Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

1.3 Terme

urn:nbn:de:hbz:466:1-83493

1.3 Terme

Wie der vorausgehende Abschnitt gezeigt hat, arbeitet man in der Algebra nicht nur mit *Zahlen*, sondern auch mit *Variablen*. Meistens sind Zahlen und Variablen mit Hilfe der verschiedenen Rechenarten zu *Rechenausdrücken* zusammengesetzt.

Beispiele: $2 + x$, $3 \cdot (y - z : 5)$, $\frac{a+b}{4 \cdot c}$.

Gleichungen und Ungleichungen sind ihrerseits wieder aus solchen Rechenausdrücken aufgebaut. Man kann somit sagen, daß Zahlen, Variablen und daraus gebildete Rechenausdrücke das Grundmaterial für die Algebra darstellen. Daher ist es sinnvoll, für diese verschiedenen »Bausteine« eine einheitliche Bezeichnung zu verwenden; man nennt sie **Terme***.

Beispiele:

1) Die Gleichung $5 = 2 + 3$ enthält den Term 5 und den Term $2 + 3$.
2) Die Gleichung $x = y : 0{,}7$ enthält die Terme x und $y : 0{,}7$.
3) Die Ungleichung $2 \cdot n + 1 < 2 \cdot (n + 1)$ enthält die Terme $2 \cdot n + 1$ und $2 \cdot (n + 1)$.

Die Verwendung der Bezeichnung »Term« regeln wir durch folgende

Definition 21.1: 1. Jede Zahl ist ein Term.
2. Jede Variable ist ein Term.
3. Summe, Differenz, Produkt und Quotient zweier Terme sind ebenfalls wieder Terme.

Teil 3 der Definition besagt (zusammen mit 1 und 2), daß jeder mit Hilfe der vier Grundrechenarten aus Zahlen und Variablen gebildete Rechenausdruck ein Term ist.
Nach unserer Definition sind die in den obigen Beispielen für Gleichungen und Ungleichungen auftretenden Ausdrücke tatsächlich Terme: 5 ist eine Zahl, also ein Term (Regel 1); da 2 und 3 Zahlen, also Terme sind, ist nach Regel 3 auch $2 + 3$ ein Term. x ist eine Variable, also ein Term (Regel 2); da sowohl die Variable y als auch die Zahl 0,7 Terme sind, ist nach Regel 3 auch $y : 0{,}7$ ein Term. Usw.
Durch wiederholte Anwendung der 3. Termbildungsregel lassen sich aus gegebenen Termen neue Terme aufbauen.

* Näheres zum Wort *Term* findest du auf Seite 180.

Beispiel:

Gegeben seien die Terme $T_1 = 17$, $T_2 = a$, $T_3 = b$, $T_4 = 25$.
Daraus lassen sich z.B. folgende neue Terme bilden:

$$T_5 = T_1 \cdot T_2 = 17 \cdot a \qquad T_6 = \frac{T_5}{T_3} = \frac{17 \cdot a}{b}$$

$$T_7 = T_2 \cdot T_3 = a \cdot b \qquad T_8 = T_4 + T_2 = 25 + a$$

$$T_9 = \frac{T_8}{T_7} = \frac{25 + a}{a \cdot b} \qquad T_{10} = T_6 - T_9 = \frac{17 \cdot a}{b} - \frac{25 + a}{a \cdot b} \quad \text{usw.}$$

Für die Schreibweise mehrfach zusammengesetzter Terme gelten natürlich die bekannten Vereinbarungen, an die wir erinnern in

Vereinbarung 22.1: »Klammern haben absoluten Vorrang.«
»Punkt geht vor Strich.«
»Bruchstrich ersetzt Klammern um Zähler und Nenner.«

Beispiele:

1) $(42 - 2) \cdot 3 = 40 \cdot 3 = 120$,
2) $42 - 2 \cdot 3 = 42 - 6 = 36$,
3) $\frac{a - 3}{b + 5} = (a - 3) : (b + 5)$.

Beachte: Bei gemischten Zahlen werden ein Pluszeichen und Klammern weggelassen. So bedeutet $5\frac{1}{2} \cdot 3$ ausführlich $(5 + \frac{1}{2}) \cdot 3$.

Im obigen Beispiel 2 gibt uns die »Punkt vor Strich«-Regel die richtige Reihenfolge der beiden Rechenschritte an. Wie muß man aber vorgehen, wenn zwei »Punktrechnungen« aufeinanderfolgen, also z.B. $42 : 2 \cdot 3$ oder $42 \cdot 2 : 3$ usw.? Hängt bei solchen Termen das Ergebnis von der Reihenfolge ab, in der man die beiden Rechenschritte ausführt, oder ist diese ohne Bedeutung? Letzteres trifft sicher im Fall $a \cdot b \cdot c$ zu; denn nach dem Assoziativgesetz der Multiplikation gilt ja $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, so daß es also gleichgültig ist, ob man die erste oder die zweite Multiplikation zuerst ausführt. Um auch die anderen Fälle zu prüfen, nehmen wir wie oben $a = 42$, $b = 2$ und $c = 3$:

Beispiele:

1) $(42 \cdot 2) : 3 = 84 : 3 = 28$
$42 \cdot (2 : 3) = 42 \cdot \frac{2}{3} = \frac{14 \cdot 2}{1} = 28$

2) $\left.\begin{array}{l} (42 : 2) \cdot 3 = 21 \cdot 3 = 63 \\ 42 : (2 \cdot 3) = 42 : 6 = 7 \end{array}\right\} \; !$

3) $\left.\begin{array}{l} (42 : 2) : 3 = 21 : 3 = 7 \\ 42 : (2 : 3) = 42 : \frac{2}{3} = 42 \cdot \frac{3}{2} = \frac{21 \cdot 3}{1} = 63 \end{array}\right\} \; !$

Die Reihenfolge der beiden Rechenschritte kann also für das Ergebnis von wesentlicher Bedeutung sein! Das gilt natürlich erst recht, wenn mehr als zwei Punktrechnungen aufeinanderfolgen. Damit solche Terme eindeutig definiert sind, treffen wir die folgende

> **Vereinbarung 23.1:** Sind aufeinanderfolgende Punktrechnungen nicht nur Multiplikationen, dann muß der Reihe nach gerechnet werden, es sei denn, daß durch Klammern die Reihenfolge der Rechenschritte anders festgelegt ist.

Beachte, daß also Schreibweisen wie $42:2\cdot 3$ oder $42\cdot 2:3$ oder auch $(a+b):c:d$ usw. zulässig sind und die Berechnung von links nach rechts ausgeführt werden muß. Bei $42:(2\cdot 3)$ ist hingegen zuerst das Produkt $2\cdot 3$ zu berechnen, und dann erst 42 durch 6 zu teilen.

Für Produkte verwenden die Mathematiker oft eine vereinfachte Schreibweise, bei welcher der Malpunkt weggelassen wird. Das ist jedoch nicht immer möglich. Es gilt folgende

> **Vereinbarung 23.2:** Bei einem Produkt darf *vor* einer Variablen oder *vor* einer Klammer der Malpunkt weggelassen werden.

Beispiele:

$2\cdot a = 2a,\qquad a\cdot b = ab,\qquad 3\cdot(a+b) = 3(a+b),$

$(a+b)\cdot c\cdot d = (a+b)cd,\qquad a:(b\cdot c) = a:(bc).$

Beachte: **1)** Vor einem *Zahlzeichen* darf der Malpunkt *nicht* entfallen; vgl. etwa $3\cdot 5$ im Gegensatz zu 35, oder $2\cdot\frac{1}{2}$ im Gegensatz zu $2\frac{1}{2}$.

2) $5\frac{1}{2}x = (5+\frac{1}{2})\cdot x.$

In der Algebra ist es wichtig, einen umfangreicheren Term richtig »lesen« zu können, d. h., seinen Aufbau aus einfacheren Termen im Sinne der 3. Termbildungsregel rasch zu überblicken.

Beispiel 1:

$(17+x)\cdot 3 - y:11$

Dieser Term ist eine Differenz mit dem Minuenden $(17+x)\cdot 3$ und dem Subtrahenden $y:11$. Der Minuend ist ein Produkt aus einer Summe als erstem und 3 als zweitem Faktor. Die Summe besteht aus den Summanden 17 und x. Der Subtrahend ist ein Quotient mit y als Dividend und 11 als Divisor.

Eine übersichtliche Darstellung des Termaufbaus, den **Termgliederungsbaum**, zeigt Abbildung 24.1.

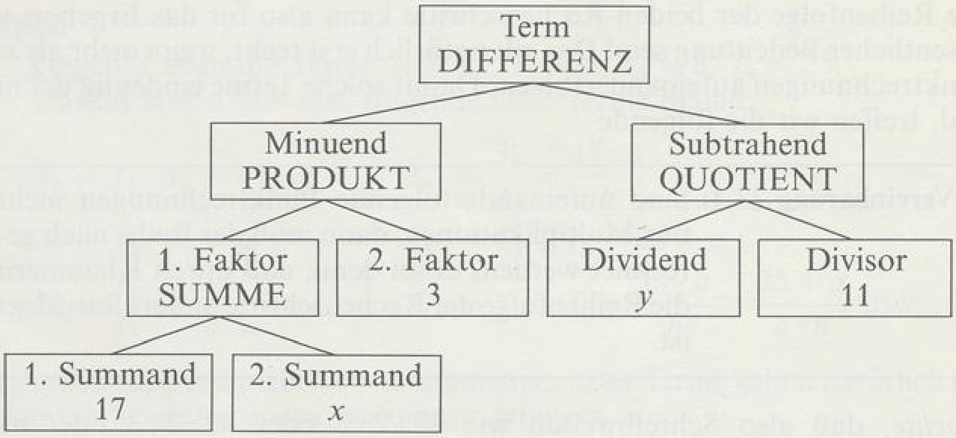


Abb. 24.1 Termgliederungsbaum zu Beispiel 1

Beispiel 2:

$[a : 9 - 3(b : 7)] \cdot 5$

Der Term ist ein Produkt mit der in eckigen Klammern stehenden Differenz als erstem und 5 als zweitem Faktor. Der Minuend ist der Quotient aus a als Dividend und 9 als Divisor. Der Subtrahend ist das Produkt aus 3 und dem in runden Klammern stehenden Quotienten aus b und 7.

Bei solchen Beschreibungen kommt es darauf an, den Aufbau des Terms aus den einzelnen Bausteinen, also den Zahlen und Variablen, genau und lückenlos anzugeben. Es muß möglich sein, aus der Beschreibung den Term zu rekonstruieren. Diese umgekehrte Aufgabe, nämlich einen gegebenen Text in einen Term umzusetzen, tritt ebenfalls sehr häufig auf und muß ebenso gut beherrscht werden.

Beispiel 3:

In einer Summe ist der erste Summand ein Bruch, dessen Zähler die Summe der Variablen u und v darstellt; sein Nenner ist die Differenz mit u als Minuend und v als Subtrahend. Der zweite Summand ist die Differenz aus 9 und dem Fünffachen von c.

Auch hier ist es nützlich, sich zunächst einen Termgliederungsbaum aufzuzeichnen. Der Term lautet:

$$\frac{u+v}{u-v} + (9 - 5c)$$

Beispiel 4:

Der Dividend eines Quotienten ist das Produkt aus der Zahl $\frac{6}{7}$ und der Variablen x; der Divisor ist der Quotient aus $\frac{3}{7}$ und x. Der Term lautet:

$(\frac{6}{7} \cdot x) : (\frac{3}{7} : x)$

Aufgaben

1. Begründe anhand der drei Termbildungsregeln, daß es sich bei den folgenden Beispielen um Terme handelt:

a) $3 \cdot 5 - 10 \cdot 10$ **b)** $24 : (6 : 2)$ **c)** $(24 : 6) : 2$

d) $\dfrac{6 - 2 \cdot 3}{3 \cdot 12 + 6 \cdot 6}$ **e)** $(s + t) \cdot (s - t)$ **f)** $\left(\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{b}{c}\right) \cdot (2a - 3c)$

2. Welche der folgenden »Schreibfiguren« sind keine Terme? Begründe jeweils deine Antwort.

a) $5 - 3$ **b)** $3 - 5$ **c)** $\dfrac{2-}{x-1}$ **d)** $(5 + (\cdot 3]$ **e)** $(2 - 7) : (n - n)$

f) $z(x + y)$ **g)** $z \cdot (x +) y$ **h)** $\dfrac{4w}{3 : t} \pm \dfrac{s}{t : 3}$ **i)** $24 : 6 : 2$

3. Gegeben sind die Terme $T_1 = x + 2$ und $T_2 = 3 - y$. Schreibe die folgenden Terme an und überlege bei Produkten, ob der Malpunkt geschrieben werden muß:

a) $T_1 + T_2$ **b)** $T_2 - T_1$ **c)** $T_1 \cdot T_2$ **d)** $\dfrac{T_1}{T_2}$ **e)** $2 \cdot T_1$

f) $1 : T_2$ **g)** $2 - T_1 \cdot T_2$ **h)** $T_1 : (T_2 : T_1)$ **i)** $T_1 : T_2 : T_1$

j) $T_2 : (T_1 : T_2)$ **k)** $T_1 - (T_2 - T_1)$ **l)** $1 : T_1 + 1 : T_2$

4. Vereinfache die Schreibweise der folgenden Terme, indem du unnötige Klammern und Malpunkte vermeidest.

a) $2 + (a \cdot b)$ **b)** $2 : (a \cdot b)$ **c)** $2 \cdot (a \cdot b)$

d) $7 \cdot 5 \cdot (x + 3)$ **e)** $7 \cdot x \cdot (x + 3)$ **f)** $(x - 2) \cdot (x + 3) \cdot 7$

g) $\left(\dfrac{10 - x \cdot 5}{3 \cdot y}\right) : 1\tfrac{1}{2}$ **h)** $\left[5y - \left(\dfrac{9}{x-1}\right)\right] \cdot (5 \cdot \tfrac{1}{2})$

i) $(a \cdot c) : b + \left(a : \dfrac{b}{2 \cdot c}\right)$ **k)** $[u : (5 : v)] + 1$ **l)** $u : [(5 : v) + 1]$

5. Ändere die Schreibweise der folgenden Terme so ab, daß kein Bruchstrich mehr vorkommt.

a) $\dfrac{5x + 1}{3}$ **b)** $\dfrac{5{,}7}{u - v}$ **c)** $\dfrac{4x - 7}{3y}$ **d)** $\dfrac{5x}{3y}$

e) $\dfrac{2x - 10}{3 + y}$ **f)** $\dfrac{2a}{b} + \dfrac{b}{3}$ **g)** $\dfrac{5c + 1}{8d} - \dfrac{2c}{d}$

6. Berechne und vergleiche:

a) $100 : 50 \cdot 10 \cdot 5$ **b)** $100 : (50 \cdot 10) \cdot 5$ **c)** $100 : (50 \cdot 10 \cdot 5)$

7. Berechne und vergleiche:

a) $12 : 6 : (4 \cdot 3)$ **b)** $12 : (6 : 4) \cdot 3$ **c)** $12 : (6 : 4 \cdot 3)$

8. Berechne und vergleiche:

a) $16 : 8 : 4 : 2$ **b)** $16 : 8 : (4 : 2)$ **c)** $16 : (8 : 4) : 2$ **d)** $16 : (8 : 4 : 2)$

9. Zeichne jeweils den Termgliederungsbaum und beschreibe den Aufbau des Terms in Worten:

a) $(x+y) \cdot 5 - 3$ **b)** $(x+y) \cdot (5-3)$ **c)** $x + (y \cdot 5 - 3)$

d) $x + y \cdot (5-3)$ **e)** $(x + y \cdot 5) - 3$ **f)** $(u - v) - w$

g) $u - (v - w)$ **h)** $1 : [a \cdot (b : c)]$ **i)** $(1 : a) \cdot (b : c)$

j) $[1 : (a \cdot b)] : c$ **k)** $\frac{x}{3} + \frac{3}{x}$ **l)** $\left(\frac{x}{3} + \frac{3}{x}\right) \cdot 1$

10. Schreibe die folgenden Terme an:

a) die Summe aus der Variablen z und dem Produkt von 7 und der Variablen y;

b) die Differenz mit dem Produkt der Variablen u und v als Minuenden und der Summe dieser Variablen als Subtrahenden;

c) den Bruch mit dem Zähler $\frac{3}{7}$ und der Summe aus dem Fünffachen von p und dem dritten Teil von q als Nenner;

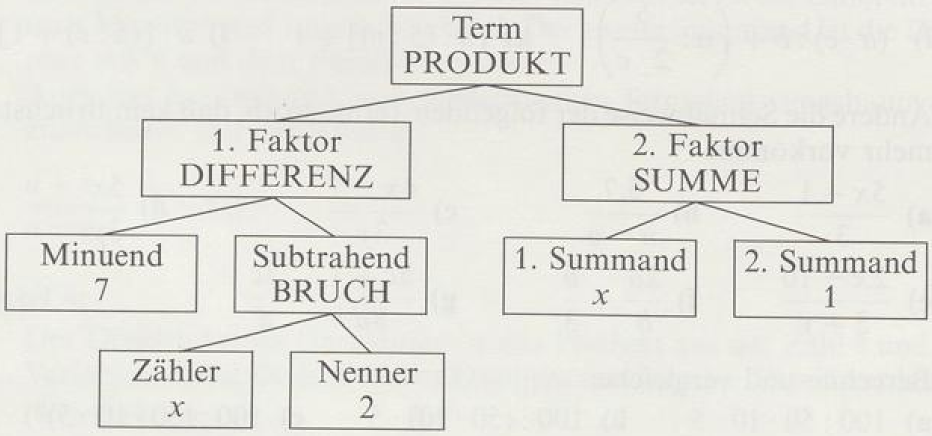
d) das Produkt aus der Differenz von 15 und t als erstem Faktor und dem Quotienten aus z und 5 als zweitem Faktor;

e) den Quotienten, dessen Divisor die Summe der Variablen x und y ist, während der Dividend das Produkt derselben Variablen ist;

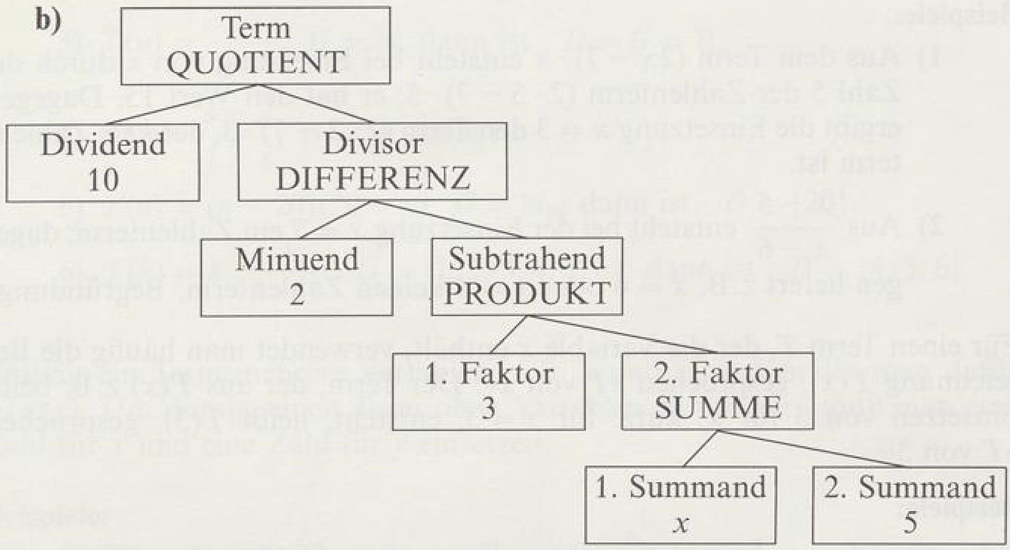
f) den Quotienten mit der Variablen b als Dividenden und folgender Summe als Divisor: der erste Summand ist das Produkt aus 7 und der Differenz von 12 und dem Dreifachen der Variablen a; der zweite Summand heißt 1.

11. Welcher Term wird durch folgenden »Baum« dargestellt?

a)



b)



1.4 Definitionsmenge eines Terms

Die einfachsten Terme sind solche, die keine Variablen enthalten. Bei einem derartigen Term wird es oft möglich sein, *alle* verlangten Rechenschritte auszuführen; in diesem Fall ist der Term selbst eine Schreibweise für eine bestimmte Zahl aus $\mathbb{B}$.
Wir führen folgende Bezeichnung ein:

Definition 27.1: Jeder Term, der eine Zahl aus $\mathbb{B}$ darstellt, heißt **Zahlenterm.**

Beispiele:

1) $\dfrac{5-2}{3 \cdot 4}$ ist eine Schreibweise für die Zahl $\frac{1}{4}$, also ein Zahlenterm.

2) $(\frac{5}{8} : 2 - \frac{3}{16}) \cdot 32 - 4$ stellt die Zahl 0 dar, ist also ein Zahlenterm.

3) $(3{,}75 - \frac{13}{4}) : (3{,}25 - 2 \cdot 1\frac{5}{8})$ ist kein Zahlenterm, da Division durch 0 nicht möglich ist.

4) $[(51 \cdot 49 + 1) - 50 \cdot 10] : 10$ ist eine Schreibweise für die Zahl 200, also ein Zahlenterm.

5) $(15 - 25) + 8$ ist kein Zahlenterm; die verlangte Subtraktion ist nicht ausführbar.

6) $0 \cdot (1 - 2)$ ist kein Zahlenterm, da die verlangte Subtraktion nicht ausführbar ist.

Ein Term, der eine Variable enthält, kann zu einem Zahlenterm werden, wenn man für die Variable eine Zahl einsetzt.