei Figuren in paarweise kongruente Teile zu zerlegen, so sind sie flächengleich. Solche Figuren heißen **zerlegungsgleich.** Das Bild zeigt fünf einfache zerlegungsgleiche Figuren.

Statt Figuren zu zerschneiden, kann man sie auch geschickt ergänzen. Es gilt nämlich: Zwei Figuren haben denselben Flächeninhalt, wenn sie sich beim Ergänzen mit paarweise kongruenten Stücken in kongruente Figuren verwandeln lassen. Die Ausgangsfiguren nennt man dann **ergänzungsgleich.** In der Ebene sind zerlegungsgleiche Figuren immer auch ergänzungsgleich und umgekehrt.

zerlegungsgleiche Figuren



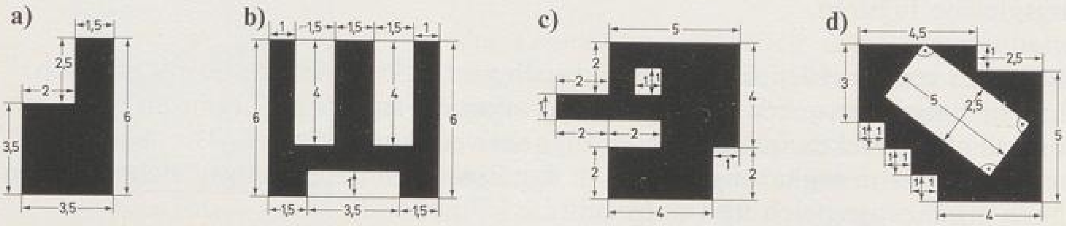


Braucht man den Flächeninhalt komplizierterer Figuren, so zerlegt man diese in Teilfiguren, deren Flächeninhalt man berechnen kann, und verwendet die unmittelbar einleuchtende Eigenschaft des Flächeninhalts:

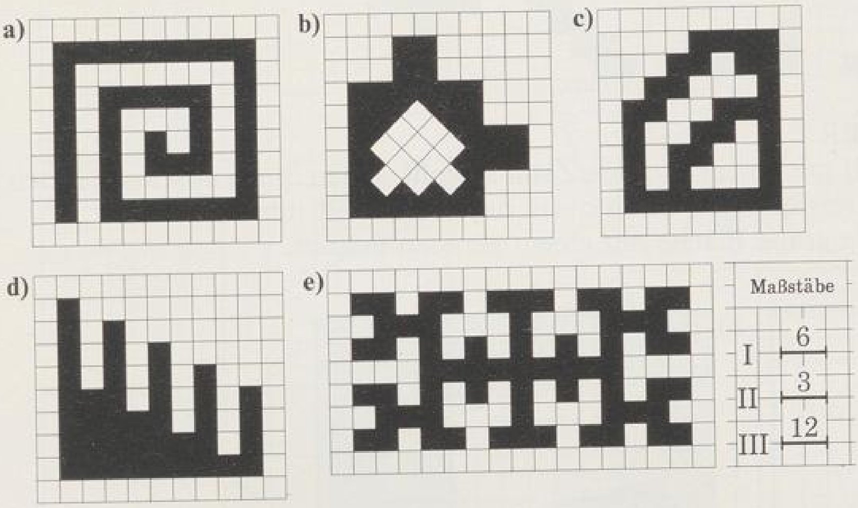
Zerlegt man eine Figur in Teilfiguren, so ist der Inhalt der Figur gleich der Summe der Inhalte der Teilfiguren.

Aufgaben

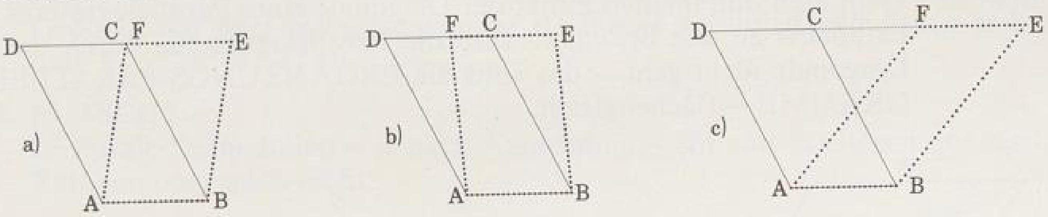
1. MASSVOLL
   Berechne den Inhalt der schwarzen Flächenstücke.



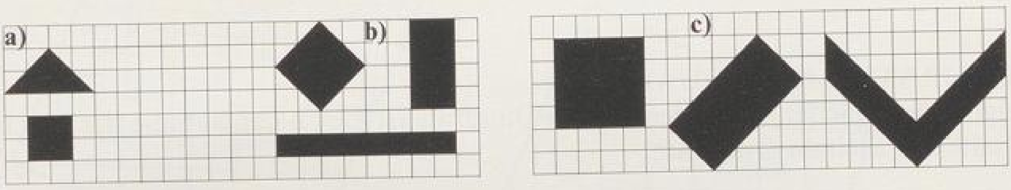
2. MASSLOS
Berechne den Inhalt der schwarzen Flächenstücke, benutze den Maßstab I.
Wie ändert sich der Flächeninhalt, wenn du die Maßstäbe II beziehungsweise III verwendest?



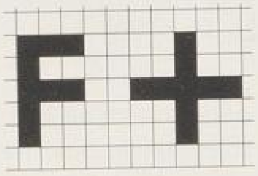
3. SCHEREREI
Die Parallelogramme ABCD und ABEF sind flächengleich.
Beweise dies!



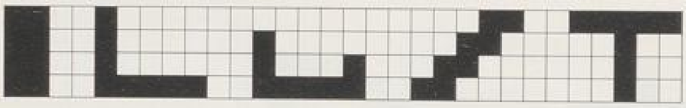
4. FLÄCHENGLEICH
Begründe: Die Figuren in **a)** sind flächengleich, die Figuren in **b)** sind flächengleich und die Figuren in **c)** sind flächengleich.



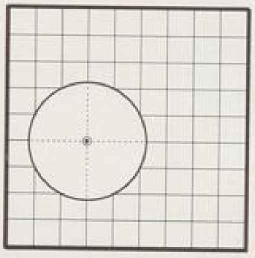
5. QUADRATVOLLMACHT
Ergänze **F** und + mit drei paarweise kongruenten Stücken zu einem möglichst kleinen Quadrat.

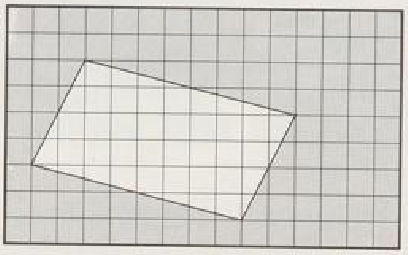


6. VIERDAZU
Ergänze jede Figur mit jedesmal denselben vier Figuren zu einem möglichst kleinen Quadrat.

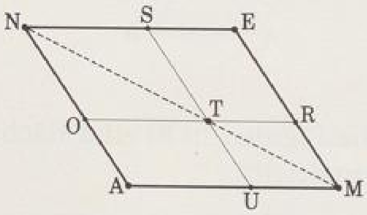


7. HALBSCHWER
a) Jemand will mit einem geraden Zaun sowohl seinen quadratischen Garten als auch den kreisförmigen Teich darin halbieren. Hilf ihm!
b) Halbiere die graue Fläche mit einem geraden Schnitt.

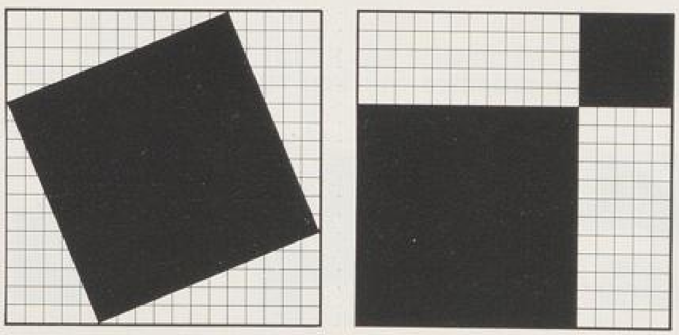
a)


b)


8. ERGÄNZUNGS-PARALLELOGRAMME
Beweise: Zieht man durch einen Punkt der Diagonale eines Parallelogramms die Parallelen zu den Seiten, so sind die Parallelogramme, durch die die Diagonale nicht geht – das sind die ERGÄNZUNGS-PARALLELOGRAMME – flächengleich.

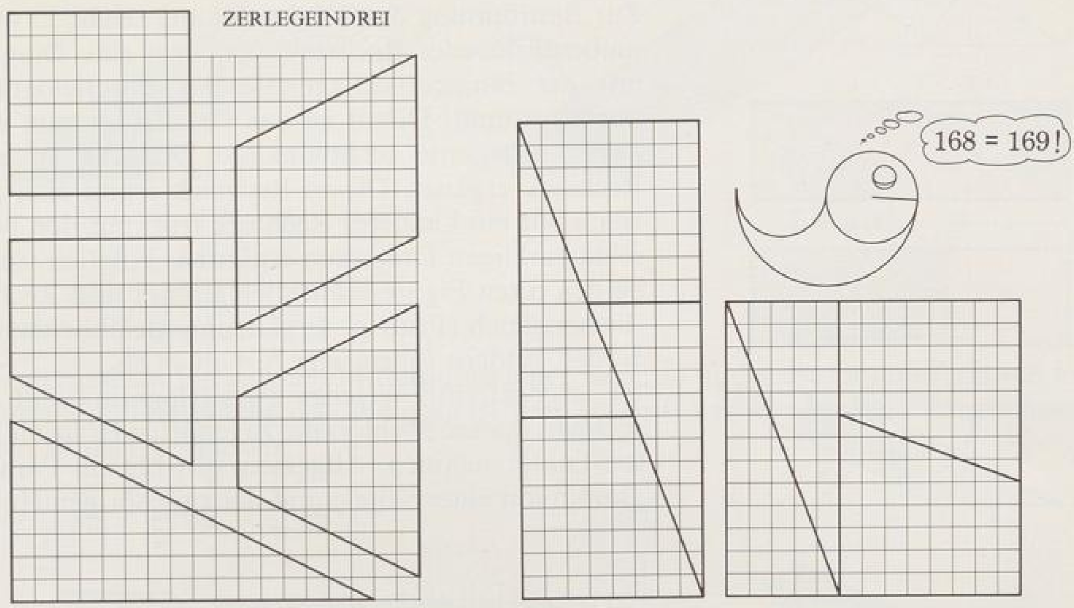


9. QUADRATSUMMENQUADRAT
Zeige: Der Flächeninhalt des großen Quadrats ist gleich der Summe der Flächeninhalte der kleinen Quadrate.



10. ZERLEGEINDREI

Zeige: Die fünf Figuren sind flächengleich, weil sie sich jeweils in dieselben drei Teilflächen zerlegen lassen.

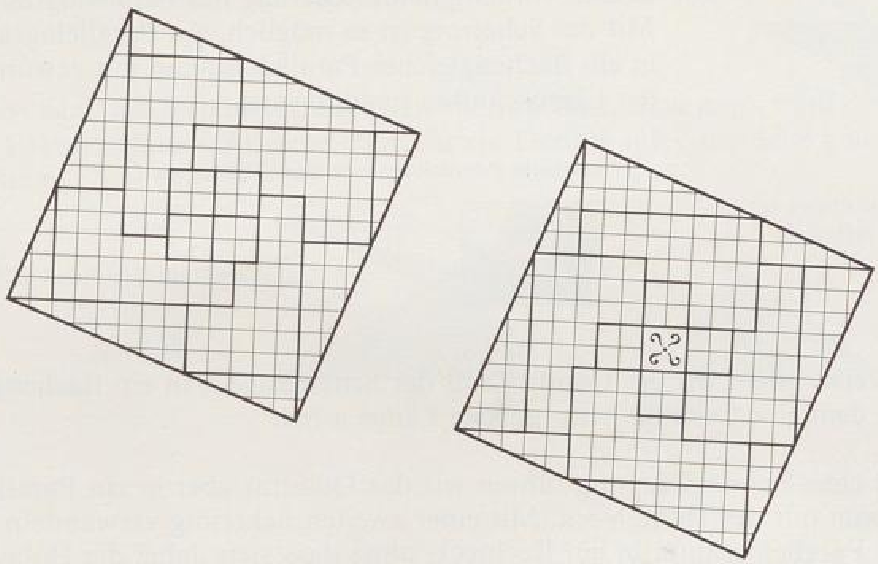


11. $168 \stackrel{?}{=} 169$

Geobold hat zwei zerlegungsgleiche Rechtecke gefunden, mit denen er beweist, dass $8 \cdot 21 = 13 \cdot 13$ ist.

12. FUTSCH?

16 Puzzle-Steine füllen – je nach Anordnung – ein und denselben quadratischen Rahmen oder auch nicht.



Erst mit einer genauen Zeichnung (gut gespitzte Mine) wirst du den Schwindel in den letzten beiden Aufgaben aufdecken.