Algebra

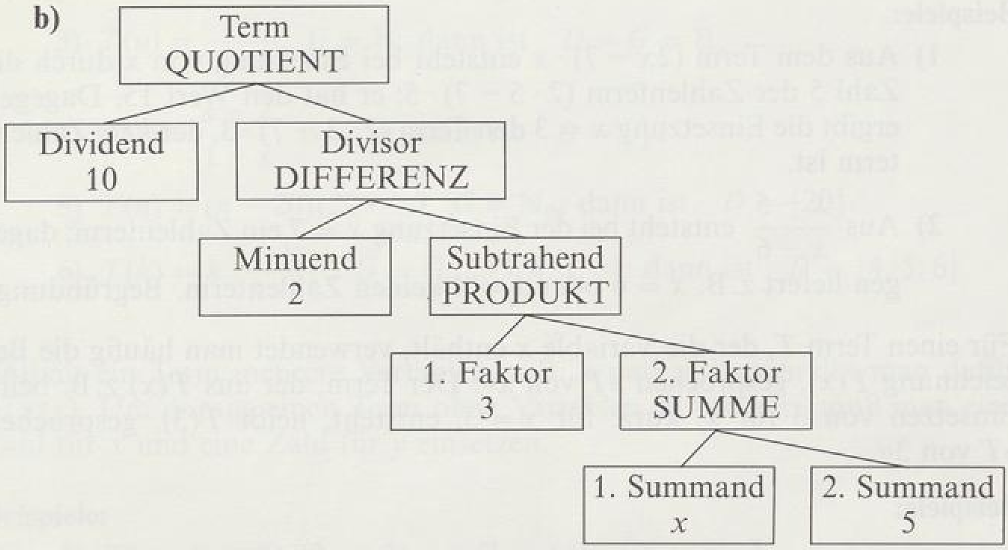
Barth, Friedrich

München, 1996

1.4 Definitionsmenge eines Terms

urn:nbn:de:hbz:466:1-83493

b)



1.4 Definitionsmenge eines Terms

Die einfachsten Terme sind solche, die keine Variablen enthalten. Bei einem derartigen Term wird es oft möglich sein, *alle* verlangten Rechenschritte auszuführen; in diesem Fall ist der Term selbst eine Schreibweise für eine bestimmte Zahl aus $\mathbb{B}$.
Wir führen folgende Bezeichnung ein:

Definition 27.1: Jeder Term, der eine Zahl aus $\mathbb{B}$ darstellt, heißt **Zahlenterm.**

Beispiele:

1) $\frac{5-2}{3\cdot 4}$ ist eine Schreibweise für die Zahl $\frac{1}{4}$, also ein Zahlenterm.
2) $(\frac{5}{8} : 2 - \frac{3}{16}) \cdot 32 - 4$ stellt die Zahl 0 dar, ist also ein Zahlenterm.
3) $(3{,}75 - \frac{13}{4}) : (3{,}25 - 2 \cdot 1\frac{5}{8})$ ist kein Zahlenterm, da Division durch 0 nicht möglich ist.
4) $[(51 \cdot 49 + 1) - 50 \cdot 10] : 10$ ist eine Schreibweise für die Zahl 200, also ein Zahlenterm.
5) $(15 - 25) + 8$ ist kein Zahlenterm; die verlangte Subtraktion ist nicht ausführbar.
6) $0 \cdot (1 - 2)$ ist kein Zahlenterm, da die verlangte Subtraktion nicht ausführbar ist.

Ein Term, der eine Variable enthält, kann zu einem Zahlenterm werden, wenn man für die Variable eine Zahl einsetzt.

Beispiele:

1) Aus dem Term $(2x-7)\cdot x$ entsteht bei Ersetzung von x durch die Zahl 5 der Zahlenterm $(2\cdot 5-7)\cdot 5$; er hat den Wert 15. Dagegen ergibt die Einsetzung $x=3$ den Term $(2\cdot 3-7)\cdot 3$, der *kein* Zahlenterm ist.

2) Aus $\dfrac{x-5}{x-6}$ entsteht bei der Einsetzung $x=7$ ein Zahlenterm; dagegen liefert z. B. $x=6$ oder $x=4$ keinen Zahlenterm. Begründung?

Für einen Term T, der die Variable x enthält, verwendet man häufig die Bezeichnung $T(x)$, gesprochen »T von x«. Der Term, der aus $T(x)$ z. B. beim Einsetzen von 3 für x, kurz: für $x=3$, entsteht, heißt $T(3)$, gesprochen »T von 3«.

Beispiele:

1) $T(x)=\dfrac{x}{x+1}$.

Dann gilt: $T(1)=\dfrac{1}{1+1}$; $T(\frac{2}{3})=\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+1}$; $T(0)=\dfrac{0}{0+1}$.

2) $T(z)=(2z-15)\left(\dfrac{z}{2}+3\right)$.

Dann gilt: $T(2)=(2\cdot 2-15)(\frac{2}{2}+3)$;
$T(5)=(2\cdot 5-15)(\frac{5}{2}+3)$;
$T(\frac{53}{7})=(2\cdot\frac{53}{7}-15)(\frac{53}{7}:2+3)$.

Welche der in den letzten beiden Beispielen angegebenen Terme sind Zahlenterme? Welche Zahlen aus $\mathbb{B}$ darf man in $T(x)$ bzw. in $T(z)$ einsetzen, wenn man einen Zahlenterm erhalten will?
Die Einsetzungen in die Variable eines Terms werden stets aus einer **Grundmenge G** genommen, welche eine echte oder unechte Teilmenge von $\mathbb{B}$ ist. Dabei interessiert man sich besonders für diejenigen Einsetzungen, die auf einen *Zahlenterm* führen.

Definition 28.1: Gegeben sei ein Term $T(x)$ und eine Grundmenge G. Die Menge D aller Zahlen a aus G, für die $T(a)$ ein Zahlenterm ist, heißt **Definitionsmenge** von $T(x)$ bezüglich der Grundmenge G. Kürzer:
$D=\{a \mid a\in G$ und $T(a)$ ist Zahlenterm$\}$

Beispiele:

Begründe jeweils die Angabe über D.

1) $T(x)=(5-x)(x+5)$, $G=\mathbb{N}$; dann ist $D=\{1,2,3,4,5\}$.

2) $T(y)=(y-3)(4-y)$, $G=\mathbb{B}$;
dann ist $D=\{y \mid y\in\mathbb{B}$ und $3\leqq y\leqq 4\}$.

3) $T(u) = \frac{2u}{u+1}$, $G = \mathbb{B}$; dann ist $D = G = \mathbb{B}$.

4) $T(s) = \frac{s-2}{1-s}$, $G = \mathbb{B}$; dann ist $D = \{\}$.

5) $T(n) = (n-20)(20-n)$, $G = \mathbb{N}_0$; dann ist $D = \{20\}$.

6) $T(k) = k \cdot \frac{1}{k-3}$, $G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; dann ist $D = \{4, 5, 6\}$.

Enthält ein Term mehrere Variablen, z.B. x und y, so schreibt man dafür $T(x; y)$. Um daraus einen Term ohne Variablen zu machen, muß man eine Zahl für x und eine Zahl für y einsetzen.

Beispiele:

1) $T(x; y) = x + (2y - 3)$, $x \in \mathbb{B}$, $y \in \mathbb{B}$;
$x = 2$ und $y = 5$ ergibt $T(2; 5) = 9$;
$x = 0{,}6$ und $y = 3{,}05$ ergibt $T(0{,}6; 3{,}05) = 3{,}7$;
$x = 0$ und $y = 1$ ergibt keinen Zahlenterm.

2) $T(a; b; c) = [a(b+c) + b(a+c)] - c(a+b)$, $a \in \mathbb{B}$, $b \in \mathbb{B}$, $c \in \mathbb{B}$;
$a = 0$, $b = 10$ und $c = 5$ ergibt $T(0; 10; 5) = 0$;
$a = 1$, $b = 2{,}5$ und $c = 3{,}14$ ergibt $T(1; 2{,}5; 3{,}14) = 5$.

Aufgaben

1. Entscheide, welche der folgenden Terme Zahlenterme sind, und ermittle gegebenenfalls eine möglichst einfache Schreibweise für diese Zahlen.
   a) $2 \cdot 17 + (26 + 5) \cdot 13$ **b)** $(7 \cdot 18 - 8 \cdot 17) : 5$
   c) $(5 \cdot 25) : (17 : 5 - 3{,}4)$ **d)** $(7 \cdot 19 - 399 : 3) : (\frac{22}{7} - 3{,}14)$
   e) $\frac{2^5 - 5^2}{5 \cdot 2} : \frac{3^3 + 2^3 + 1^3}{3 \cdot 4}$ **f)** $\frac{(2-5) \cdot 7}{(2-5) \cdot 3}$

2. Gegeben ist der Term $T(x) = (2x - 5) : (16 - 2x)$. Setze für die Variable x die angegebenen Zahlen ein und entscheide jeweils, ob ein Zahlenterm entsteht. Gib dann die Zahl in möglichst einfacher Form an.
   a) 5 **b)** $\frac{8}{3}$ **c)** 1,5 **d)** $6\frac{1}{7}$ **e)** 8 **f)** 7,99 **g)** 100

3. Bearbeite wie bei Aufgabe **2** die folgenden Beispiele:
   a) $T(y) = 10 \cdot y - 10 : y$; Einsetzungen für y: 0; $\frac{1}{2}$; 1; 2; 10
   b) $T(z) = (3z - 2) \cdot (5z - 3)$; Einsetzungen für z: 1; 2; 3; 4; 5
   c) $T(n) = \frac{n \cdot (n-1)}{n - (n-2)}$; Einsetzungen für n: 0; 1; 2; 3; 4

4. Bestimme bezüglich der Grundmenge $\mathbb{N}_0$ die Definitionsmengen der folgenden Terme:

a) $T(x) = x$ **b)** $T(x) = \frac{1}{x}$ **c)** $T(x) = x + 3$

d) $T(x) = x - 3$ **e)** $T(x) = 3 - x$ **f)** $T(x) = \frac{1}{3 - x}$

g) $T(x) = 2x + 5$ **h)** $T(x) = 2x - 5$ **i)** $T(x) = 5 - 2x$

5. Wie lauten die Definitionsmengen der Terme von Aufgabe **4**, wenn man $\mathbb{B}$ als Grundmenge wählt?

6. Grundmenge sei $\mathbb{B}$. Ermittle auf dieser Grundmenge die Definitionsmengen folgender Terme:

a) $T(y) = (y + 1) \cdot (y + 3)$ **b)** $T(y) = (y - 1) \cdot (y + 3)$
c) $T(y) = (y + 1) \cdot (y - 3)$ **d)** $T(y) = (y - 1) \cdot (y - 3)$
e) $T(y) = (1 - y) \cdot (y + 3)$ **f)** $T(y) = (1 - y) \cdot (y - 3)$
g) $T(y) = (1 - y) \cdot (3 - y)$ **h)** $T(y) = (y - 1) \cdot (3 - y)$

7. Welche Definitionsmenge haben bezüglich der Grundmenge $\mathbb{B}$ die folgenden Terme?

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x - 2}$ **b)** $\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 2}$

c) $\frac{1}{x - 2} + \frac{1}{2 - x}$ **d)** $\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{4 - x}$

8. Gegeben ist der Term $T(x; y) = (2x + 5) - 3y$.
Welche der folgenden Terme sind Zahlenterme? Gib die entsprechenden Zahlen in möglichst einfacher Form an.

a) $T(3; 2)$ **b)** $T(\frac{1}{2}; \frac{1}{3})$ **c)** $T(6; 6)$ **d)** $T(5; 5)$ **e)** $T(2{,}3; 3{,}2)$

9. $T(a; b) = (a + b) \cdot (4a - b) - 3ab$. Berechne, falls möglich,

a) $T(3; 1)$ **b)** $T(1; 3)$ **c)** $T(\frac{1}{6}; \frac{1}{3})$ **d)** $T(\frac{15}{16}; 2)$ **e)** $T(\frac{16}{15}; 2)$.

•**10.** $T(x; y) = (2x + 3y) - 8$.

a) Welche Definitionsmenge D_x hat $T(x; 2)$?
b) Welche Definitionsmenge D_y hat $T(3; y)$?

**Zur Geschichte unserer Fachausdrücke

Fast alle mathematischen Fachwörter stammen aus dem Lateinischen, einige auch aus dem Griechischen. Natürlich können wir oft nicht sagen, wer als erster ein Fachwort wirklich erfunden und benutzt hat; denn viele Handschriften sind durch Kriege und durch Verfolgungen vernichtet worden, andere wurden einfach nicht mehr abgeschrieben, weil es inzwischen modernere Abhandlungen über dasselbe Thema gab. Wir können daher oft nur angeben, in welchen uns zufällig erhalten gebliebenen Schriften wir