Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

2 Die rationalen Zahlen und ihre Rechengesetze

urn:nbn:de:hbz:466:1-83493

2 Die rationalen Zahlen und ihre Rechengesetze

TYPUS ARITHMETICAE – DIE DAME ARITHMETICA

2 Die rationalen Zahlen und ihre Rechengesetze

2.1 Die Zahlenmenge $\mathbb{B}$ reicht nicht aus!

Die Menge $\mathbb{B}$ der Bruchzahlen hat, abgesehen von der grundsätzlich unmöglichen Division durch null, für das Rechnen einen wesentlichen Mangel: die Subtraktion zweier Zahlen aus $\mathbb{B}$ ist nicht immer ausführbar. Dieser Mangel ist nicht nur ein Schönheitsfehler innerhalb der mathematischen Theorie, er macht sich auch in der Praxis störend bemerkbar.

Beispiele:

1) An einem Dezembertag zeigt mittags das Thermometer die Temperatur 4 °C (= 4 Grad Celsius) an. Bis zum Abend nimmt sie um 3 Grad ab. Daraus können wir den neuen Thermometerstand berechnen: 4 Grad − 3 Grad = 1 Grad; die Abendtemperatur beträgt also 1 °C. Bis Mitternacht sinkt nun die Temperatur noch einmal um 4 Grad. Wie kann man jetzt die neue Temperaturanzeige ermitteln? Die Rechnung »1 Grad minus 4 Grad« ist ja nicht ausführbar! Bekanntlich hilft man sich hier so, daß man z. B. sagt, die Temperatur sei auf »3 Grad unter 0« gesunken oder die Temperatur sei »minus 3 Grad«, wofür man kurz » − 3 °C« schreibt (Abbildung 36.1).

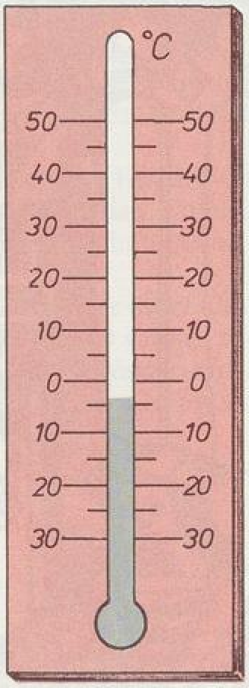


Abb. 36.1 Thermometer

2) Herr Knapp hat auf seinem Bankkonto 530,60 DM. Für dringende Anschaffungen benötigt er 700 DM, die er von seinem Konto abhebt. Auf seinem nächsten Kontoauszug dürfte Herr Knapp als Kontostand » − 169,40 DM« oder auch »169,40 DM Soll« lesen. Das bedeutet, daß er der Bank 169,40 DM schuldet (Abbildung 37.1).

3) In Ägypten liegt westlich von Kairo die Kattara-Senke, für die man im Atlas die Höhenangabe » − 134« findet. Damit wird bekanntlich ausgedrückt, daß der so gekennzeichnete Ort »134 m unter dem Meeresspiegel«, genauer: 134 m tiefer als der Nullpunkt der für solche Höhenangaben verwendeten Skala liegt.* (Abbildung 37.2)

* Dieser Nullpunkt, genannt Normalnull (NN), ist nach dem Amsterdamer Pegel festgelegt und gibt ungefähr die mittlere Meereshöhe an.

KONTONUMMER 1234567890	ALTER KONTOSTAND VOM 14.01.85	 DM 530,60 HA
ABHEBUNG	AM 17.01.85	DM 700,00 SO
BUCHUNGSDATUM	NEUER KONTOSTAND 18.01.85	 DM 169,40 SO

Abb. 37.1 Kontoauszug

Wie diese Beispiele zeigen, kommt es vor, daß man beim Rückwärtszählen den Nullpunkt einer Skala, also eines Zahlenstrahls, überschreiten muß. Man gelangt zu Ergebnissen »unter Null«, zu deren Beschreibung man Zahlen benützt, vor die ein Minuszeichen gesetzt wird.
Sicher wäre es auch aus mathematischer Sicht günstig, wenn es Zahlen »unter Null« gäbe, mit denen man z. B. Rechnungen wie »$1 - 4$« ausführen könnte. Das Rechnen würde sich sehr vereinfachen, wenn auch die Subtraktion immer ausführbar wäre. Man müßte dann beim Auftreten von Differenzen nicht jedesmal überlegen, ob sie definiert sind bzw., falls Variablen vorkommen, für welche Werte der Variablen das der Fall ist.
Eine ähnliche Situation gab es schon früher beim Rechnen mit den natürlichen Zahlen*. Dort war die *Division* nicht unbeschränkt ausführbar; man konnte z. B. 12 nicht in 5 gleiche Teile zerlegen. Diese Schwierigkeit ließ sich dadurch

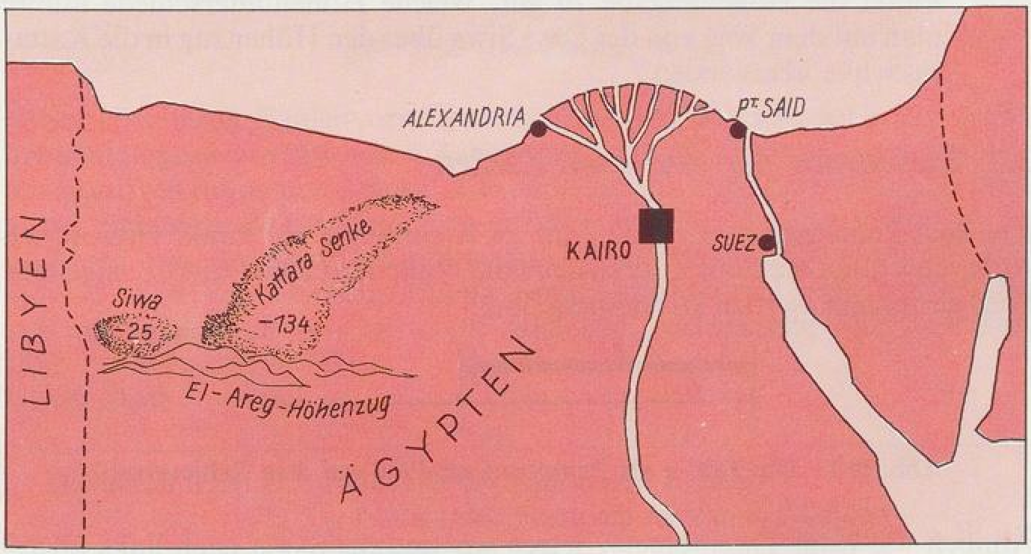


Abb. 37.2 Die Kattára-Senke in Ägypten

* Die Zahlen der Folge 1, 2, 3, ... nannte bereits NIKOMACHOS von Gerasa (um 100 n. Chr.) φυσικὸς ἀριθμός (physikós arithmós), was BOETHIUS (um 480–524/525) mit *numerus naturalis* ins Lateinische übersetzte und das im Deutschen zu **natürliche Zahl** wurde.

beseitigen, daß man die Menge $\mathbb{N}_0$ durch Einführung der Brüche erweiterte. In dem größeren Zahlenbereich $\mathbb{B}$ ist die Division immer ausführbar, falls der Divisor von 0 verschieden ist; z.B. gilt $12 : 5 = 2\frac{2}{5}$.
Dieses Beispiel legt den Versuch nahe, die Menge $\mathbb{B}$ noch einmal durch neue Zahlen so zu erweitern, daß auch die Subtraktion immer ausführbar wird. Natürlich ist eine solche Erweiterung nur dann sinnvoll, wenn man im vergrößerten Zahlenbereich wieder »vernünftig« rechnen kann! Das soll heißen: In der erweiterten Zahlenmenge sollen die gleichen Rechengesetze wie bisher gelten. Diesen Grundsatz, von dem man sich in solchen Fällen stets leiten läßt, bezeichnet man als **Permanenzprinzip**, genauer »Prinzip der Permanenz der Rechengesetze*«. Ob sich dieses Anliegen verwirklichen läßt, ist natürlich nicht von vornherein sicher.

Aufgaben

1. Was zeigt ein Thermometer an, wenn die Temperatur von $-3\,°C$ aus
a) um 4 Grad sinkt, **b)** um 2,5 Grad steigt, **c)** um 11 Grad steigt?

2. Nachdem der Kontostand des Herrn Knapp auf $-169{,}40$ DM gesunken war, erhielt er vom Finanzamt eine Steuerrückzahlung von 340,00 DM. Welches Guthaben stand dann auf seinem nächsten Kontoauszug?

3. Westlich der Kattara-Senke mit der Höhenangabe -134 liegt die Oase Siwa, für deren tiefsten Punkt im Atlas die Angabe -25 zu finden ist.
a) Welche der beiden Senken liegt tiefer und wie groß ist der Unterschied?
b) Zwischen den beiden Senken liegt ein Höhenzug, für dessen höchsten Punkt die Höhenangabe 70 gilt. Welche Höhenunterschiede müßte man auf dem Weg von der Oase Siwa über den Höhenzug in die Kattara-Senke überwinden?

2.2 Einführung der negativen Zahlen

Auf dem Zahlenstrahl ist jeder Zahl $x \in \mathbb{B}$ eindeutig ein Punkt zugeordnet. Außerdem kann die Zahl x durch den vom Nullpunkt zum Punkt x zeigenden Pfeil dargestellt werden (Abbildung 38.1).

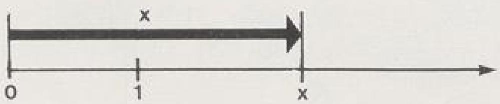


Abb. 38.1 Die Zahl x als Punkt und als Pfeil auf dem Zahlenstrahl

Ähnlich wie beim Thermometer setzen wir nun die Skala nach links über 0 hinaus fort. Indem wir eine, zwei, drei, ... Längeneinheiten nach links abtra-

* permanere (lat.) = fortdauern, erhalten bleiben. Der Ausdruck *Permanenzprinzip* wurde von dem englischen Mathematiker und Professor der Astronomie George Peacock (1791–1858) in seinem 1830 erschienenen Werk *A treatise of algebra* geprägt. – Siehe Abbildung 86.1.

gen, erhalten wir Punkte, die wir mit $-1, -2, -3, \ldots$ bezeichnen. Allgemein erhalten wir zu jeder Zahl $x > 0$, also $x \in \mathbb{B}$, den links von 0 liegenden Punkt $-x$, indem wir den zu x gehörigen Pfeil um den Nullpunkt nach links umklappen. Das heißt, wir zeichnen von 0 aus einen nach **links** gerichteten Pfeil der Länge x. Seine Spitze liefert einen Punkt, den wir mit $-x$ beschriften. Den Pfeil selbst bezeichnen wir ebenfalls mit $-x$ (Abbildung 39.1).

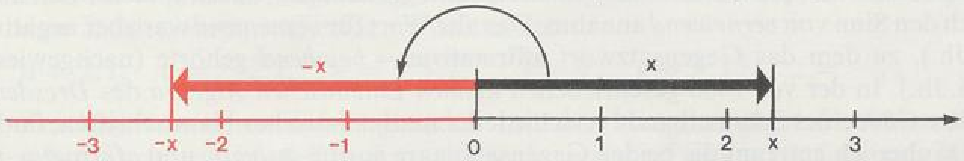


Abb. 39.1 Erweiterung des Zahlenstrahls

Natürlich wollen wir nun diese Punkte bzw. Pfeile $-1, -2, -3, \ldots$, allgemein $-x$, als Veranschaulichungen neuer Zahlen deuten! Diese ebenfalls mit $-1, -2, -3, \ldots, -x, \ldots$ bezeichneten Zahlen nennen wir **negative Zahlen**. In dieser Bezeichnung kommt zum Ausdruck, daß es sich bei ihnen um die »Gegenstücke« zu den schon bekannten positiven Zahlen, also den Zahlen der Menge $\mathbb{B} \setminus \{0\}$ (= $\mathbb{B}$ ohne die Zahl 0), handelt. Der erweiterte Zahlenstrahl heißt **Zahlengerade** (Abbildung 39.2).

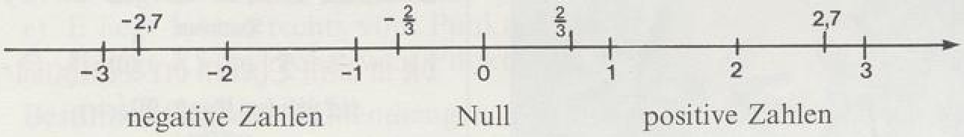


Abb. 39.2 Die Zahlengerade

Unser erweiterter Zahlenvorrat besteht nunmehr also aus den schon bisher bekannten positiven rationalen Zahlen und der Null sowie den neu eingeführten negativen rationalen Zahlen. Alle diese Zahlen zusammen bilden die **Menge der rationalen Zahlen***, die man mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet. Für die Teilmenge der positiven bzw. der negativen rationalen Zahlen verwendet man die Bezeichnung $\mathbb{Q}^+$ bzw. $\mathbb{Q}^-$. Die bisher häufig benützte Zahlenmenge $\mathbb{B}$ (Brüche!) läßt sich nun in der Form $\mathbb{B} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ darstellen; man schreibt dafür auch kurz $\mathbb{Q}_0^+$.

Es gilt also:

Definition 39.1: $\mathbb{Q}$ = Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{Q}^+$ = Menge der positiven rationalen Zahlen
$\mathbb{Q}^-$ = Menge der negativen rationalen Zahlen
$\mathbb{Q}_0^+$ = Menge der nicht-negativen rationalen Zahlen

* *rationalis* bedeutet seit dem 2. Jh. *zu den Rechnungen gehörend* und hängt mit *ratio = Rechnung, Verhältnis, Vernunft* zusammen. Die mathematische Bedeutung können wir dir aber erst im Band *Algebra 3* erklären.

**Zur Geschichte der Fachwörter *positiv* und *negativ*

An der Entstehung des heutigen Gegensatzpaares *positiv–negativ* kann man sehr gut verfolgen, wie bei der Herausbildung einer Fachsprache die ursprüngliche Bedeutung der Wörter meist verlorengeht.
Das seit dem 4. Jh. belegte lateinische Wort **positivus** = *gesetzt, gegeben* hatte als Gegensatz das Wort **privativus** = *abgesondert, hinweggenommen*, das in späterer Zeit auch noch den Sinn von *verneinend* annahm. Das alte Wort für *verneinend* war aber **negativus** (2. Jh.), zu dem das Gegensatzwort **affirmativus** = *bejahend* gehörte (nachgewiesen 5./6. Jh.). In der vor 1486 geschriebenen *kleinen Lateinischen Algebra* des *Dresdener Codex C80*, eines Sammelbands verschiedener mathematischer Handschriften, finden wir säuberlich getrennt die beiden Gegensatzpaare *positiv–privativ* und *affirmativ–negativ*. Bald jedoch werden diese Paare vermischt, und das Wort *privativ* verschwindet immer mehr und wird durch *negativ* ersetzt. So verwendet François Viète (1540–1603) den Gegensatz *affirmativus–negatus* (1591). Der deutsche Philosoph und Mathematiker Christian von Wolff (1679–1754) verfaßt 1716 ein *Mathematisches Lexicon*, in dem das Gegensatzpaar *positiv–negativ* zu Fachwörtern wird. Und dabei ist es dann geblieben!

Abb. 40.1 Christian, Freiherr von (seit 1745) Wolff, auch Wolf, (24.1.1679 Breslau – 9.4.1754 Halle/Saale)


Mathematisches
LEXICON,
Darinnen
die in allen Theilen der Mathema-
tick üblichen Kunst-Wörter
erkläret,
und
Zur Historie
der
Mathematischen Wissenschafften
dienliche Nachrichten ertheilet,
Auch die Schrifften,
wo iede Materie ausgeführet zu finden,
angeführet werden:
Auff Begehren heraus gegeben
von
Christian Wolffen,
K. P. H. und P. P. O.
Leipzig,
Bey Joh. Friedrich Gleditschens seel. Sohn.
1716.

Abb. 40.2 Titelblatt der 1. Auflage

Aufgaben

1. Trage auf einer Zahlengeraden mit der Längeneinheit 1 cm die zu folgenden Zahlen gehörenden Punkte ein:
a) 4,6 **b)** -4 **c)** 0 **d)** $-1{,}5$ **e)** 2,2 **f)** $-3\frac{1}{2}$

2. Gib auf einer Zahlengeraden mit der Längeneinheit 2 cm die den folgenden Zahlen entsprechenden Punkte an:
$u = 2{,}1$; $v = -2{,}1$; $w = -1{,}25$; $x = \frac{3}{4}$; $y = -1\frac{2}{5}$; $z = -\frac{7}{10}$.

3. Zeichne von einer Zahlengeraden mit der Längeneinheit 6 cm den Abschnitt von -1 bis 0,5 und markiere darauf die Punkte für folgende Zahlen:
a) $x_1 = \frac{1}{3}$ **b)** $x_2 = -\frac{2}{3}$ **c)** $x_3 = -\frac{5}{6}$ **d)** $x_4 = \frac{5}{12}$ **e)** $x_5 = -\frac{1}{12}$
f) $y_1 = 0{,}2$ **g)** $y_2 = -0{,}3$ **h)** $y_3 = -0{,}90$ **i)** $y_4 = -0{,}05$

4. Zeichne für eine Zahlengerade mit der Längeneinheit 1 cm den Abschnitt von -5 bis 5. Trage darauf folgende Punkte ein und gib die zugehörigen rationalen Zahlen an:
a) A liegt 3,5 cm links vom Punkt 2.
b) B liegt 2,8 cm rechts vom Punkt -5.
c) C liegt $2\frac{3}{4}$ cm links vom Punkt 0.
d) D liegt 3 cm links vom Punkt $\frac{17}{5}$.
e) E liegt 1,4 cm rechts vom Punkt $-1\frac{4}{5}$.
f) F liegt 4,5 cm rechts vom Punkt $-4\frac{1}{2}$.

5. Bestimme folgende Zahlenmengen. (Beschreibe die sich ergebenden Mengen zuerst in Worten und dann mit Mengensymbolen.)
a) $\mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{Q}^-$ **b)** $\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-$ **c)** $\mathbb{Q} \cap \mathbb{N}$ **d)** $\mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{N}_0$
e) $\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{N}_0$ **f)** $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}^-$ **g)** $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}^+$ **h)** $\mathbb{Q} \setminus (\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-)$

2.3 Zahl und Gegenzahl, absoluter Betrag

Jede Zahl $a \in \mathbb{Q}$ läßt sich auf der Zahlengeraden durch den von 0 zum Punkt a zeigenden Pfeil darstellen. Zu dem gleich langen, aber entgegengesetzt gerichteten Pfeil gehört wieder eine rationale Zahl, die wir die Gegenzahl von a nennen und mit $-a$ bezeichnen.

Definition 41.1: Zwei Zahlen, zu denen auf der Zahlengeraden gleich lange, aber entgegengesetzt gerichtete Pfeile gehören, heißen (ein Paar von) **Gegenzahlen**.
Die Gegenzahl von a wird mit $-a$ bezeichnet.

Die schon auf Seite 39 eingeführte Schreibweise für die negativen Zahlen steht im Einklang mit der in dieser Definition vereinbarten Bedeutung von $-a$: negative Zahlen wie -1; $-3{,}7$; $-\frac{2}{3}$; ... sind ja gerade die Gegenzahlen der entsprechenden positiven Zahlen 1; 3,7; $\frac{2}{3}$; ... Beachte aber, daß Definition 41.1 für beliebige, also auch für negative Zahlen gilt! (Abbildung 42.1)

Abb. 42.1 Zahl und Gegenzahl

Beispiele:

Die Gegenzahl von 5,2 ist $-5{,}2$.
Die Gegenzahl von 0 ist $-0 = 0$.
Die Gegenzahl von -3 heißt $-(-3)$; ihr Pfeil ergibt sich aus dem Pfeil für -3 durch Umklappen und somit aus dem Pfeil 3 durch zweimaliges Umklappen. Also gilt: $-(-3) = 3$.

Die im letzten Beispiel durchgeführte Überlegung läßt sich auf jede Zahl anwenden. Daher gilt:

Satz 42.1: Für $a \in \mathbb{Q}$ gilt: $\boldsymbol{-(-a) = a}$.

Die Gegenzahlen der natürlichen Zahlen, also $-1, -2, -3, \ldots$ werden als **negative ganze Zahlen** bezeichnet. Sie bilden zusammen mit 0 und den natürlichen Zahlen die Menge der ganzen Zahlen, für welche das Zeichen $\mathbb{Z}$ verwendet wird:

Definition 42.1: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ heißt Menge der **ganzen Zahlen**.*

Abb. 42.2 Die ganzen Zahlen

In Beispielen wie -3, $-\frac{2}{3}$, $-a$, $-(x+5)$, ... ist das Minuszeichen kein Rechenzeichen, es wird ja keine Subtraktion verlangt. Das vorangestellte Minuszeichen bedeutet hier jeweils die Aufforderung »Bilde die Gegenzahl von«.

* Der Ausdruck **ganze Zahl** ist die deutsche Übersetzung des lateinischen *numerus integer*, mit dem LEONARDO VON PISA (um 1170–nach 1240) den ἀριθμὸς ὁλόκληρος (arithmós holókleros) des DIOPHANT (um 250 n. Chr.) ins Lateinische übertragen hatte. Sowohl das lateinische wie auch das griechische Adjektiv bedeuten *unversehrt, vollständig, noch ganz*.

Derartige Minuszeichen nennt man **Vorzeichen**. In entsprechender Weise wird oft auch das Pluszeichen als Vorzeichen verwendet, wofür man festsetzt: $+a = a$, $(a \in \mathbb{Q})$. Obwohl man demnach auf das Vorzeichen »+« verzichten könnte, erweist sich, wie sich noch zeigen wird, seine Verwendung gelegentlich doch als nützlich und sinnvoll.
Besonders wichtig ist es, sich klarzumachen, daß das Vorzeichen »−« keineswegs immer auf eine negative Zahl hinweist! Es gilt ja:

> **Satz 43.1:** $-a$ ist $\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}$ genau dann, wenn a $\begin{matrix}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{matrix}$ ist.

Eine Zahl und ihre Gegenzahl werden durch Pfeile gleicher Länge dargestellt; die entsprechenden Punkte auf der Zahlengeraden haben vom Nullpunkt gleiche Entfernung.

> **Definition 43.1:** Die Entfernung des Punktes a vom Nullpunkt, also die Länge des Pfeiles a, heißt **absoluter Betrag der Zahl a**; er wird mit $|a|$ bezeichnet.
> Die beiden senkrechten Striche nennt man »Betragsstriche«.

Der Fachausdruck *absoluter Betrag* und die beiden senkrechten Striche dafür wurden von Karl Theodor Wilhelm WEIERSTRASS (1815–1897) eingeführt. Im Druck erschien *absoluter Betrag* 1856, die Absolutstriche aber erst 1876. WEIERSTRASS war von 1842 bis 1855 Lehrer an einem Gymnasium, wurde dann als Professor ans Gewerbeinstitut nach Berlin und 1864 an die Universität berufen. Er ist einer der bedeutendsten Mathematiker des 19. Jh.s.

Abb. 43.1 Karl Theodor Wilhelm WEIERSTRASS (31.10.1815 Ostenfelde/Landkreis Warendorf – 19.2.1897 Berlin)

Eine Zahl und ihre Gegenzahl haben denselben Absolutbetrag; denn die entsprechenden Pfeile sind gleich lang.

Beispiele:

1) $|3| = |-3| = 3$;

2) $|-1{,}7| = |1{,}7| = 1{,}7$;

3) $|\frac{3}{7}| = |-\frac{3}{7}| = \frac{3}{7}$.

Da der Nullpfeil die Länge 0 hat, gilt $|0| = 0$. Jede von 0 verschiedene Zahl hat einen positiven Absolutbetrag.
Wir fassen zusammen:

> **Satz 44.1:** 1) Der Betrag einer Zahl ist nicht negativ.
> Es gilt also: $|a| \geqq 0$ für jedes $a \in \mathbb{Q}$.
> 2) Nur die Zahl 0 hat den Betrag 0.
> Kurz*: $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.
> 3) Zahl und Gegenzahl haben gleichen Betrag.
> Also: $|-a| = |a|$.

Bei positiven Zahlen und bei 0 stimmt der absolute Betrag mit der Zahl selbst überein. Bei negativen Zahlen unterscheidet sich jedoch der Betrag von der Zahl selbst:

Beispiele:

1) $|-2| = 2$, **2)** $|-5{,}17| = 5{,}17$, **3)** $|-\frac{5}{9}| = \frac{5}{9}$.

Die Beispiele lassen erkennen, daß der Betrag einer negativen Zahl a mit der positiven (!) Gegenzahl $-a$ übereinstimmt. Es gilt ja:
$|-2| = 2 = -(-2)$, $|-5{,}17| = 5{,}17 = -(-5{,}17)$ usw.
Diese Überlegungen führen zu

> **Satz 44.2:** $|a| = \begin{cases} a, & \text{wenn } a \text{ positiv ist;} \\ 0, & \text{wenn } a = 0; \\ -a, & \text{wenn } a \text{ negativ ist.} \end{cases}$

Dieser Satz zeigt, wie man den Betrag einer Zahl auch ohne Verwendung von Betragsstrichen angeben kann: Bei 0 und den positiven Zahlen darf man die Betragsstriche einfach weglassen; bei negativen Zahlen muß man als Betrag die Gegenzahl nehmen.

* Das Zeichen $\Leftrightarrow$ hat die Bedeutung »genau dann, wenn«.

Aufgaben

1. Wie heißt die Gegenzahl von
a) 167 **b)** $-3{,}14$ **c)** $2\frac{10}{11}$ **d)** $-0{,}001$?

2. Vereinfache die Schreibweise der folgenden Zahlen:
a) $-(-2)$ **b)** $-(-0{,}34)$ **c)** $-(-(-1))$ **d)** $-(-(-(-0{,}6)))$
e) $+49$ **f)** $-(+7{,}3)$ **g)** $-(+(-4))$ **h)** $+(-(+5))$

3. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Berichtige die falschen Aussagen.
a) Die Gegenzahl einer positiven Zahl ist nicht positiv.
b) Die Gegenzahl einer rationalen Zahl ist negativ.
c) Die Gegenzahl einer nichtnegativen Zahl ist negativ.
d) Die Gegenzahl einer natürlichen Zahl ist eine ganze Zahl.
e) Wenn man zu den Elementen von $\mathbb{N}$ alle ihre Gegenzahlen hinzufügt, erhält man die Menge $\mathbb{Z}$.

4. Bestimme $|x|$ für $x \in \{-1000;\ -111;\ -0{,}1;\ 0;\ 0{,}12;\ 63;\ 10^6\}$.

5. Bestimme alle Zahlen mit folgender Eigenschaft:
a) Der absolute Betrag ist 7,5.
b) Die Zahl ist negativ und hat den Betrag 2,8.
c) Die Zahl ist positiv und hat denselben Betrag wie -99.
d) Weder die Zahl selbst noch ihr absoluter Betrag sind positiv.
e) Die Zahl ist von ihrem Betrag verschieden, und dieser hat den Wert 7.

6. Berechne:
a) $|7{,}9| + |-5|$ **b)** $|7{,}9| - |-5|$
c) $|-81| + |-19|$ **d)** $|-81| - |19|$
e) $|-\frac{17}{20}| - |-0{,}85|$ **f)** $|-1| - |\frac{1}{2}| - |-\frac{1}{4}|$.

7. Bestimme die Lösungsmengen:
a) $|x| = 0{,}5$ **b)** $|x| = 7$ **c)** $|x| = 0$
d) $|x| = -1$ **e)** $|x| \geqq 0$ **f)** $|x| > 0$.

8. Welche Zahlen $z \in \mathbb{Z}$ erfüllen folgende Bedingung?
a) $|z| \leqq 0$ **b)** $|z| < 1$ **c)** $|z| \leqq 3$
d) $|z| > 0$ **e)** $|z| \geqq 2$ **f)** $1 < |z| < 4$.

2.4 Addition und Subtraktion von rationalen Zahlen

2.4.1 Definition der Addition

Ob die neu eingeführten negativen Zahlen zu Recht als Zahlen bezeichnet werden, entscheidet sich an der Frage, ob man mit ihnen in gewohnter Weise rechnen kann. Wir wollen dies zunächst für die Addition untersuchen. Dazu betrachten wir einige Beispiele von Summen aus rationalen Zahlen:

Beispiele:

1) $2 + 3{,}7$ **2)** $5 + 0$ **3)** $5{,}2 + (-3)$

4) $(-4) + 1\frac{3}{4}$ **5)** $(-2{,}4) + (-3{,}7)$ **6)** $0 + (-1)$

Beachte: Beim Anschreiben solcher Summen ist es wichtig, zwischen Rechenzeichen und Vorzeichen genau zu unterscheiden. Das Vorzeichen ist ein Bestandteil der betreffenden Zahl! Dies wird, wie die Beispiele 3 bis 6 zeigen, durch Klammern zum Ausdruck gebracht.

Die Summen in den Beispielen 1 und 2 sind von bekannter Art. Dagegen stellen uns die übrigen Beispiele vor neue Situationen: Wir wissen ja noch nicht, wie Summen mit negativen Summanden zu berechnen sind! Man muß erst einmal definieren, welche Bedeutung solche Summen haben sollen. Natürlich soll diese *Definition der Addition rationaler Zahlen* so beschaffen sein, daß sie für nicht-negative Summanden (Beispiele 1 und 2) mit der altbekannten Addition übereinstimmt.
Bei der Suche nach einer geeigneten Definition erinnern wir uns an die graphische Darstellung der Addition bei positiven Zahlen (Abbildung 46.1):

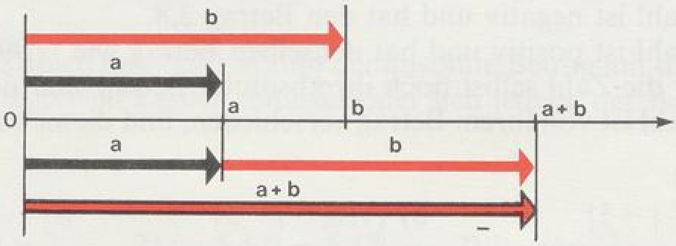


Abb. 46.1 Veranschaulichung der Addition in $\mathbb{Q}^+$

Man erhält, wie Abbildung 46.1 zeigt, den Pfeil für die Summe $a + b$, indem man an die Spitze des Pfeils a den Pfeil b ansetzt. Der Summenpfeil läuft dann vom Anfangspunkt des ersten zur Spitze des zweiten Summandenpfeils. Wir wollen dieses geometrische Verfahren im folgenden kurz als **Pfeiladdition** bezeichnen.
Es liegt nun nahe, diese Pfeiladdition versuchsweise auch auf Summen mit negativen Summanden zu übertragen. Für die obigen Beispiele 3, 4 und 5 ergeben sich dabei folgende Abbildungen:

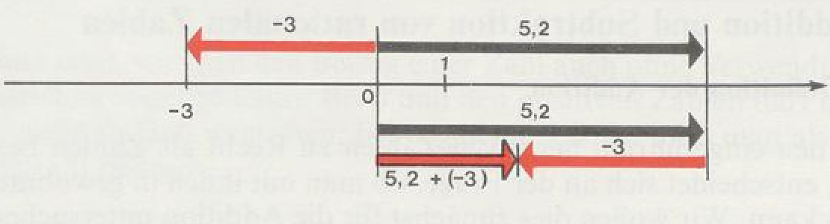


Abb. 46.2 $5{,}2 + (-3)$

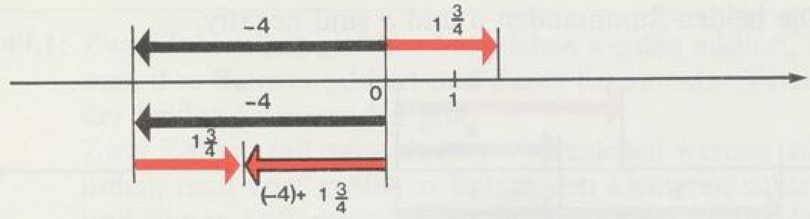


Abb. 47.1 $(-4)+1\frac{3}{4}$

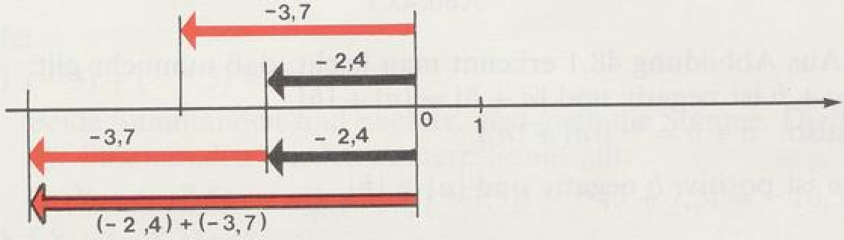


Abb. 47.2 $(-2{,}4)+(-3{,}7)$

Aus der jeweils leicht errechenbaren Länge und der Richtung des Summenpfeils erkennt man, daß dieses Additionsverfahren folgende Ergebnisse liefert: $5{,}2+(-3)=2{,}2$; $(-4)+1\frac{3}{4}=-2\frac{1}{4}$; $(-2{,}4)+(-3{,}7)=-6{,}1$.

Deutet man z. B. positive Zahlen als Guthaben, negative als Schulden, so erkennt man, daß diese Ergebnisse durchaus sinnvoll sind. Wir wollen daher das in diesen Beispielen angewandte Verfahren zur Definition der Addition beliebiger rationaler Zahlen verwenden.

Definition 47.1: Unter der Summe $a+b$ zweier rationaler Zahlen a und b verstehen wir diejenige Zahl, deren Pfeil sich durch Anwendung der Pfeiladdition auf die Pfeile a und b ergibt.

Mit dieser Definition ist es uns tatsächlich möglich, zwei beliebige Zahlen aus $\mathbb{Q}$ zu addieren. Wie man an den vorausgehenden Beispielen erkennt, sind dabei jeweils zwei Überlegungen notwendig, nämlich:

1. Welche Richtung hat der Summenpfeil (falls seine Länge nicht 0 ist)?
2. Wie lang ist der Summenpfeil?

Die Antwort auf die erste Frage liefert das Vorzeichen der zu bestimmenden Summe, die Antwort auf die zweite ihren Absolutbetrag. Wie man vorgehen muß, um jeweils die richtigen Antworten zu finden, hängt von Betrag und Vorzeichen der beiden Summanden ab.

Wir untersuchen dazu verschiedene typische Fälle:

Fall 1: Die beiden Summanden a und b sind positiv.
Für diesen längst bekannten Fall gilt (vgl. Abbildung 46.1):
$a+b$ ist positiv und $|a+b|=|a|+|b|$,
also $a+b=|a|+|b|$.

Fall 2: Die beiden Summanden a und b sind negativ.

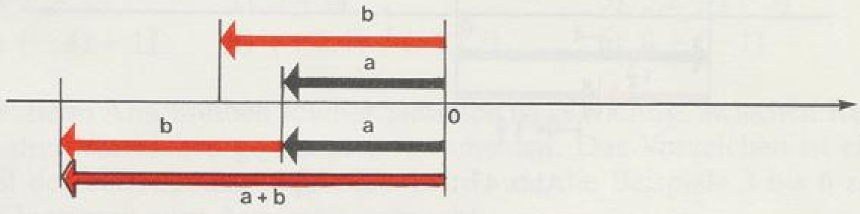


Abb. 48.1

Aus Abbildung 48.1 erkennt man leicht, daß nunmehr gilt:
$a + b$ ist negativ und $|a + b| = |a| + |b|$,
also $a + b = -(|a| + |b|)$.

Fall 3: a ist positiv, b negativ und $|a| > |b|$.

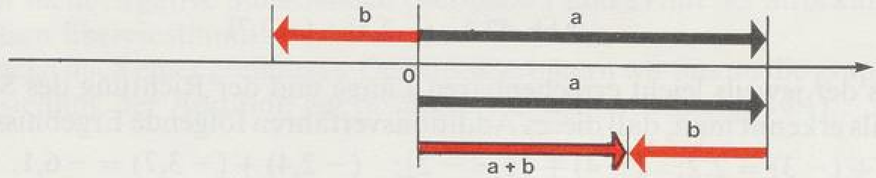


Abb. 48.2

Nach Abbildung 48.2 gilt:
$a + b$ ist positiv und $|a + b| = |a| - |b|$,
also $a + b = |a| - |b|$.

Fall 4: a ist positiv, b negativ und $|a| < |b|$.

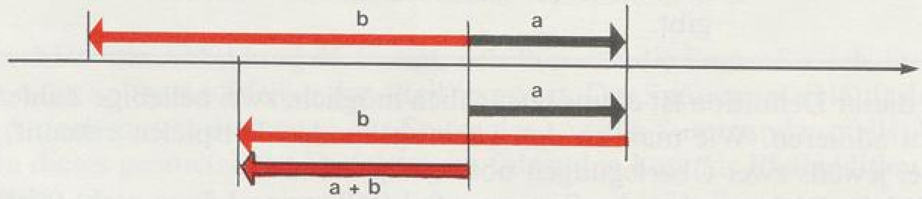


Abb. 48.3

Abbildung 48.3 zeigt:
$a + b$ ist negativ und $|a + b| = |b| - |a|$,
also $a + b = -(|b| - |a|)$.

Ganz entsprechend wie die Fälle 3 und 4 lassen sich die Fälle »a negativ, b positiv und $|a| > |b|$« bzw. »a negativ, b positiv und $|a| < |b|$« behandeln. Zeige dies z. B. anhand der Aufgaben **1.b)** und **1.e)** auf Seite 53.

Die Ergebnisse dieser Untersuchungen lassen sich so beschreiben:

Satz 49.1: Zwei Zahlen mit **gleichen Vorzeichen** werden addiert, indem man ihre Beträge addiert und dieser Summe das Vorzeichen der beiden Summanden gibt.
Zwei Zahlen mit **verschiedenen Vorzeichen** werden addiert, indem man vom größeren Betrag den kleineren subtrahiert und dieser Differenz das Vorzeichen des Summanden mit dem größeren Betrag gibt.

Beispiele:

1) $(-3)+(-7{,}5)=?$
Beide Summanden sind negativ, also auch die Summe. Die Beträge der Summanden werden addiert. Somit gilt:
$(-3)+(-7{,}5)=-(|-3|+|-7{,}5|)=-(3+7{,}5)=-10{,}5.$

2) $5{,}8+(-8{,}3)=?$
Die Summanden haben verschiedene Vorzeichen. Der Summand mit dem größeren Betrag, also $-8{,}3$, ist negativ; daher wird auch die Summe negativ. Die Beträge der Summanden werden voneinander subtrahiert. Somit gilt:
$5{,}8+(-8{,}3)=-(|-8{,}3|-|5{,}8|)=-(8{,}3-5{,}8)=-2{,}5.$

3) $(-3\frac{1}{3})+4\frac{1}{6}=?$
Die Summanden haben verschiedene Vorzeichen. Der Summand mit dem größeren Betrag ist positiv, also auch die Summe. Die Beträge der Summanden werden voneinander subtrahiert. Somit gilt:
$(-3\frac{1}{3})+4\frac{1}{6}=+(|4\frac{1}{6}|-|-3\frac{1}{3}|)=+(4\frac{1}{6}-3\frac{1}{3})=+\frac{5}{6}=\frac{5}{6}.$

Von besonderem Interesse sind noch die zwei folgenden Fälle:

Fall 5: $|a|=|b|$ und a und b haben verschiedene Vorzeichen. In diesem Fall ist b die Gegenzahl von a, also $b=-a$.

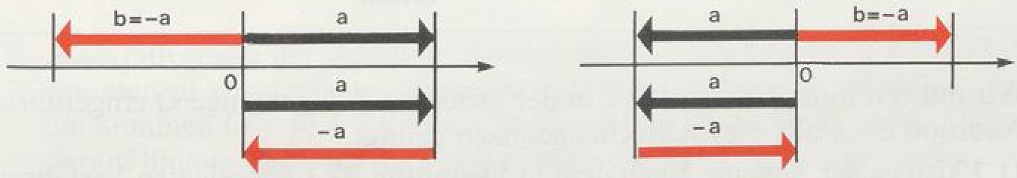


Abb. 49.1

Aus Abbildung 49.1 erkennt man: $a+(-a)=0.$

Satz 49.2: Die Summe aus einer Zahl und ihrer Gegenzahl ist 0.
$\boldsymbol{a+(-a)=0}$ für jedes $a\in\mathbb{Q}$

Fall 6: Ein Summand ist 0.
Da der Pfeil für die Zahl 0 die Länge 0 hat, ergibt sich unmittelbar aus Definition 47.1:

> **Satz 50.1:** Für jede rationale Zahl a gilt
> $$\boldsymbol{a + 0 = 0 + a = a.}$$

Dieser Satz besagt, daß die Zahl 0 auch in der Zahlenmenge $\mathbb{Q}$ das *neutrale Element der Addition* ist.

2.4.2 Eigenschaften der Addition in $\mathbb{Q}$

Von der im Abschnitt **2.4.1** eingeführten Addition rationaler Zahlen wissen wir noch nicht, ob sie wirklich alle erwünschten Eigenschaften besitzt. Es geht hier vor allem um die Frage, ob für sie die Rechengesetze gültig bleiben, die uns von der Addition in $\mathbb{Q}_0^+$ her schon bekannt sind. Zur Wiederholung wollen wir diese Rechengesetze hier zusammenstellen:

Rechengesetze der Addition in $\mathbb{Q}_0^+$

Für alle Zahlen a, b, c aus $\mathbb{Q}_0^+$ gilt:

(E)	$a + b$ **ist wieder eine Zahl aus** $\mathbb{Q}_0^+$	**eindeutige Existenz der Summe**
(K)	$a + b = b + a$	**Kommutativgesetz* der Addition**
(A)	$(a + b) + c = a + (b + c)$	**Assoziativgesetz** der Addition**
(N)	$a + 0 = a$	**0 ist neutrales Element der Addition**

Wir müssen nun prüfen, ob die in der größeren Zahlenmenge $\mathbb{Q}$ eingeführte Addition ebenfalls diesen Rechengesetzen genügt.

1) **Existenz der Summe:** Nach dem in Definition 47.1 festgelegten Verfahren kann man zwei rationale Zahlen stets addieren; die Summe ist wieder eine Zahl aus $\mathbb{Q}$. Damit bleibt (E) in $\mathbb{Q}$ gültig.

* commutare (lat.) = verändern, vertauschen. – Der Ausdruck *kommutativ* wurde 1814 von François Joseph SERVOIS (1767–1847) in seinem *Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul différentiel* in die Mathematik eingeführt.

** associare (lat.) = vereinigen, anschließen, verbinden. – Der Ausdruck *assoziativ* wurde 1843 von dem berühmten irischen Mathematiker und Astronomen William Rowan HAMILTON (1805–1865) bei der Erfindung ganz besonderer »Zahlen«, der sog. Quaternionen, in die Mathematik eingeführt. – Abb. 90.1

2) **Kommutativgesetz der Addition:** Wir konstruieren und vergleichen die Pfeilsummen $a + b$ und $b + a$ für die verschiedenen Vorzeichenzusammenstellungen:

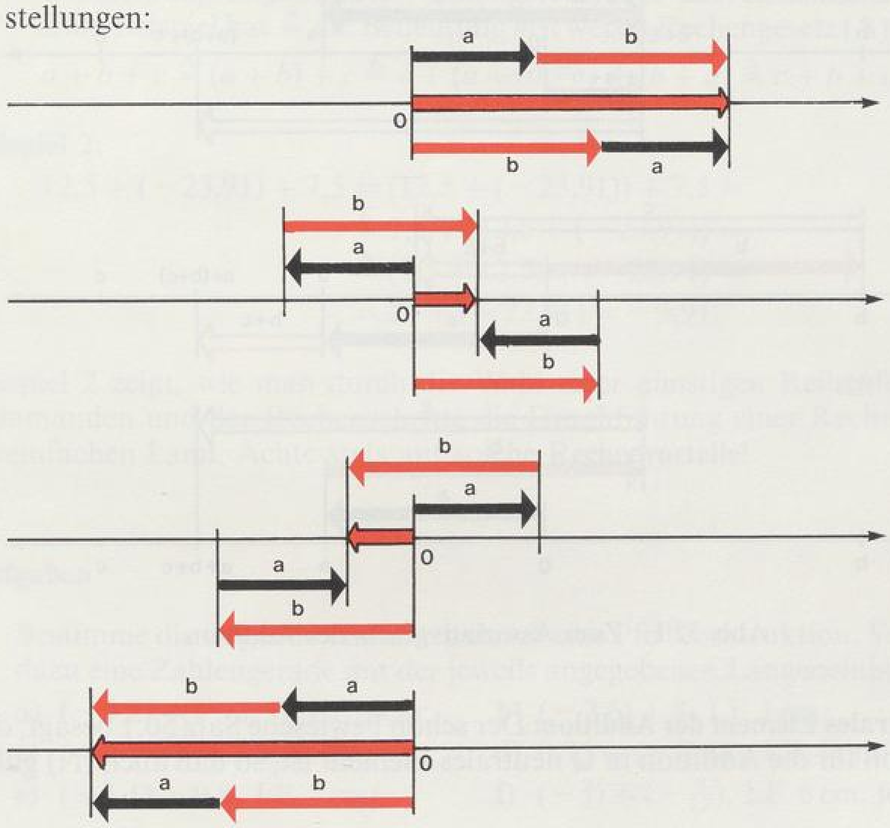


Abb. 51.1 Zum Nachweis des Kommutativgesetzes

Abbildung 51.1 zeigt, daß in allen diesen Fällen $a + b = b + a$ gilt. Wenn ein Summand 0 ist, gilt nach Satz 50.1 ebenfalls $a + 0 = 0 + a$. Also bleibt (K) in $\mathbb{Q}$ gültig.

3) **Assoziativgesetz der Addition:** Anstatt hier für alle typischen Fälle Pfeilsummen zu konstruieren, überlegen wir: Wenn man aus drei Pfeilen a, b, c die Summen $(a + b) + c$ und $a + (b + c)$ bildet, läuft das in beiden Fällen darauf hinaus, daß man die Pfeile einfach der Reihe nach aneinandersetzt. Das Ergebnis ist unabhängig davon, ob a und b oder b und c zu einer Zwischensumme zusammengefaßt werden. Damit gilt wieder $(a + b) + c = a + (b + c)$, d. h., (A) bleibt auch für die Addition in $\mathbb{Q}$ gültig.

Ein Beispiel zeigt Abbildung 52.1. In den ersten beiden Zeichnungen wird jeweils oberhalb der Zahlengeraden die Zwischensumme $a + b$ bzw. $b + c$ konstruiert, die dann darunter zur Ermittlung der ganzen Summe $(a + b) + c$ bzw. $a + (b + c)$ verwendet wird. Der letzte Teil der Abbildung zeigt zum Vergleich die drei der Reihe nach aneinandergesetzten Pfeile.

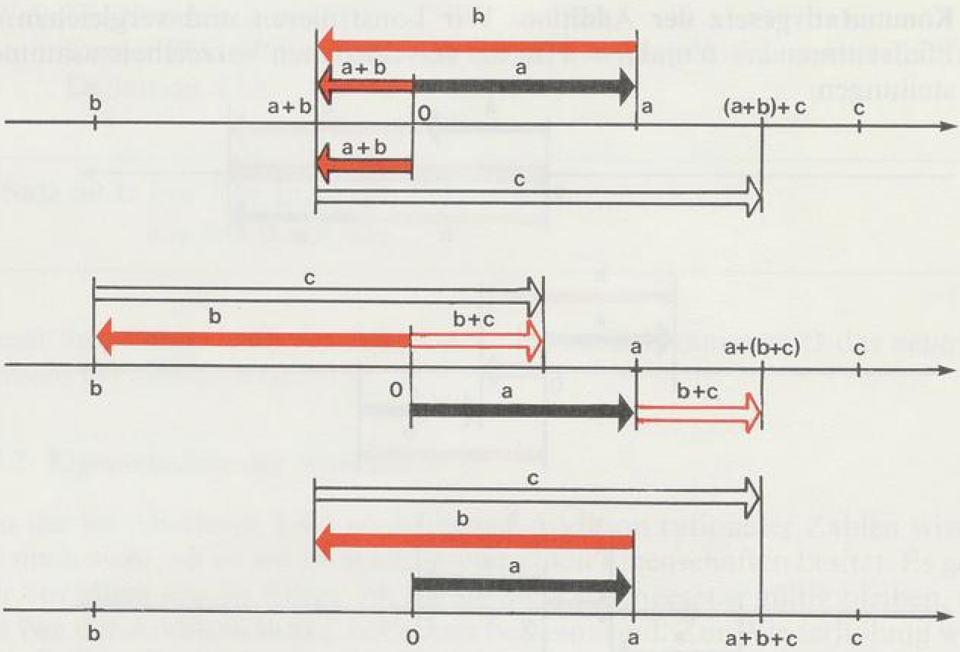


Abb. 52.1 Zum Assoziativgesetz der Addition

4) **Neutrales Element der Addition:** Der schon bewiesene Satz 50.1 besagt, daß 0 auch für die Addition in $\mathbb{Q}$ neutrales Element ist, so daß auch (N) gültig bleibt.

Damit gilt

Satz 52.1: Für die Addition in der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen gelten wieder die auf Seite 50 zusammengestellten Rechengesetze (E), (K), (A), (N).

Für die Rechenpraxis sind insbesondere die Gesetze (A) und (K) von großer Bedeutung. Aus (A) folgt bekanntlich, daß man bei dreigliedrigen Summen darauf verzichten kann, die Reihenfolge der beiden Additionen durch Klammern festzulegen. Da es nach dem Assoziativgesetz gleichgültig ist, ob man $(a+b)+c$ oder $a+(b+c)$ berechnet, genügt es auch, einfach $a+b+c$ zu schreiben. Nimmt man noch das Kommutativgesetz hinzu, so zeigt sich, daß auch die Reihenfolge der Summanden beliebig verändert werden kann. Dasselbe gilt, wie man zeigen kann, auch für Summen mit mehr als drei Summanden.

Beispiel 1:

Behauptung: $a+b+c=c+b+a$

Beweis: Der Einfachheit halber schreiben wir im folgenden das bei einer Umformung angewandte Rechengesetz über das Gleichheitszeichen. Zum Beispiel hat $\overset{\text{A}}{=}$ die Bedeutung »ist wegen Rechengesetz (A) gleich«.

$$a + b + c \overset{\text{A}}{=} (a + b) + c \overset{\text{K}}{=} c + (a + b) \overset{\text{K}}{=} c + (b + a) \overset{\text{A}}{=} c + b + a.$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} 12{,}5 + (-23{,}91) + 7{,}5 &\overset{\text{A}}{=} (12{,}5 + (-23{,}91)) + 7{,}5 = \\ &\overset{\text{K}}{=} 7{,}5 + (12{,}5 + (-23{,}91)) = \\ &\overset{\text{A}}{=} (7{,}5 + 12{,}5) + (-23{,}91) = \\ &= 20 + (-23{,}91) = -3{,}91. \end{aligned}$$

Beispiel 2 zeigt, wie man durch die Wahl einer günstigen Reihenfolge der Summanden und der Rechenschritte die Durchführung einer Rechnung oft vereinfachen kann. Achte stets auf solche **Rechenvorteile**!

Aufgaben

1. Bestimme die folgenden Summen durch eine Pfeilkonstruktion. Verwende dazu eine Zahlengerade mit der jeweils angegebenen Längeneinheit (LE).
   a) $(-3{,}2) + (-1{,}5)$, LE 1 cm; **b)** $(-2{,}6) + 8$, LE 1 cm;
   c) $64 + (-97)$, LE 1 mm; **d)** $0{,}75 + (-0{,}48)$, LE 1 dm;
   e) $(-1{,}1) + 0{,}8$, LE 5 cm; **f)** $(-\frac{3}{4}) + (-\frac{7}{12})$, LE 6 cm.

2. Berechne die folgenden Summen. Überlege jeweils zuerst, welches Vorzeichen das Ergebnis erhält und wie man seinen Betrag berechnet.
   a) $(-10) + 12$ **b)** $10 + (-12)$ **c)** $(-9{,}1) + (-1{,}9)$
   d) $1{,}5 + 4\frac{1}{3}$ **e)** $(-7{,}45) + 7\frac{1}{4}$ **f)** $0{,}865 + (-1{,}39)$
   g) $(-\frac{7}{9}) + (-\frac{11}{15})$ **h)** $\frac{16}{7} + (-2\frac{3}{14})$ **i)** $(-0{,}196) + \frac{49}{250}$

3. Konstruiere für die folgenden Zahlenbeispiele zur Überprüfung des Assoziativgesetzes der Addition die Pfeilsummen $(a + b) + c$ und $a + (b + c)$. Kennzeichne dabei die zuerst gebildeten Zwischensummen durch zweifarbige Pfeile (vgl. Abbildung 52.1).
   a) $a = 4$; $b = -3$; $c = -3{,}5$; LE 1 cm
   b) $a = -2{,}4$; $b = 7{,}3$; $c = -3{,}2$; LE 1 cm
   c) $a = -0{,}6$; $b = -\frac{3}{4}$; $c = \frac{7}{8}$; LE 4 cm

4. Berechne die folgenden Summen. Achte dabei auf eventuelle Rechenvorteile.
   a) $15 + 27 + (-32)$ **b)** $(-243) + (-102) + 45$
   c) $1010 + (-2000) + 990$ **d)** $(-123) + (-68) + (-132)$
   e) $(-0{,}93) + 1{,}13 + (-0{,}63)$ **f)** $(-2{,}25) + (-4{,}75) + 7{,}25$
   g) $2\frac{3}{4} + (-1\frac{2}{3}) + (1\frac{1}{12})$ **h)** $15{,}8 + (-20\frac{1}{3}) + 4\frac{1}{2}$

5. Berechne:

a) $(27 + (-15)) + (-8) + (-9)$ **b)** $(-109) + (85 + 13 + (-45))$

c) $((-3{,}14) + 2{,}38) + (-0{,}167) + 1{,}427$

d) $(4\frac{1}{7} + (-10{,}5)) + (8\frac{2}{3} + (-2\frac{3}{4}))$

6. Berechne:

a) $(-7) + |-7|$ **b)** $|-2{,}5| + |2{,}5|$ **c)** $3{,}2 + |-3{,}2|$

d) $|3 + (-4)|$ **e)** $|3| + |-4|$ **f)** $|(-3) + 4|$

g) $|(-1{,}16) + (-2{,}39)|$ **h)** $|-1{,}16| + |-2{,}39|$ **i)** $\left|(-5\frac{1}{6}) + |-2\frac{1}{9}|\right|$

7. Ist x positiv, null oder negativ, wenn folgende Gleichung gilt? (Hinweis: Beachte Satz 49.1.)

a) $|7 + x| = 7 + |x|$ **b)** $|(-7) + x| = 7 + |x|$

c) $|x + 2| = 2 - |x|$ **d)** $|x + 2| = |x| - 2$

e) Welche Angabe über $|x|$ läßt sich im Fall **c)** bzw. im Fall **d)** machen?

8. Was kann man über die Vorzeichen von $x \neq 0$ und $y \neq 0$ sagen, wenn gilt

a) $|x + y| = |x| + |y|$ **b)** $|x + y| = |x| - |y|$

c) $|x + (-y)| = |x| + |y|$ **d)** $|(-x) + (-y)| = |x| - |y|$?

2.4.3 Die Subtraktion in $\mathbb{Q}$

Beim Addieren besteht die Aufgabe darin, aus den gegebenen Summanden die Summe zu berechnen. Oft kommt es aber auch vor, daß von einer Summe der Wert schon bekannt ist und einer der Summanden gesucht wird. Um diesen zu berechnen, muß man bekanntlich eine **Subtraktion** ausführen. Man bezeichnet wegen dieses Zusammenhangs die Subtraktion als **Umkehrung der Addition**.

Beispiel:

Auf einer Straßenkarte ist die Entfernung München–Nürnberg mit 162 km und die Teilstrecke München–Ingolstadt mit 73 km angegeben. Wie lang ist dann die Strecke von Ingolstadt nach Nürnberg?
Bezeichnet man sie mit x km, so ist x die Lösung der Gleichung $73 + x = 162$, also $x = 162 - 73 = 89$.
Die Strecke Ingolstadt–Nürnberg ist somit 89 km lang.

Das Beispiel zeigt deutlich den Zusammenhang zwischen der Differenz $162 - 73$ und der Gleichung $73 + x = 162$: die *Differenz* ist die *Lösung der Gleichung*. Ganz allgemein legt man fest:

Definition 54.1: Unter der Differenz $b - a$ versteht man die Lösung der Gleichung $a + x = b$.

$b - a$ ist also diejenige Zahl, die man zu a addieren muß, um b zu erhalten.

Nach dieser Definition hat eine Differenz $b - a$ nur dann einen Sinn, wenn die entsprechende Gleichung $a + x = b$ genau eine Lösung besitzt. In der Zahlenmenge $\mathbb{Q}_0^+$ war dies nur unter der Voraussetzung $a \leqq b$ der Fall. Für $a > b$ war die Gleichung unlösbar, somit die Subtraktion $b - a$ nicht ausführbar. Hat sich daran durch die Einführung der negativen Zahlen etwas geändert? Ist in der Zahlenmenge $\mathbb{Q}$ die Subtraktion immer durchführbar?
Um diese wichtige Frage zu klären, betrachten wir als Beispiel zunächst eine Gleichung, die in $\mathbb{Q}_0^+$ keine Lösung hat:

Beispiel:

$7 + x = 3$

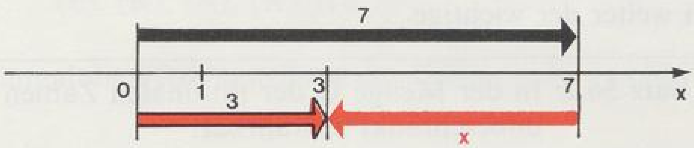


Abb. 55.1 Zur Gleichung $7 + x = 3$

Die Pfeildarstellung zeigt, daß es genau eine Zahl x gibt, die man zu 7 addieren muß, um 3 zu erhalten. Sie wird durch den von 7 nach 3 zeigenden Pfeil dargestellt. Man erkennt leicht, daß es die Zahl -4 ist.
Es gilt also: $7 + x = 3$ hat die Lösung $x = 3 - 7 = -4$.

Das in diesem Beispiel angewandte Verfahren läßt sich auf jede Gleichung der Form $a + x = b$ übertragen: Man stellt a und b durch vom Nullpunkt der Zahlengeraden ausgehende Pfeile dar. Dann gibt es genau einen Pfeil x, der von der Spitze des Pfeils a zur Spitze des Pfeils b führt; er stellt die einzige Lösung der Gleichung dar. Die Abbildung 55.2 zeigt einige typische Fälle.

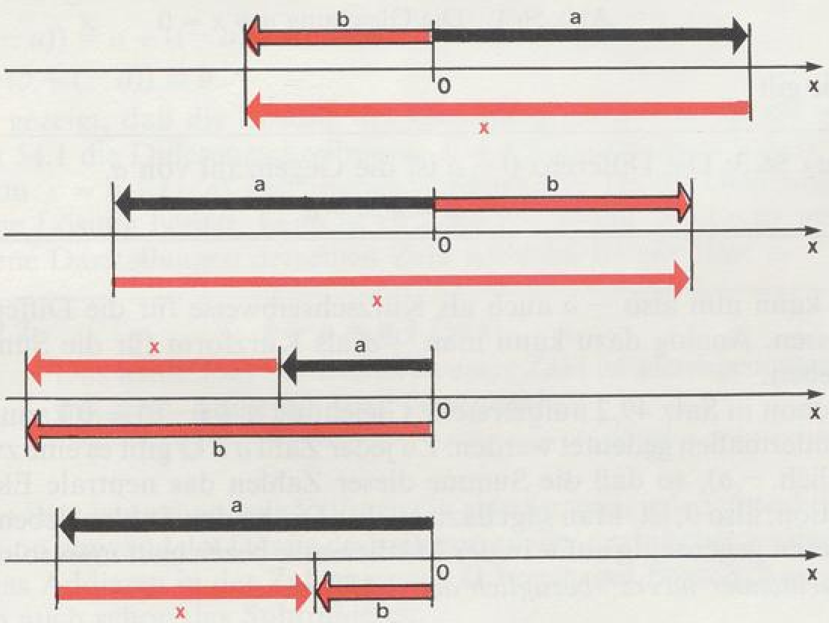


Abb. 55.2 Zur Gleichung $a + x = b$

Damit gilt folgender

Satz 56.1: Die Gleichung $a + x = b$ hat in der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen stets genau eine Lösung.

Da man die Lösung der Gleichung $a + x = b$ durch die Differenz $b - a$ ausdrückt (siehe Definition 54.1) und diese also für beliebige $a, b \in \mathbb{Q}$ definiert ist, gilt weiter der wichtige

Satz 56.2: In der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist die Subtraktion unbeschränkt ausführbar.

Durch die Einführung der negativen Zahlen ist es uns also gelungen, die früher bei der Subtraktion notwendigen Beschränkungen aufzuheben!

Ein wichtiger **Sonderfall** der Gleichung $a + x = b$ ergibt sich für $b = 0$. In diesem Fall, also für die Gleichung $a + x = 0$, lautet die Lösung: $x = 0 - a$. Bei dieser Differenz handelt es sich aber, wie Abbildung 56.1 zeigt, um die uns schon bekannte Gegenzahl von a, also $x = -a$.

Abb. 56.1 Die Gleichung $a + x = 0$

Damit gilt

Satz 56.3: Die Differenz $0 - a$ ist die Gegenzahl von a.

$$\mathbf{0 - a = -a}$$

Man kann nun also $-a$ auch als Kurzschreibweise für die Differenz $0 - a$ auffassen. Analog dazu kann man $+a$ als Kurzform für die Summe $0 + a$ verstehen.
Die schon in Satz 49.2 aufgetretene Gleichung $a + (-a) = 0$ kann nun auch folgendermaßen gedeutet werden: Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{Q}$ gibt es eine zweite Zahl (nämlich $-a$), so daß die Summe dieser Zahlen das neutrale Element der Addition, also 0, ist. Man sagt dazu auch: »Die beiden Zahlen heben sich beim Addieren gegenseitig auf.« In der Mathematik bezeichnet man solche Zahlen als *zueinander invers* bezüglich der Addition.*

* inversus (lat.) = umgekehrt

Satz 57.1: Zu jeder rationalen Zahl a gibt es genau eine Inverse bezüglich der Addition, nämlich die Gegenzahl $-a$.

Dieser Satz stellt ein weiteres Rechengesetz der Addition dar, das als »Existenz des Inversen« bezeichnet wird. Wir verwenden dafür die Abkürzung (I). Damit haben wir für die Addition in $\mathbb{Q}$ fünf Rechengesetze:

$$(E), (K), (A), (N), (I).$$

Wir betrachten noch einmal die Pfeildarstellung der Differenz $b-a$ (Abbildung 57.1).

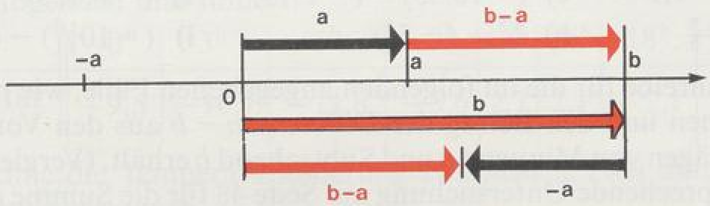


Abb. 57.1 Pfeildarstellung der Differenz

Offensichtlich erhält man den Pfeil $b-a$ auch dadurch, daß man an den Pfeil b den Pfeil $-a$ ansetzt, also die **Pfeilsumme** $b+(-a)$ bildet! Ob das allgemeingültig ist, können wir durch Rechnen überprüfen. Da $b-a$ die Lösung der Gleichung $a+x=b$ ist, rechnen wir nach, ob auch $b+(-a)$ diese Gleichung erfüllt:

$a+(b+(-a)) \stackrel{K}{=} a+((-a)+b) \stackrel{A}{=} (a+(-a))+b=0+b=b,$

also $\quad a+(b+(-a))=b.$

Damit ist gezeigt, daß die Lösung der Gleichung $a+x=b$, für die wir in Definition 54.1 die Differenzschreibweise $x=b-a$ vereinbart haben, auch in der Form $x=b+(-a)$ geschrieben werden kann. Da die Gleichung nur eine einzige Lösung besitzt, kann es sich bei $b-a$ und $b+(-a)$ nur um verschiedene Darstellungen derselben Zahl handeln! Es gilt also:

Satz 57.2: $\quad \boldsymbol{b-a=b+(-a)}$

Das heißt: Das Subtrahieren einer Zahl ist gleichbedeutend mit dem Addieren ihrer Gegenzahl.

Mit diesem Satz kann man jede Differenz in eine Summe, jede Subtraktion in eine Addition umwandeln! Das ist deshalb von großer praktischer Bedeutung, weil wir das Addieren in der Zahlenmenge $\mathbb{Q}$ bereits gut beherrschen – und damit nun auch schon das Subtrahieren.

Beispiele:

1) $5 - 11 = 5 + (-11) = -(11 - 5) = -6.$

2) $(-2{,}17) - 8{,}05 = (-2{,}17) + (-8{,}05) = -(2{,}17 + 8{,}05) = -10{,}22.$

3) $(-6\tfrac{4}{15}) - (-9\tfrac{7}{20}) = (-6\tfrac{4}{15}) + (-(-9\tfrac{7}{20})) = (-6\tfrac{4}{15}) + 9\tfrac{7}{20} =$
$= +(9\tfrac{7}{20} - 6\tfrac{4}{15}) = 3\tfrac{5}{60} = 3\tfrac{1}{12}.$

Aufgaben

1. Berechne folgende Differenzen:

a) $99 - 1000$ **b)** $(-99) - 1000$ **c)** $(-99) - (-1000)$
d) $5{,}2 - 7{,}9$ **e)** $(-16{,}45) - (-17{,}5)$ **f)** $(-0{,}625) - 0{,}625$
g) $\frac{51}{60} - \frac{7}{8}$ **h)** $2\frac{3}{7} - (-5\frac{2}{3})$ **i)** $(-10\frac{10}{11}) - (-7{,}2)$

2. a) Beschreibe für die im folgenden angegebenen Fälle, wie man das Vorzeichen und den Betrag der Differenz $a - b$ aus den Vorzeichen und Beträgen von Minuend a und Subtrahend b erhält. (Vergleiche dazu die entsprechende Untersuchung auf Seite 48 für die Summe $a + b$.) Fertige jeweils eine Pfeilskizze an.
1. Fall: a positiv und b negativ
2. Fall: a negativ und b positiv
3. Fall: a und b positiv und $|a| > |b|$
4. Fall: a und b positiv und $|a| < |b|$
5. Fall: a und b negativ und $|a| > |b|$
6. Fall: a und b negativ und $|a| < |b|$

b) Formuliere nun einen dem Satz 49.1 entsprechenden Satz für die Subtraktion.

3. Schreibe nach Definition 54.1 die Lösung der Gleichung als Differenz und berechne sie.

a) $3 + x = 1$ **b)** $-3 + x = 1$ **c)** $3 + x = -1$
d) $-3 + x = -1$ **e)** $x + 2{,}7 = 1{,}5$ **f)** $x + (-2{,}7) = 1{,}5$
g) $x + 2{,}7 = -1{,}5$ **h)** $x + (-2{,}7) = -1{,}5$ **i)** $5\frac{1}{3} = x + 8\frac{1}{2}$
k) $2\frac{1}{3} - 4\frac{1}{12} = 9\frac{1}{2} + x$ **l)** $231{,}77 + 378{,}29 = -167{,}71 + x$

4. Berechne:

a) $21 - (17 + 14)$ **b)** $(-123) - (213 - 321)$
c) $(-76) - (18 + 58)$ **d)** $(-51{,}6) + (34{,}9 - (-17{,}7))$
e) $((-15\frac{13}{24}) + 81\frac{5}{9}) - 100$ **f)** $13{,}25 - (2\frac{3}{4} - (-1\frac{2}{3}))$

5. Berechne:

a) $(365 - 640) + (575 - 700)$
b) $(62{,}8 - 20{,}25) - (32{,}08 + 10{,}47)$
c) $((-0{,}216) + 0{,}173) - (17{,}3 - 21{,}6)$
d) $(16 - 12\frac{4}{15}) - (8{,}75 + (-3\frac{7}{9}))$

• **6.** Bestimme die Lösung einer Gleichung vom Typ $x - a = b$, indem du $x - a$ als Summe schreibst und Definition 54.1 anwendest.

a) $x - 5 = -3$ **b)** $x - 22 = 29{,}3$

c) $x - 2\frac{1}{9} = 3\frac{1}{3} - 6\frac{1}{5}$ **d)** $5\frac{1}{6} - 14\frac{1}{2} = x - 8\frac{1}{3}$

e) $33 - (17 + 48) = x - 25$ **f)** $x - (3\frac{1}{12} + 8\frac{1}{36}) = 4\frac{1}{18} - 9\frac{1}{9}$

⁚ **7.** Bestimme die Lösung einer Gleichung vom Typ $a - x = b$, indem du $a - x$ als Summe schreibst und nach Definition 54.1 zuerst $-x$ berechnest.

a) $10 - x = 20$ **b)** $3\frac{1}{4} - x = 5\frac{1}{8}$

c) $6{,}92 - x = 2{,}17 - (0{,}25 - 4{,}5)$ **d)** $4\frac{1}{6} + 3\frac{1}{6} = 7\frac{1}{3} - x$

8. Während eines Wintertages wurde im Abstand von je 3 Stunden die Temperatur abgelesen und notiert:

Uhrzeit	0^h	3^h	6^h	9^h	12^h	15^h	18^h	21^h	24^h
Temperatur in °C	$-9{,}5$	$-10{,}7$	$-11{,}8$	$-5{,}6$	$2{,}7$	$2{,}1$	$-2{,}1$	$-5{,}8$	$-7{,}3$

a) Berechne die Temperaturänderung zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Ablesungen.

b) In welchem dieser Zeitabschnitte war die Temperaturabnahme, in welchem die Temperaturzunahme am größten?

9. Gase werden bei sehr tiefen Temperaturen flüssig, z. B. Sauerstoff bei $-183\,°C$ und Helium bei $-269\,°C$. Um wieviel Grad muß man Helium, das mit flüssigem Sauerstoff vorgekühlt wurde, noch weiter abkühlen, um es zu verflüssigen?

10. Wenn man Quecksilber abkühlt, erstarrt es bei einer Temperatur von $-59\,°C$. Um wieviel Grad muß sich Quecksilber, das die Temperatur von flüssigem Sauerstoff ($-183\,°C$) hat, erwärmen, damit es wieder flüssig wird?

11. Auf das Bankkonto des Herrn Knapp wurde am Monatsersten sein Gehalt in Höhe von 3275 DM überwiesen. Am gleichen Tag wurden 840 DM als Monatsmiete abgebucht. Danach betrug sein Guthaben 2361,42 DM. Wie hoch war der Kontostand vor den beiden Buchungen?

12. Auf einer Reise durch den Westen der USA übernachtet Familie Brown im berühmten Death Valley (California). Am nächsten Tag fahren sie weiter nach NW in die Sierra Nevada und erreichen dabei am Tioga-Paß (Meereshöhe 3031) den höchsten Punkt. Herr Brown stellt fest, daß sie damit an diesem Tag einen Höhenunterschied von 3116 m überwunden haben. Auf welcher Meereshöhe liegt demnach der tiefste Punkt des Death Valley (= tiefster Punkt in den USA!)?

2.5 Anordnung der rationalen Zahlen

2.5.1 Definition der Anordnung in $\mathbb{Q}$

Für je zwei Zahlen p und q aus der Menge $\mathbb{Q}_0^+$ ist die folgende Aussage richtig:

Entweder gilt $p = q$, gelesen »p ist gleich q«,
oder es gilt $p < q$, gelesen »p ist kleiner als q«,
oder es gilt $p > q$, gelesen »p ist größer als q«.

Man sagt deshalb: »Die Zahlenmenge $\mathbb{Q}_0^+$ ist angeordnet.« Die Aussagen $p < q$ oder $p > q$ nannte 1838 der Gymnasialdirektor Johann Heinrich Traugott Müller (1797–1862) in seinem *Lehrbuch der Mathematik für Gymnasien und Realschulen* **Ungleichungen**.

Das Zeichen = wurde von dem Engländer Robert Record(e) (1510(?)–1558) erfunden. In seinem *The whetstone of witte* (Der Schleifstein des Denkens) schreibt er 1557: »And to avoid the tedious repetition of these words ›is equal to‹ I will set [...] a pair of parallels, or twin lines of one length, thus: ═, because no 2 things can be more equal.« – *Zeichen der Gleichheit* nannte es 1791 Johann Heinrich Voigt (1751–1823). Die Zeichen < und > erscheinen zum ersten Mal in der postum 1631 gedruckten *Artis analyticae praxis ad aequationes algebraicas resolvendas* des Engländers Thomas Harriot (1560–1621). Der Herausgeber, Walter Warner, gab Harriots handschriftlichen Zeichen ⋖ bzw. ⋗ diese einfache Form.

Wir wollen nun versuchen, die Anordnung in $\mathbb{Q}_0^+$ auf die größere Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen auszudehnen. Dazu müssen wir auch für die neu hinzugekommenen negativen Zahlen die Verwendung der Zeichen < und > sinnvoll festlegen. Da in $\mathbb{Q}_0^+$ die Ungleichung $p < q$ bedeutet, daß auf dem *Zahlenstrahl* der Punkt p links vom Punkt q liegt, bietet es sich an, zu vereinbaren, daß auch für zwei Zahlen a und b aus $\mathbb{Q}$ die Beziehung $a < b$ genau dann gelten soll, wenn auf der *Zahlengeraden* der Punkt a links vom Punkt b liegt (Abbildung 60.1). Damit müßte z.B. $-20 < -1$ oder $-500 < 0$ oder $-2 < 0{,}2$ gelten! Deutet man die Zahlen etwa als Angaben über Temperaturen oder Kontostände, so erkennt man, daß solche Ungleichungen durchaus sinnvoll sind.

Definition 60.1: Für zwei rationale Zahlen a und b gilt $a < b$ genau dann, wenn auf der Zahlengeraden der Punkt a links vom Punkt b liegt. Statt $a < b$ schreibt man auch $b > a$.

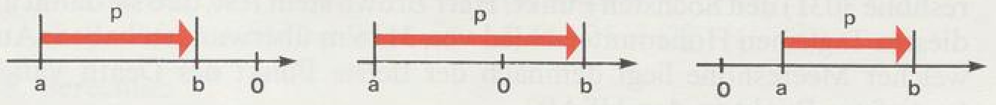


Abb. 60.1 Veranschaulichung von $a < b$

Aus Definition 60.1 folgt, daß nun auch in der Menge $\mathbb{Q}$ für je zwei Zahlen a, b die Aussage zutrifft:

Es gilt entweder $a = b$ oder $a < b$ oder $a > b$.

Auf Grund der Anordnung auf der Zahlengeraden bestehen zwischen den negativen Zahlen, der Zahl null und den positiven Zahlen die folgenden Beziehungen:

Satz 61.1: 1. Jede positive Zahl ist größer als 0.
2. Jede negative Zahl ist kleiner als 0.
3. Jede negative Zahl ist kleiner als jede positive.

Wegen Teil 1 und 2 dieses Satzes können wir die Aussagen »a ist positiv« bzw. »a ist negativ« kürzer durch die Ungleichungen $a > 0$ bzw. $a < 0$ beschreiben.

Wie die Abbildung 60.1 zeigt, ist im Fall $a < b$ der Pfeil von a nach b stets rechtsgerichtet; er stellt also eine positive Zahl p dar. p ist diejenige Zahl, die man zu a addieren muß, um b zu erhalten, also die Differenz $b - a$. Da umgekehrt für eine Zahl $p > 0$ zur Summe $a + p$ immer ein rechts von a liegender Punkt der Zahlengeraden gehört, gilt

Satz 61.2: $a < b$ gilt genau dann, wenn es eine positive Zahl p gibt, so daß $a + p = b$.

Beispiele:

1) $-20 < -1$; denn $-20 + 19 = -1$.
2) $-500 < 0$; denn $-500 + 500 = 0$.
3) $-2 < 0{,}2$; denn $-2 + 2{,}2 = 0{,}2$.
4) $\frac{4}{5} < \frac{5}{6}$; denn $\frac{4}{5} + \frac{1}{30} = \frac{5}{6}$.

2.5.2 Monotoniegesetz der Addition

Wir wissen: Wenn man zwei gleiche Zahlen a und b hat und zu jeder dieselbe Zahl c addiert, erhält man auch gleiche Summen. Das heißt, aus $a = b$ folgt stets $a + c = b + c$.

Beispiel*: $2 + 3 = 5 \Rightarrow (2 + 3) + 8 = 5 + 8$

Welche Beziehung besteht aber zwischen $a + c$ und $b + c$, wenn a und b verschiedene Zahlen sind, wenn z.B. $a < b$ gilt?

Abb. 61.1 Zum Monotoniegesetz der Addition

* Den Folgepfeil ⇒ liest man *daraus folgt*.

Wie Abbildung 61.1 zeigt, gilt mit $a < b$ stets auch $a + c < b + c$, und zwar unabhängig davon, ob $c > 0$ oder $c < 0$ oder $c = 0$ gewählt wird. Die Addition von c verschiebt jeden der Punkte a und b auf der Zahlengeraden um den Pfeil c. Dabei bleibt ihre Reihenfolge und sogar ihre Entfernung erhalten. Daß umgekehrt aus $a + c < b + c$ auch wieder die Ungleichung $a < b$ folgt, erkennt man, indem man auf beiden Seiten $-c$ addiert. Damit gilt

Satz 62.1: Monotoniegesetz der Addition
Addiert man auf beiden Seiten einer Ungleichung dieselbe Zahl, so bleibt das Ungleichheitszeichen erhalten; kurz:

$$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$$

Ein entsprechendes Monotoniegesetz gilt auch für die Subtraktion, denn man kann ja nach Satz 57.2 jede Differenz auch als Summe schreiben. Durchführung in Aufgabe 63/3.
Das Monotoniegesetz der Addition wendet man gerne an, um festzustellen, ob eine Ungleichung zutrifft oder nicht.

Beispiele:

1) $-36 < -6 \Leftrightarrow -36 + 6 < -6 + 6 \Leftrightarrow -30 < 0$
2) $-36 < -6 \Leftrightarrow -36 + 36 < -6 + 36 \Leftrightarrow 0 < 30$
3) $-36 < -6 \Leftrightarrow -36 + 21 < -6 + 21 \Leftrightarrow -15 < 15$
4) $2{,}25 > \frac{47}{20} \Leftrightarrow 2{,}25 - \frac{7}{20} > \frac{47}{20} - \frac{7}{20} \Leftrightarrow 2{,}25 - 0{,}35 > \frac{40}{20} \Leftrightarrow 1{,}9 > 2\,(!)$
5) $2{,}25 > \frac{47}{20} \Leftrightarrow 2{,}25 - 2{,}25 > \frac{47}{20} - 2{,}25 \Leftrightarrow 0 > 2{,}35 - 2{,}25 \Leftrightarrow 0 > 0{,}1\,(!)$

Die Beispiele 1, 2 und 5 zeigen, wie man durch Anwendung des Monotoniegesetzes der Addition bzw. Subtraktion eine Ungleichung auf »Nullform« bringen, d. h. auf einer Seite der Ungleichung die Zahl 0 herstellen kann. An einer solchen Nullform erkennt man besonders leicht, ob die Ungleichung wahr oder falsch ist.

Aufgaben

1. Stelle aus den Zahlen der folgenden Paare mit einem der Zeichen $=, <, >$ eine richtige Gleichung bzw. Ungleichung her.
   a) $0;\ 0{,}1$ **b)** $3;\ -1$ **c)** $-5{,}6;\ -6{,}5$ **d)** $-\frac{7}{20};\ -0{,}35$
   e) $-25;\ 0$ **f)** $-0{,}99;\ 0{,}01$ **g)** $-\frac{0}{40};\ \frac{0}{24}$ **h)** $-\frac{19}{24};\ -\frac{33}{40}$
   i) $-3;\ -1$ **k)** $-1{,}4;\ \frac{7}{5}$ **l)** $10;\ -100$ **m)** $-57;\ -75$

2. Unter den folgenden Ungleichungen sind einige falsch! Welche?
   a) $1{,}65 < 2$ **b)** $-1{,}65 < -2$
   c) $\frac{14}{25} > 0{,}56$ **d)** $-\frac{14}{25} < -0{,}56$
   e) $1 - 2{,}75 > -2{,}25$ **f)** $-1{,}3 - 2{,}45 < -4 + 0{,}75$
   g) $3{,}5 - (2\frac{7}{8} + 0{,}625) \neq (1\frac{3}{8} - \frac{1}{2}) - 0{,}875$
   h) $0{,}5 - (\frac{2}{7} + \frac{1}{5}) \neq 1{,}2 - \frac{17}{14}$

3. Zum **Monotoniegesetz der Subtraktion**

a) Fasse folgenden Satz in Worte und begründe ihn:
Für alle $a, b, c \in \mathbb{Q}$ gilt: $a < b \Rightarrow a - c < b - c$.

b) Begründe: Für alle $a, b, d \in \mathbb{Q}$ gilt: $a - d < b - d \Rightarrow a < b$.

4. Stelle bei den folgenden Ungleichungen ihre beiden Nullformen her und entscheide, ob die Ungleichungen wahr oder falsch sind.

a) $9{,}99 < 9{,}999$ **b)** $-1{,}001 < -1{,}01$
c) $1{,}85 > \frac{13}{7}$ **d)** $-\frac{17}{24} > -\frac{18}{25}$
e) $1{,}5 - \frac{4}{15} < 1\frac{11}{50}$ **f)** $16{,}1 - \frac{17}{18} > 18\frac{1}{3} - 3\frac{2}{11}$

5. Auch für Ungleichungen der Form $a \neq b$ gilt das Monotoniegesetz der Addition: $a \neq b \Leftrightarrow a + c \neq b + c$.

a) Gib zu diesem Monotoniegesetz drei Beispiele an.

b) Begründe dieses Monotoniegesetz.

6. Wenn man bei zwei Ungleichungen $a < b$ und $c < d$ die Zahlen links vom Ungleichheitszeichen sowie die Zahlen rechts davon addiert und das Ungleichheitszeichen beibehält, so entsteht wieder eine richtige Ungleichung. Kurz:

$$\left.\begin{array}{l}\text{aus } \ a < b \\ \text{und } \ c < d\end{array}\right\} \text{ folgt } \ a + c < b + d.$$

a) Prüfe diese Behauptung an drei Zahlenbeispielen.

(!) • **b)** Beweise die obige Behauptung, indem du bei $a < b$ auf beiden Seiten c und bei $c < d$ auf beiden Seiten b addierst und die erhaltenen Ungleichungen miteinander vergleichst. Mache dir die Zusammenhänge auch an der Zahlengeraden klar.

• **c)** An der Ungleichung $3 + 97 < 1 + 100$ erkennt man, daß der in **b)** bewiesene Satz nicht umkehrbar ist. Begründe dies und gib ein weiteres Gegenbeispiel an.

2.6 Multiplikation und Division von rationalen Zahlen

2.6.1 Definition der Multiplikation in $\mathbb{Q}$

In der Menge der rationalen Zahlen beherrschen wir bis jetzt erst das Addieren und das Subtrahieren. Zwar wissen wir auch, wie Zahlen aus der Menge $\mathbb{Q}_0^+$ miteinander multipliziert werden, aber wir kennen noch keine Produkte mit negativen Faktoren. Was soll z.B. $3 \cdot (-4)$ oder $(-2{,}4) \cdot \frac{2}{3}$ oder gar $(-3{,}4) \cdot (-5{,}1)$ bedeuten?
Zunächst eine Bemerkung zur Schreibweise: Auch bei Produkten ist es sehr wichtig, zwischen Vorzeichen und Rechenzeichen genau zu unterscheiden. Ein Faktor mit Vorzeichen muß, wie die Beispiele zeigen, in Klammern gesetzt werden.

Produkte mit negativen Faktoren müssen wir also erst noch definieren. Natürlich versuchen wir wieder, es so einzurichten, daß für die Multiplikation in $\mathbb{Q}$ die Rechengesetze erhalten bleiben, die uns für die Multiplikation in $\mathbb{Q}_0^+$ geläufig sind (Permanenzprinzip, vgl. Seite 38). Zur Wiederholung stellen wir diese Rechengesetze hier zusammen:

Rechengesetze der Multiplikation in $\mathbb{Q}_0^+$

Für alle Zahlen a, b, c aus $\mathbb{Q}_0^+$ gilt:

(E)	$a \cdot b$ **ist wieder eine Zahl aus** $\mathbb{Q}_0^+$	**eindeutige Existenz des Produkts**
(K)	$a \cdot b = b \cdot a$	**Kommutativgesetz der Multiplikation**
(A)	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	**Assoziativgesetz der Multiplikation**
(N)	$a \cdot 1 = a$	**1 ist neutrales Element der Multiplikation**

Produkte traten erstmals beim Rechnen mit natürlichen Zahlen auf. Sie wurden dort als Kurzschreibweise für Summen mit gleichen Summanden eingeführt; z. B. gilt: $3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4$. Deshalb liegt es nahe, ein Produkt wie $3 \cdot (-4)$ ebenfalls als abgekürzte Schreibweise für eine Summe aufzufassen, nämlich als $3 \cdot (-4) = (-4) + (-4) + (-4)$. Die rechts vom Gleichheitszeichen stehende Summe können wir berechnen! Wir erhalten so $3 \cdot (-4) = -12$, wofür man wegen $12 = 3 \cdot 4$ auch schreiben kann:

$$\mathbf{3 \cdot (-4) = -(3 \cdot 4)}$$

Das sieht nach einer sehr einfachen Regel aus! Man kann sie offenbar immer dann anwenden, wenn der erste Faktor eine natürliche Zahl und größer als 1 ist.

Beispiele:

1) $5 \cdot (-0{,}7) = (-0{,}7) + (-0{,}7) + (-0{,}7) + (-0{,}7) + (-0{,}7) = -3{,}5 = -(5 \cdot 0{,}7)$

2) $2 \cdot (-3\tfrac{2}{9}) = (-3\tfrac{2}{9}) + (-3\tfrac{2}{9}) = -6\tfrac{4}{9} = -(2 \cdot 3\tfrac{2}{9})$

Ein Produkt wie $3{,}4 \cdot (-5{,}1)$, bei dem der erste Faktor zwar wieder positiv, jedoch nicht ganzzahlig ist, kann nicht mehr als Summe gedeutet werden. Wohl aber ist es auch hier möglich, den Term $-(3{,}4 \cdot 5{,}1)$ zu berechnen. Der Vergleich mit den obigen Beispielen legt nahe, zu vereinbaren, daß $3{,}4 \cdot (-5{,}1) = -(3{,}4 \cdot 5{,}1)$ gelten soll. Dieses Verfahren läßt sich auf alle Produkte mit positivem ersten und negativem zweiten Faktor anwenden. Wir erhalten so

Definition 65.1: Für das Produkt aus einer positiven Zahl p und einer negativen Zahl $-q$ soll gelten:

$$p \cdot (-q) = -(p \cdot q)$$

Beachte, daß in dieser Definition (und auch im folgenden) die Variablen p und q positive Zahlen vertreten!

Vertauscht man im Beispiel $3{,}4 \cdot (-5{,}1)$ die Reihenfolge der Faktoren, so erhält man ein Produkt, bei dem der erste Faktor negativ, der zweite positiv ist. Natürlich soll, da wir ja das Kommutativgesetz retten wollen, dieses Produkt denselben Wert wie $3{,}4 \cdot (-5{,}1)$ erhalten! Es soll also gelten: $(-5{,}1) \cdot 3{,}4 = 3{,}4 \cdot (-5{,}1) = -(3{,}4 \cdot 5{,}1)$ bzw., da man die positiven Faktoren in der letzten Klammer vertauschen darf:

$$(-5{,}1) \cdot 3{,}4 = -(5{,}1 \cdot 3{,}4)$$

Die Verallgemeinerung dieser Überlegung führt zu

Definition 65.2: Für das Produkt aus einer negativen Zahl $-p$ und einer positiven Zahl q soll gelten:

$$(-p) \cdot q = -(p \cdot q)$$

Die beiden in den Definitionen 65.1 und 65.2 enthaltenen Regeln lassen sich so zusammenfassen: Man erhält das Produkt aus einer positiven und einer negativen Zahl, indem man das Minuszeichen des negativen Faktors vor das Produkt der beiden Beträge setzt.

Wenn wir nun weiter überlegen, wie man ein Produkt aus zwei negativen Faktoren, z. B. $(-3{,}4) \cdot (-5{,}1)$, definieren soll, so liegt es nahe, die Regeln in den Definitionen 65.1 und 65.2 versuchsweise auch jetzt zu benützen, also das »Herausziehen des Minuszeichens« auch in diesem Fall anzuwenden (Permanenzprinzip!). Damit erhält man:

$(-3{,}4) \cdot (-5{,}1) = -((-3{,}4) \cdot 5{,}1) =$ (Anwendung von Def. 65.1 auch bei negativem 1. Faktor!)

$= -(-(3{,}4 \cdot 5{,}1)) =$ (nach Def. 65.2)

$= 3{,}4 \cdot 5{,}1$ (nach Satz 42.1)

Die Verallgemeinerung dieses Vorgehens würde also folgende Regel ergeben: $(-p) \cdot (-q) = p \cdot q$ für $p > 0$ und $q > 0$.

Demnach müßte das Produkt zweier negativer Zahlen positiv sein! Das mag auf den ersten Blick überraschen. Sinnvoll erscheint aber jedenfalls, daß, wie in den vorausgehenden Fällen, der Betrag des Produktes wieder den Wert $p \cdot q$ haben soll. Dann kann das Produkt selbst aber nur $p \cdot q$ oder $-(p \cdot q)$ sein. Der Produktwert $-(p \cdot q)$ ergab sich aber bereits in den Fällen $p \cdot (-q)$ und $(-p) \cdot q$, von denen sich $(-p) \cdot (-q)$ doch sicherlich unterscheiden sollte. Das spricht wieder für das Ergebnis $p \cdot q$, also für

Definition 66.1: Für das Produkt zweier negativer Zahlen $-p$ und $-q$ soll gelten:

$$(-p)\cdot(-q) = p \cdot q$$

Der jetzt noch verbleibende Fall, daß eine negative Zahl mit 0 multipliziert werden soll, bereitet uns wenig Mühe. Natürlich soll ein solches Produkt wieder den Wert 0 haben:

Definition 66.2: Für das Produkt einer negativen Zahl $-p$ mit der Zahl 0 soll gelten:

$$(-p)\cdot 0 = 0 \cdot (-p) = 0$$

Nunmehr sind wir in der Lage, das Produkt zweier beliebiger rationaler Zahlen zu berechnen. Die dafür geltenden Regeln kann man so zusammenfassen:

Satz 66.1: Zwei rationale Zahlen mit gleichen Vorzeichen werden multipliziert, indem man ihre Beträge multipliziert.
Zwei rationale Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen werden multipliziert, indem man das Produkt ihrer Beträge bildet und ihm das negative Vorzeichen gibt.
Ein Produkt mit dem Faktor 0 hat den Wert 0.

Beispiele:

1) $4 \cdot (-5) = -(4 \cdot 5) = -20$
2) $(-3) \cdot 17 = -(3 \cdot 17) = -51$
3) $(-1) \cdot (-1) = 1 \cdot 1 = 1$
4) $(-8) \cdot (-7{,}5) = 8 \cdot 7{,}5 = 60$
5) $2{,}5 \cdot (-3{,}7) = -(2{,}5 \cdot 3{,}7) = -9{,}25$
6) $(-\frac{3}{4}) \cdot 1\frac{1}{9} = -(\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{9}) = -(\frac{3}{4} \cdot \frac{10}{9}) = -\frac{5}{6}$
7) $(-100\,000) \cdot 0 = 0$

Wichtige Sonderfälle von Produkten sind solche aus zwei gleichen Faktoren, also die **Quadrate*** rationaler Zahlen: $\boldsymbol{a \cdot a = a^2}$.

Beispiele:

1) $4^2 = 16$; **2)** $(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 4 \cdot 4 = 16$
3) $0^2 = 0$; **4)** $(-1{,}2)^2 = (-1{,}2) \cdot (-1{,}2) = 1{,}2 \cdot 1{,}2 = 1{,}44$

* Das Produkt einer Zahl mit sich selbst nannten die Griechen – so belegt bei EUKLID, 8. Buch der *Elemente* – τετράγωνος [ἀριθμός] (tetrágonos [arithmós]) = *viereckig[e Zahl]*, da sie den Inhalt des τετράγωνον [σχῆμα] (tetrágonon [s-chema]) = *viereckig[e Figur]* angab, falls diese Figur gleichseitig rechtwinklig ist. Über das lateinische *quadratus* = *viereckig* entstand das deutsche **Quadrat**.

Auf Grund dieser Beispiele vermuten wir die Gültigkeit von

> **Satz 67.1:** Das Quadrat einer von 0 verschiedenen rationalen Zahl ist positiv. Das Quadrat von 0 ist 0. Kurz:
> $$\boldsymbol{a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0 \quad \text{und} \quad 0^2 = 0}$$

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus Satz 66.1 (vgl. Aufgabe 69/**2**).

2.6.2 Eigenschaften der Multiplikation in $\mathbb{Q}$

Es war unser Ziel, die Multiplikation in $\mathbb{Q}$ so zu definieren, daß die auf Seite 64 zusammengestellten Rechengesetze gültig bleiben. Ob uns das gelungen ist, muß nun geprüft werden.

1) **Existenz des Produkts:** Mit Hilfe der Definitionen in **2.6.1** bzw. nach Satz 66.1 kann man zwei rationale Zahlen stets miteinander multiplizieren. Das Ergebnis ist wieder eine Zahl aus $\mathbb{Q}$. Damit bleibt (E) in $\mathbb{Q}$ gültig.

2) **Kommutativgesetz der Multiplikation:** Hier muß untersucht werden, ob die Gleichung $a \cdot b = b \cdot a$ für beliebige rationale Zahlen gilt. Bei den hierzu notwendigen **Fallunterscheidungen** verwenden wir wieder p und q als Zeichen für positive Zahlen.

1. Fall: $a > 0$ und $b > 0$
Dann gilt, wie schon bekannt, $a \cdot b = b \cdot a$ ((K) in $\mathbb{Q}_0^+$).

2. Fall: $a > 0$ und $b < 0$
Wir setzen $a = p$, $b = -q$; dann gilt

$$\begin{aligned} a \cdot b = p \cdot (-q) &= -(p \cdot q) = && \text{(Definition 65.1)} \\ &= -(q \cdot p) = && \text{((K) in } \mathbb{Q}_0^+) \\ &= (-q) \cdot p = && \text{(Definition 65.2)} \\ &= b \cdot a. \end{aligned}$$

3. Fall: $a < 0$ und $b > 0$
Wir setzen $a = -p$ und $b = q$; dann gilt

$$\begin{aligned} a \cdot b = (-p) \cdot q &= -(p \cdot q) = && \text{(Definition 65.2)} \\ &= -(q \cdot p) = && \text{((K) in } \mathbb{Q}_0^+) \\ &= q \cdot (-p) = && \text{(Definition 65.1)} \\ &= b \cdot a. \end{aligned}$$

4. Fall: $a < 0$ und $b < 0$
Wir setzen $a = -p$ und $b = -q$; dann gilt

$$\begin{aligned} a \cdot b = (-p) \cdot (-q) &= p \cdot q = && \text{(Definition 66.1)} \\ &= q \cdot p = && \text{((K) in } \mathbb{Q}_0^+) \\ &= (-q) \cdot (-p) = && \text{(Definition 66.1)} \\ &= b \cdot a. \end{aligned}$$

5. Fall: $a = 0$ oder $b = 0$

Dann gilt $a \cdot b = 0 = b \cdot a$ (Satz 66.1)

Damit ist nachgewiesen, daß in jedem Fall $a \cdot b = b \cdot a$ gilt. Also bleibt (K) für die Multiplikation in $\mathbb{Q}$ gültig.

3) Assoziativgesetz der Multiplikation: Gilt $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ für beliebige rationale Zahlen a, b, c?

1) Wenn mindestens einer der drei Faktoren 0 ist, gilt nach Satz 66.1: $(a \cdot b) \cdot c = 0 = a \cdot (b \cdot c)$.

2) Wenn keiner der drei Faktoren 0 ist, bestehen folgende acht Möglichkeiten:

	1. Fall	2. Fall	3. Fall	4. Fall	5. Fall	6. Fall	7. Fall	8. Fall
a	pos.	pos.	pos.	pos.	neg.	neg.	neg.	neg.
b	pos.	pos.	neg.	neg.	pos.	pos.	neg.	neg.
c	pos.	neg.	pos.	neg.	pos.	neg.	pos.	neg.

Im 1. Fall gehören alle drei Faktoren zur Menge $\mathbb{Q}^+$, in welcher (A) gilt. Als Muster für die Überprüfung der übrigen Fälle soll hier nur der 6. Fall untersucht werden:

6. Fall: $a < 0$, $b > 0$ und $c < 0$

Wir setzen $a = -p$, $b = q$ und $c = -r$, mit p, q, r aus $\mathbb{Q}^+$.

Dann gilt:

$$(a \cdot b) \cdot c = ((-p) \cdot q) \cdot (-r) = (-(pq)) \cdot (-r) = \quad \text{(Definition 65.2)}$$
$$= (pq)r. \quad \text{(Definition 66.1)}$$
$$a \cdot (b \cdot c) = (-p) \cdot (q \cdot (-r)) = (-p) \cdot (-(qr)) = \quad \text{(Definition 65.1)}$$
$$= p(qr). \quad \text{(Definition 66.1)}$$

Wegen der Gültigkeit von (A) in $\mathbb{Q}^+$ ist aber $(pq)r = p(qr)$, also gilt $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Nach derselben Methode kann man auch die übrigen Fälle untersuchen (vgl. Aufgabe 70/**4**). Dabei zeigt sich, daß (A) für die Multiplikation in $\mathbb{Q}$ gültig bleibt.

4) Neutrales Element der Multiplikation: Für $a < 0$, also $a = -p$, gilt:

$$a \cdot 1 = (-p) \cdot 1 = -(p \cdot 1) = \quad \text{(Definition 65.2)}$$
$$= -p = \quad ((\mathrm{N}) \text{ in } \mathbb{Q}^+)$$
$$= a.$$

Daraus folgt, daß 1 auch für die negativen und damit für alle rationalen Zahlen neutrales Element der Multiplikation ist.

Damit ist gezeigt:

Satz 69.1: Für die Multiplikation in der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen gelten wieder die auf Seite 64 zusammengestellten Rechengesetze (E), (K), (A), (N).

Ebenso wie bei dreigliedrigen Summen kann man nun auch bei Produkten mit drei Faktoren wegen (A) auf Klammern verzichten:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c.$$

Mit Hilfe von (K) erkennt man, daß auch die Reihenfolge der Faktoren beliebig verändert werden darf:

Beispiel 1:

Behauptung: $abc = cba$

Beweis: $abc \overset{\text{A}}{=} (ab)c \overset{\text{K}}{=} c(ab) \overset{\text{K}}{=} c(ba) \overset{\text{A}}{=} cba.$

Ganz entsprechend läßt sich auch bei Produkten mit mehr als drei Faktoren zeigen, daß man auf Klammern verzichten kann und daß auch die Reihenfolge der Faktoren beliebig geändert werden darf.

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} 12{,}5 \cdot (-23{,}91) \cdot 8 &\overset{\text{A}}{=} 12{,}5 \cdot ((-23{,}91) \cdot 8) = \\ &\overset{\text{K}}{=} ((-23{,}91) \cdot 8) \cdot 12{,}5 = \\ &\overset{\text{A}}{=} (-23{,}91) \cdot (8 \cdot 12{,}5) = \\ &= (-23{,}91) \cdot 100 = -2391. \end{aligned}$$

Beispiel 2 zeigt, wie man durch die Wahl einer günstigen Reihenfolge der Faktoren und der Rechenschritte die Berechnung eines Produktes oft vereinfachen kann. Achte also stets auf solche **Rechenvorteile**.

Aufgaben

1. **a)** $(-5) \cdot 24$ **b)** $16 \cdot (-30)$ **c)** $(-125) \cdot (-81)$
   d) $(-2{,}5) \cdot 0{,}28$ **e)** $(-17{,}25) \cdot (-3{,}04)$ **f)** $0{,}064 \cdot (-6{,}25)$
   g) $3\frac{4}{15} \cdot (-2\frac{1}{7})$ **h)** $(-\frac{7}{12}) \cdot (-\frac{3}{14})$ **i)** $(-8{,}45) \cdot 1\frac{1}{39}$
2. Beweise Satz 67.1. Unterscheide dabei die Fälle $a > 0$, $a = 0$ und $a < 0$.
3. **a)** $1{,}1^2$ **b)** $(-0{,}11)^2$ **c)** $(-32)^2$ **d)** $(-\frac{11}{12})^2$
   e) $(0{,}375 - \frac{3}{8})^2$ **f)** $(\frac{3}{6} - \frac{4}{7})^2$ **g)** $(\frac{4}{7} - \frac{3}{6})^2$ **h)** $((-\frac{4}{7}) - \frac{3}{6})^2$

4. Überprüfe das Assoziativgesetz $(ab)c = a(bc)$ nach dem Muster des auf Seite 68 durchgeführten 6. Falles

a) für $a > 0,\ b > 0,\ c < 0$ (2. Fall),
b) für $a > 0,\ b < 0,\ c < 0$ (4. Fall),
c) für $a < 0,\ b < 0,\ c < 0$ (8. Fall).

5. Berechne die folgenden Produkte. Achte dabei auf Rechenvorteile.

a) $4 \cdot (-37) \cdot \frac{3}{4}$ **b)** $(-107) \cdot 8 \cdot (-25)$
c) $(-0{,}2) \cdot (-6{,}28) \cdot (-50)$ **d)** $(-300) \cdot 1\frac{2}{3} \cdot (-0{,}132)$
e) $(-\frac{17}{91}) \cdot 0 \cdot (-\frac{14}{31})$ **f)** $(-2\frac{2}{3})^2 \cdot (-\frac{21}{32}) \cdot \frac{3}{7}$

6. Begründe den **Satz**: Ein Produkt, in dem kein Faktor 0 ist, hat genau dann einen positiven Wert, wenn die Anzahl der negativen Faktoren gerade ist.

7. Setze zwischen die folgenden Zahlenterme eines der Zeichen $<, =, >$ so, daß eine wahre Aussage entsteht. In welchen Beispielen ist dies ohne Rechnung möglich?

a) $7 \cdot (-0{,}02)$ und 1 **b)** $(-12) \cdot (-13)$ und 150
c) -6 und $(-1) \cdot (-2) \cdot (-3)$ **d)** $(-\frac{3}{7}) \cdot (-\frac{14}{27}) \cdot (-9\frac{10}{11})$ und 0
e) $(-0{,}64)^2$ und $-0{,}64$ **f)** $(-\frac{13}{18}) \cdot 4{,}5$ und $5{,}4 \cdot (-0{,}6)$

8. a) $(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4)$ **b)** $1 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot (-4)$
c) $(-2{,}5) \cdot (-1{,}6) \cdot 3{,}25 \cdot (-0{,}5)$ **d)** $1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3} \cdot (-1\frac{1}{4}) \cdot 1\frac{1}{5}$

9. Achte bei der Berechnung der folgenden Summen und Differenzen auf die richtige Reihenfolge der Rechenschritte.

a) $(-1) + (-2) \cdot (-3)$ **b)** $(-1) \cdot (-2) - (-3) \cdot (-4)$
c) $250 \cdot (-0{,}25) - 25 \cdot (-0{,}250)$ **d)** $(-4{,}56) \cdot (-10{,}5) + 6{,}3 \cdot (-7{,}6)$
e) $(-8{,}1) \cdot \frac{25}{27} - (-0{,}98) \cdot (-\frac{5}{7})$ **f)** $(-\frac{1}{2}) \cdot \frac{3}{4} \cdot (-\frac{5}{6}) + 2 \cdot (-\frac{4}{3}) \cdot \frac{6}{5}$

10. a) $(263 - 298)(298 - 263)$ **b)** $(41{,}5 + (-67{,}75)) \cdot ((-2{,}1) - 1{,}9)$
c) $(1\frac{2}{7} - 2\frac{1}{7}) \cdot 3{,}5 \cdot ((-1\frac{2}{3}) - \frac{1}{6})$ **d)** $(1 - \frac{7}{2})(2 - \frac{7}{3})(3 - \frac{7}{4})$

11. Berechne folgende Absolutbeträge:

a) $|5(-2)|$ **b)** $|(-8) \cdot 9|$ **c)** $|(-17)(-3)|$ **d)** $|24 \cdot 25|$
e) $|0{,}75(-4)(-\frac{2}{3})|$ **f)** $|(-0{,}75) \cdot 4 \cdot \frac{2}{3}|$
g) $|(-0{,}75)(-4)(-\frac{2}{3})|$ **h)** $|9{,}81 \cdot (-\frac{7}{11}) \cdot 0 \cdot (-3\frac{1}{3})|$

12. Beweise den **Satz**: Der Betrag des Produktes zweier rationaler Zahlen a und b ist gleich dem Produkt der Beträge dieser Zahlen, d.h. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

13. Berechne den Wert der folgenden Terme für die angegebenen Einsetzungen:

a) $T(x) = x^2 + 4x + 1$ für $x = -5 (-2{,}3;\ 0;\ 2)$
b) $T(a; b) = (a + 2b)(a - 2b)$ für $a = 3;\ b = -1{,}5$ und
für $a = -8{,}3;\ b = -3{,}8$

c) $T(x; y; z) = xyz - (x - y)(y - z)$ für $x = -12$; $y = 4$; $z = 18$ und für $x = 0{,}8$; $y = -1{,}25$; $z = -9{,}65$

d) $T(a; b; c) = |(a - b) - c| - (|a| - |b - c|)$ für $a = -22$; $b = -18$; $c = 33$ und für $a = -14{,}3$; $b = -5{,}8$; $c = -6{,}7$

2.6.3 Division in $\mathbb{Q}$

Es kommt häufig vor, daß von einem Produkt der Wert bekannt ist und einer der Faktoren bestimmt werden muß. Dessen Berechnung führt auf eine **Division**. Man bezeichnet wegen dieses Zusammenhangs die Division als **Umkehrung der Multiplikation**.

Beispiel:

Die Klasse 7a mietet für einen Ausflug einen Bus. Sie muß dafür 350 DM bezahlen. Welchen Fahrpreis hat jeder der 28 Schüler zu entrichten?
Wenn wir den Fahrpreis pro Schüler mit x DM bezeichnen, muß gelten:

$$28 \cdot x = 350; \quad \text{also} \quad x = 350 : 28 = 12{,}5.$$

Jeder Schüler muß also 12,50 DM bezahlen.

Man erkennt an diesem mit Zahlen aus $\mathbb{Q}^+$ gebildeten Beispiel, daß der **Quotient** 350 : 28 die **Lösung der Gleichung** $28 \cdot x = 350$ darstellt. Genau diese Bedeutung wollen wir nun auch für Quotienten aus beliebigen rationalen Zahlen vereinbaren:

Definition 71.1: Unter dem Quotienten $b : a$ der rationalen Zahlen b und $a \neq 0$ versteht man die Lösung der Gleichung $a \cdot x = b$.
Statt $b : a$ schreibt man auch $\frac{b}{a}$.

$b : a$ ist also diejenige Zahl, mit der man a multiplizieren muß, um b zu erhalten.
Nach dieser Definition hat ein Quotient $b : a$ nur dann einen Sinn, wenn die entsprechende Gleichung $a \cdot x = b$ für $a \neq 0$ genau eine Lösung hat. Wir wissen schon, daß dies für $a \in \mathbb{Q}^+$ und $b \in \mathbb{Q}_0^+$ zutrifft. Gilt das aber auch, wenn a oder b negativ ist? Das läßt sich mit Hilfe einer Fallunterscheidung überprüfen:

1. Fall: $a > 0$ und $b < 0$

Wir setzen $a = p$ und $b = -q$ $(p > 0, q > 0)$; dann gilt:

$a \cdot x = b \Leftrightarrow p \cdot x = -q.$

Falls diese Gleichung eine Lösung x besitzt, muß sie negativ sein. Für sie gilt also: $x = -|x|$. Damit erhält man:
$p \cdot x = -q \Leftrightarrow p \cdot (-|x|) = -q \Leftrightarrow -(p \cdot |x|) = -q \Leftrightarrow p \cdot |x| = q$.
Dies ist nun eine Gleichung mit positiven Zahlen. Sie hat die Lösung $|x| = \frac{q}{p}$. Damit gilt: $x = -\frac{q}{p}$.

Ergebnis: Die Gleichung $p \cdot x = -q$ hat die Lösung $x = -\frac{q}{p}$.

Auf ganz entsprechende Weise kann man auch den 2. und 3. Fall untersuchen. Man findet dabei folgende Ergebnisse:

2. Fall: $a < 0$ und $b > 0$

Die Gleichung $(-p) \cdot x = q$ hat die Lösung $x = -\frac{q}{p}$.

3. Fall: $a < 0$ und $b < 0$

Die Gleichung $(-p) \cdot x = -q$ hat die Lösung $x = \frac{q}{p}$.

4. Fall: $a < 0$ und $b = 0$

Nach Satz 66.1 ist $x = 0$ eine Lösung der Gleichung $a \cdot x = 0$. Dies muß auch die einzige Lösung sein; denn für $x > 0$ wäre $a \cdot x < 0$, für $x < 0$ wäre $a \cdot x > 0$.

Damit ist nachgewiesen:

Satz 72.1: Die Gleichung $a \cdot x = b$ hat für $a \neq 0$ in der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen stets genau eine Lösung.

Für den Fall $a = 0$, d.h. für die Gleichung $0 \cdot x = b$, gelten in $\mathbb{Q}$ dieselben Feststellungen wie in $\mathbb{Q}_0^+$:
Wenn $b \neq 0$, hat die Gleichung $0 \cdot x = b$ **keine Lösung**,
wenn $b = 0$, ist **jede Zahl eine Lösung**.
Daher sind Quotienten mit dem Nenner 0 auch in $\mathbb{Q}$ sinnlos. Damit gilt

Satz 72.2: In der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen kann man jede Zahl durch jede **von 0 verschiedene** Zahl dividieren. Aber: **Durch 0 kann man nicht dividieren.**

Aus den in den ersten drei Fällen berechneten Lösungen der Gleichung $a \cdot x = b$ und der Quotientendefinition 71.1 können wir weitere wichtige Folgerungen ableiten:

Die Gleichung $p \cdot x = -q$ (1. Fall) hat die Lösung $x = -\frac{q}{p}$. Für diese Lösung haben wir aber in Definition 71.1 die Schreibweise $\frac{-q}{p}$ vereinbart. Daher gilt: $\frac{-q}{p} = -\frac{q}{p}$.

Ganz entsprechend erhalten wir im 2. und 3. Fall:

$\frac{q}{-p} = -\frac{q}{p}$ und $\frac{-q}{-p} = \frac{q}{p}$. Damit haben wir **Vorzeichenregeln für Quotienten** gewonnen! Diese entsprechen ganz den Regeln für Produkte, die wir in den Definitionen 65.1, 65.2 und 66.1 aufgestellt haben.

> **Satz 73.1:** Für Quotienten rationaler Zahlen gelten mit $p > 0$ und $q > 0$ folgende Vorzeichenregeln:
>
> $$\frac{-q}{p} = -\frac{q}{p}, \quad \frac{q}{-p} = -\frac{q}{p}, \quad \frac{-q}{-p} = \frac{q}{p},$$
>
> bzw. $(-q):p = -(q:p), \quad q:(-p) = -(q:p),$
>
> $(-q):(-p) = q:p$

Beispiele:

1) $\frac{-24}{8} = -\frac{24}{8} = -3$; $\frac{-121}{-22} = \frac{121}{22} = \frac{11}{2} = 5{,}5$;

2) $6{,}25:(-1{,}25) = -(6{,}25:1{,}25) = -5$;

3) $(-\frac{7}{11}):(-\frac{3}{11}) = \frac{7}{11}:\frac{3}{11} = \frac{7}{11}\cdot\frac{11}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$.

Einen wichtigen Sonderfall stellt die Gleichung $a \cdot x = 1$ dar. Für $a \neq 0$ hat sie nach Satz 72.1 genau eine Lösung, nämlich $x = \frac{1}{a}$, also den **Kehrwert** von a. Es gilt somit $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, d.h., das Produkt der Zahlen a und $\frac{1}{a}$ ist gleich dem neutralen Element der Multiplikation. Daher bezeichnet man diese Zahlen als *zueinander invers bezüglich der Multiplikation*. Es gilt

> **Satz 73.2:** Zu jeder von 0 verschiedenen rationalen Zahl a gibt es genau eine Inverse bezüglich der Multiplikation, nämlich ihren Kehrwert $\frac{1}{a}$.

Dieser Satz stellt ein weiteres Rechengesetz der Multiplikation dar, das man als »Existenz des Inversen« bezeichnet und mit (I) abkürzt. Damit kennen wir für die Multiplikation in $\mathbb{Q}$ die fünf Rechengesetze (E), (K), (A), (N), (I).

Für $a \neq 0$ hat also der Term $a \cdot \frac{1}{a}$ stets den Wert 1. Multipliziert man ihn mit einem Faktor b, so erhält man daher $\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) \cdot b = 1 \cdot b$, also $\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) \cdot b = b$.

Eine einfache Umformung der linken Seite liefert die Gleichung

$$a \cdot \left(b \cdot \frac{1}{a}\right) = b.$$

Diese läßt sich nun so deuten:

$$b \cdot \frac{1}{a} \quad \text{ist Lösung der Gleichung} \quad a \cdot x = b.$$

Da aber diese Gleichung nur eine einzige Lösung hat und wir für diese in Definition 71.1 die Schreibweise $\frac{b}{a}$ eingeführt haben, müssen $\frac{b}{a}$ und $b \cdot \frac{1}{a}$ lediglich verschiedene Schreibweisen für dieselbe Zahl sein. Daher gilt

Satz 74.1: Die Division durch eine Zahl $a \neq 0$ kann man durch die Multiplikation mit ihrem Kehrwert $\frac{1}{a}$ ersetzen und umgekehrt,

d.h., $\boldsymbol{\frac{b}{a} = b \cdot \frac{1}{a}}$ bzw. $\boldsymbol{b : a = b \cdot (1 : a)}$ für $a \neq 0$.

Beispiele:

1) $\frac{45}{0{,}3} = 45 \cdot \frac{10}{3} = 150$; **2)** $(-\frac{7}{12}) : \frac{3}{4} = (-\frac{7}{12}) \cdot \frac{4}{3} = -\frac{7}{9}$;

3) $126 \cdot \frac{1}{21} = 126 : 21 = 6$; **4)** $(-6{,}6) \cdot \frac{5}{11} = (-6{,}6) : 2{,}2 = -3$.

Aufgaben

1. Berechne die folgenden Quotienten:
a) $105 : (-15)$ **b)** $(-7) : (-1)$ **c)** $(-65) : 125$
d) $(-3{,}24) : (-1{,}8)$ **e)** $1024 : 32$ **f)** $(-10{,}24) : 0{,}064$
g) $2{,}7 : (-81)$ **h)** $(-2{,}5) : (-0{,}35)$ **i)** $(-18) : 21{,}6$

2. Gib den Wert der folgenden Brüche in möglichst einfacher Form an:
a) $\frac{5}{-1}$ **b)** $\frac{-16}{12}$ **c)** $\frac{-35}{-49}$ **d)** $\frac{84}{144}$
e) $\frac{(-1)^2}{-1}$ **f)** $\frac{(-1)^3}{(-1)^5}$ **g)** $\frac{-1}{(-1)^{20}}$ **h)** $\frac{(-1)^{16}}{(-1)^{57}}$
i) $\frac{8}{(-2)^2}$ **k)** $\frac{(-2)^3}{5}$ **l)** $\frac{(-3)^2}{(-3)^3}$ **m)** $\frac{2^4}{(-1)^7}$

3. Berechne:

a) $(3-5^2):(20-9)$ **b)** $(\frac{3}{8}+0{,}625):(\frac{3}{8}-0{,}625)$

c) $(2\frac{1}{3}-5):4\frac{4}{9}$ **d)** $(-10\frac{5}{7}):(\frac{12}{13}-1\frac{1}{7})$

e) $(11\cdot 25):(31-75)$ **f)** $(8{,}5:(-\frac{5}{7})):((-3{,}4)\cdot 2{,}5)$

4. Berechne den Wert folgender Bruchterme:

a) $\dfrac{16\cdot 1{,}2-20}{16-1{,}2\cdot 20}$ **b)** $\dfrac{3{,}6\cdot 2{,}5\cdot(-1{,}6)}{3{,}6+(2{,}5-1{,}6)}$

c) $\dfrac{4{,}3-0{,}72\cdot(-31)}{1\frac{5}{6}:(-\frac{5}{12})}$ **d)** $\dfrac{(10\frac{1}{2}+6\frac{5}{6}):(2\frac{13}{15}-6\frac{1}{5})}{\frac{7}{9}\cdot(-\frac{3}{35})\cdot 1\frac{2}{7}}$

5. Gib, wenn möglich, zu den folgenden Zahlen die Inversen bezüglich der Addition und bezüglich der Multiplikation an.

a) 1 **b)** -1 **c)** 0 **d)** $-0{,}125$

e) $\frac{2}{7}$ **f)** $-4{,}5$ **g)** $0{,}75$ **h)** $-2\frac{3}{11}$

6. Begründe den **Satz:** Es gibt keine rationale Zahl, für welche die Inverse bezüglich der Addition gleich der Inversen bezüglich der Multiplikation ist.

7. Schreibe nach Definition 71.1 die Lösung der Gleichung als Quotienten und berechne sie.

a) $(-1)\cdot x=17$ **b)** $3x=-12$ **c)** $x\cdot(-38)=-7{,}6$

d) $\frac{5}{7}\cdot x=-\frac{1}{49}$ **e)** $(2-\frac{2}{3})x=2\frac{2}{3}$ **f)** $x\cdot(-2\frac{1}{4})=0{,}125-1{,}25$

8. Welche Lösungsmengen haben die folgenden Gleichungen?

a) $x\cdot(\frac{12}{15}-0{,}8)=1$ **b)** $(0{,}625:5-\frac{1}{8})\cdot x=0$

c) $x\cdot(\frac{3}{4}-\frac{4}{3})=\frac{4}{3}-\frac{3}{4}$ **d)** $(\frac{3}{20}-0{,}15)\cdot x=(\frac{3}{20}-0{,}15)\cdot 7$

2.6.4 Allgemeine Vorzeichenregeln für Produkte und Quotienten

Die Multiplikation einer Zahl $a\in\mathbb{Q}$ mit 1, dem neutralen Element der Multiplikation, bewirkt keine Änderung: $a\cdot 1=a$. Was aber erhält man, wenn man a mit der Gegenzahl von 1, also mit -1, multipliziert?

Beispiele:

1) $7\cdot(-1)=-(7\cdot 1)=-7$; **2)** $(-1)\cdot 0=-(1\cdot 0)=-0=0$

3) $(-1)\cdot 3{,}14=-(1\cdot 3{,}14)=-3{,}14$; **4)** $(-\frac{5}{7})\cdot(-1)=\frac{5}{7}\cdot 1=\frac{5}{7}$

Wie man leicht beweisen kann (vgl. Aufgabe 78/2) gilt

Satz 75.1: Multipliziert man eine Zahl mit -1, so erhält man ihre Gegenzahl.

$$a\cdot(-1)=(-1)\cdot a=-a$$

Das Interessante an diesem Satz ist, daß man das Bilden der Gegenzahl nun auch als Multiplikation mit -1 beschreiben kann. Das ist oft nützlich, z. B. bei den folgenden Überlegungen:
In der Algebra treten häufig Produkte der Form $a \cdot (-b)$, $(-a) \cdot (-b)$ usw. auf, bei denen die Variablen a, b *beliebige rationale Zahlen* vertreten. Zum Vereinfachen solcher Produkte darf man daher nicht ohne weiteres die in den Definitionen 65.1, 65.2 und 66.1 aufgestellten Regeln anwenden, denn die dort benützten Variablen p, q bedeuten *positive Zahlen*. Immerhin wäre es denkbar und wünschenswert (Permanenzprinzip!), daß diese Regeln auch für beliebige rationale Zahlen gültig bleiben. Das soll nun untersucht werden:

Beispiel 1:

$a \cdot (-b)$ kann man folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} a \cdot (-b) &= a \cdot ((-1) \cdot b) = && \text{(Satz 75.1)} \\ &\overset{\text{K}}{=} a \cdot (b \cdot (-1)) = \\ &\overset{\text{A}}{=} (a \cdot b)(-1) = \\ &= -(a \cdot b). && \text{(Satz 75.1)} \end{aligned}$$

Natürlich ist wegen (K) damit auch die Regel $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$ bewiesen.

Beispiel 2:

$(-a) \cdot (-b)$ kann man so umformen:

$$\begin{aligned} (-a) \cdot (-b) &= (-a) \cdot ((-1) \cdot b) = && \text{(Satz 75.1)} \\ &\overset{\text{A}}{=} ((-a) \cdot (-1)) \cdot b = \\ &= (-(-a)) \cdot b = && \text{(Satz 75.1)} \\ &= a \cdot b. && \text{(Satz 42.1)} \end{aligned}$$

Nimmt man der Vollständigkeit halber noch die Vereinbarung $a \cdot b = ab$ hinzu und schreibt, um die Vorzeichen zu betonen, für a, b und ab noch $+a$, $+b$, $+ab$, so erhält man folgende allgemeingültigen Vorzeichenregeln für Produkte:

Satz 76.1: Für beliebige rationale Zahlen a, b gilt:

$$(+a) \cdot (+b) = +ab \qquad (-a) \cdot (-b) = +ab$$
$$(+a) \cdot (-b) = -ab \qquad (-a) \cdot (+b) = -ab$$

Diese Vorzeichenregeln prägt man sich am besten in folgender Form ein:

Regel 76.1: $(+) \cdot (+) = +$ $\qquad (-) \cdot (-) = +$
$(+) \cdot (-) = -$ $\qquad (-) \cdot (+) = -$

Man kann nun also auch Produkte mit Variablen, die *beliebige* Zahlen vertreten, in gewohnter Weise vereinfachen. Dazu einige

Beispiele:

1) $5(-a) = -5a$; **2)** $(-2)(-3b) = 6b$;
3) $(-x)y(-z) = xyz$; **4)** $(-2)(-0{,}5)(-\frac{1}{3}z) = -\frac{1}{3}z$.

Auch von den in Satz 73.1 enthaltenen Vorzeichenregeln für Quotienten, die dort nur für positive Zahlen p, q bewiesen wurden, kann man zeigen, daß sie für beliebige rationale Zahlen gelten:

Beispiel:

$$\begin{aligned}\frac{-b}{a} &= (-b)\cdot\frac{1}{a} = && \text{(Satz 74.1)}\\ &= ((-1)b)\cdot\frac{1}{a} = && \text{(Satz 75.1)}\\ &\overset{\text{A}}{=} (-1)\left(b\cdot\frac{1}{a}\right) = && \\ &= (-1)\cdot\frac{b}{a} = && \text{(Satz 74.1)}\\ &= -\frac{b}{a}. && \text{(Satz 75.1)}\end{aligned}$$

Auf dieselbe Weise kann man zeigen, daß auch $\frac{b}{-a} = -\frac{b}{a}$ und $\frac{-b}{-a} = \frac{b}{a}$ für beliebige Zahlen gilt. Zusammen mit $\frac{+b}{+a} = +\frac{b}{a}$ erhält man so

Satz 77.1: Für rationale Zahlen $a \neq 0$ und b gilt:

$$\frac{+b}{+a} = +\frac{b}{a}, \quad \frac{-b}{-a} = +\frac{b}{a}, \quad \frac{+b}{-a} = -\frac{b}{a}, \quad \frac{-b}{+a} = -\frac{b}{a}$$

Die entsprechende Merkregel lautet:

Regel 77.1: $\frac{+}{+} = + \qquad \frac{-}{-} = + \qquad \frac{+}{-} = - \qquad \frac{-}{+} = -$

Beachte, daß man in diesen Regeln den Bruchstrich auch durch den Doppelpunkt als Divisionszeichen ersetzen kann.

Beispiele:

1) $\frac{-a}{2} = -\frac{a}{2}$; **2)** $\frac{(-x)y}{(-2z)} = \frac{-(xy)}{-(2z)} = \frac{xy}{2z}$;

3) $15:(-u) = -(15:u)$; **4)** $(-2vw):(-xy) = (2vw):(xy)$.

Aufgaben

1. Vereinfache durch Anwendung der Vorzeichenregeln für Produkte:
   a) $(-2)\cdot x$ **b)** $(-5)(-y)$ **c)** $(-z)(+2{,}3)$
   d) $a(-b)(+c)$ **e)** $(-a)(-b)c$ **f)** $(+a)(+b)(-c)$

2. Beweise die Gleichung $a\cdot(-1) = -a$ (Satz 75.1) mit Hilfe der Fallunterscheidung $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$. Gib jeweils an, welche Definitionen oder Sätze benützt werden.

3. **a)** Stelle entsprechend der Regel 76.1 die Vorzeichenregeln für Produkte mit drei Faktoren symbolisch dar.
   b) Ergänze zu richtigen Vorzeichenregeln:
   $(-)\cdot(+)\cdot(-)\cdot(+) = ?$ und $(+)\cdot(-)\cdot(-)\cdot(+)\cdot(-) = ?$

4. Vereinfache durch Anwenden der Vorzeichenregeln für Quotienten:
   a) $\dfrac{2(-m)}{-3}$ **b)** $\dfrac{(-1)(+m)}{(+1)(-n)}$ **c)** $\dfrac{(-21)(-s)t}{q(+r)(-5)}$

5. Verwandle in den folgenden Produkten den Zahlenfaktor in einen Divisor.
   a) $m\cdot\frac{1}{7}$ **b)** $n\cdot 0{,}2$ **c)** $p\cdot(-0{,}25)$
   d) $(-\frac{2}{9})\cdot q$ **e)** $r\cdot(1\frac{2}{3})$ **f)** $(-\frac{10}{13})\cdot s$

6. Schreibe die folgenden Quotienten als Produkte:
   a) $x:0{,}5$ **b)** $y:\frac{1}{6}$ **c)** $z:(-\frac{2}{3})$
   d) $(-u):(-0{,}125)$ **e)** $v:(3\frac{1}{3})$ **f)** $w:(-0{,}001)$

2.7 Die Rechengesetze für die rationalen Zahlen

2.7.1 Das Distributivgesetz

Im bisherigen Rechenunterricht hast du schon das **Verteilungs-** oder **Distributivgesetz*** kennengelernt. Es besagt, daß man beim Multiplizieren einer Summe auf zwei verschiedenen Wegen zum richtigen Ergebnis kommen kann. Dazu ein

Beispiel:

Die Klasse 7b besteht aus 16 Knaben und 10 Mädchen. Für den Besuch einer Ausstellung sammelt der Klassensprecher pro Schüler 2,50 DM ein. Wieviel Geld muß er dann haben?

1. Weg: Man rechnet »2,50 DM · Gesamtzahl der Schüler«, also

$$2{,}50\text{ DM}\cdot(16+10) = 2{,}50\text{ DM}\cdot 26 = 65{,}00\text{ DM}.$$

* distribuere (lat.) = verteilen. – Der Ausdruck *distributiv* wurde ebenso wie das Wort *kommutativ* 1814 von dem französischen Professor der Mathematik François Joseph Servois (1767–1847) geprägt. Siehe auch die Fußnote* auf Seite 50.

2. Weg: Man rechnet »2,50 DM · Zahl der Knaben« + »2,50 DM · Zahl der Mädchen«, also
2,50 DM · 16 + 2,50 DM · 10 = 40,00 DM + 25,00 DM = 65,00 DM.

Man erkennt: 2,50 DM · (16 + 10) = 2,50 DM · 16 + 2,50 DM · 10.

Allgemein gilt für $a, b, c \in \mathbb{Q}_0^+$ die Beziehung $a(b+c) = ab + ac$. Dies ist das Distributivgesetz, für das wir die Abkürzung (D) verwenden.
Nachdem wir nun wissen, wie in der größeren Zahlenmenge $\mathbb{Q}$ die Addition und die Multiplikation auszuführen sind, stellt sich die Frage, ob das Rechengesetz (D) auch in $\mathbb{Q}$ gültig bleibt. Wir prüfen dies zunächst an einigen Beispielen.

Beispiel 1: $a = -2,\ b = 5,\ c = -8$
dann gilt: $a(b+c) = (-2)\cdot(5+(-8)) = (-2)\cdot(-3) = 6$
und: $ab + ac = (-2)\cdot 5 + (-2)\cdot(-8) = -10 + 16 = 6.$

Beispiel 2: $a = 4{,}1;\ b = -4{,}8;\ c = 3{,}5$
dann gilt: $a(b+c) = 4{,}1\cdot((-4{,}8)+3{,}5) = 4{,}1\cdot(-1{,}3) = -5{,}33$
und: $ab + ac = 4{,}1\cdot(-4{,}8) + 4{,}1\cdot 3{,}5 = -19{,}68 + 14{,}35 = -5{,}33.$

Beispiel 3: $a = -\frac{2}{7},\ b = -\frac{3}{4},\ c = -\frac{2}{11}$
dann gilt: $a(b+c) = (-\frac{2}{7})\cdot((-\frac{3}{4}) + (-\frac{2}{11})) = (-\frac{2}{7})\cdot(-(\frac{3}{4}+\frac{2}{11})) =$
$= \frac{2}{7}(\frac{3}{4}+\frac{2}{11}) = \frac{2}{7}\cdot\frac{41}{44} = \frac{41}{154}$
und: $ab + ac = (-\frac{2}{7})\cdot(-\frac{3}{4}) + (-\frac{2}{7})\cdot(-\frac{2}{11}) = \frac{2}{7}\cdot\frac{3}{4} + \frac{2}{7}\cdot\frac{2}{11} =$
$= \frac{3}{14} + \frac{4}{77} = \frac{33+8}{154} = \frac{41}{154}.$

Diese Beispiele lassen also vermuten, daß (D) für alle rationalen Zahlen gilt. Der genaue Nachweis dafür erfordert eine ziemlich umfangreiche Fallunterscheidung und ist schwierig. Für Interessenten soll hier als Beispiel einer der einfacheren Fälle untersucht werden:

Fall: $a > 0,\ b < 0,\ c < 0$

Wir setzen $a = p,\ b = -q,\ c = -r$ mit $p, q, r \in \mathbb{Q}^+$.
Dann gilt: $a(b+c) = p((-q)+(-r)) = p(-(q+r)) =$
$= -(p(q+r)) = -(pq+pr).$
Hier wurde beim letzten Schritt (D) in $\mathbb{Q}^+$ angewandt.
Weiter gilt: $ab + ac = p(-q) + p(-r) = (-pq) + (-pr) =$
$= -(pq+pr).$

Damit ist für diesen Fall (D) bewiesen. Man kann so tatsächlich zeigen, daß das Distributivgesetz in jedem Fall gilt. Dies halten wir fest in

Satz 79.1: Für beliebige rationale Zahlen a, b, c gilt das **Distributivgesetz:**

(D): $\boldsymbol{a(b+c) = ab + ac}$

Beispiele:

1) $(-2)(a+5) = (-2)a + (-2)\cdot 5 = -2a - 10.$

2) $(x+2y)\cdot 19 = 19(x+2y) = 19x + 38y.$

3) $6{,}5(a-4b) = 6{,}5(a+(-4b)) = 6{,}5a + 6{,}5(-4b) = 6{,}5a - 26b.$

4) $((-3z)-7)\cdot(-10) = ((-3z)+(-7))\cdot(-10) =$
$= (-3z)\cdot(-10) + (-7)\cdot(-10) = 30z + 70.$

Aufgaben

1. Berechne zur Überprüfung des Distributivgesetzes die Terme $T_1 = a(b+c)$ und $T_2 = ab + ac$ für folgende Zahlenwerte:
a) $a = -8;\ b = -2;\ c = 5$ **b)** $a = 1{,}1;\ b = -0{,}7;\ c = -160$
c) $a = -36;\ b = \frac{7}{16};\ c = -1\frac{3}{8}$ **d)** $a = -2{,}5;\ b = -9{,}12;\ c = -\frac{22}{25}$

• **2.** Begründe bei dem auf Seite 79 stehenden Beweis des Distributivgesetzes für den Fall $a > 0,\ b < 0,\ c < 0$ die einzelnen Termumformungen, z. B. durch Angabe der dabei verwendeten Sätze oder Regeln.

• **3.** Beweise nach dem Muster des auf Seite 79 durchgeführten Falles das Distributivgesetz auch für den Fall $a < 0,\ b < 0$ und $c < 0$.

4. Verwandle die angegebenen Produkte in Summen oder Differenzen:
a) $(16x + 3y)\cdot 9$ **b)** $(2{,}8xy - 5)\cdot(-12{,}5)$ **c)** $(-0{,}5)\cdot(1{,}6v - \frac{3}{5}w)$
d) $12(-4a + 3b)$ **e)** $(-n)\cdot(2n+7)$ **f)** $(-\frac{2}{3}x - \frac{5}{8}y)\cdot\frac{6}{7}$

5. Berechne und vergleiche $T_1 = (a+b) : c$ und $T_2 = a : c + b : c$ für folgende Zahlenwerte:
a) $a = 22;\ b = 10;\ c = 8$ **b)** $a = -5{,}4;\ b = 7{,}8;\ c = -6$
c) $a = -2\frac{1}{7};\ b = -\frac{10}{21};\ c = \frac{5}{11}$ **d)** $a = -\frac{1}{3};\ b = -1{,}6;\ c = -0{,}4$

6. Begründe, daß auch für das Dividieren einer Summe ein Distributivgesetz gilt, nämlich $(a+b) : c = a : c + b : c$, für $c \neq 0$.
Hinweis: Beachte Satz 74.1.

7. Verwandle die folgenden Quotienten in Summen oder Differenzen:
a) $(8x + 6y) : 4$ **b)** $(0{,}64z^2 - 1) : 0{,}4$
c) $(\frac{2}{3}u - 5v) : (-\frac{5}{6})$ **d)** $(-5{,}1p - 8{,}5q) : (-17)$

2.7.2 Die Monotoniegesetze der Multiplikation

Wir wissen schon nach Satz 62.1, daß eine Ungleichung erhalten bleibt, wenn man auf beiden Seiten dieselbe Zahl addiert: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$. Gilt eine entsprechende Feststellung auch, wenn man beide Seiten einer Ungleichung mit derselben Zahl multipliziert?

Beispiele:

1) Multiplikation mit 7:
Aus $2 < 5$ wird $14 < 35$, weil 14 links von 35 liegt.
Aus $-5 < 1{,}5$ wird $-35 < 10{,}5$.
Aus $-3{,}1 < -1{,}2$ wird $-21{,}7 < -8{,}4$.

2) Multiplikation mit -3:
Aus $2 < 5$ wird $-6 > -15$, weil -6 rechts von -15 liegt.
Aus $-5 < 1{,}5$ wird $15 > -4{,}5$.
Aus $-3{,}1 < -1{,}2$ wird $9{,}3 > 3{,}6$.

Die Beispiele unter **1)** lassen vermuten, daß gilt:

Satz 81.1: Monotoniegesetz der Multiplikation
Multipliziert man eine Ungleichung mit einer **positiven** Zahl, so bleibt das Ungleichheitszeichen erhalten; also

$$\left.\begin{matrix} a < b \\ c > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac < bc.$$

Bemerkung: Da statt $a < b$ auch $b > a$ und statt $ac < bc$ auch $bc > ac$ geschrieben werden kann, gilt Satz 81.1 natürlich dann auch für Ungleichungen mit dem Größerzeichen.

Beweis: $a < b$ bedeutet nach Satz 61.2, daß es eine Zahl $p > 0$ gibt, für welche $a + p = b$ gilt.
Dann ist auch $(a+p)c = bc$ bzw. $ac + pc = bc$.
Wegen $c > 0$ und $p > 0$ gilt auch $pc > 0$. Man muß also zu ac die positive Zahl pc addieren, um bc zu erhalten. Nach Satz 61.2 bedeutet dies aber $ac < bc$, was zu zeigen war.

Die Beispiele **2)** lassen erkennen, daß für negative Faktoren das Monotoniegesetz nicht gilt. Offenbar kehrt sich in diesem Fall das Ungleichheitszeichen um, d.h., aus dem Kleinerzeichen wird ein Größerzeichen bzw. aus dem Größer- ein Kleinerzeichen. Es gilt der folgende

Satz 81.2: Gesetz von der Umkehrung der Monotonie
Multipliziert man eine Ungleichung mit einer **negativen** Zahl, so kehrt sich das Ungleichheitszeichen um, d.h.,

$$\left.\begin{matrix} a < b \\ c < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac > bc.$$

Beweis: $a < b$ bedeutet nach Satz 61.2, daß es eine Zahl $p > 0$ gibt, für welche $a + p = b$ gilt.

Die Auflösung dieser Gleichung nach a liefert
$a = b - p$ oder $a = b + (-p)$.
Dann gilt auch $ac = (b + (-p))c =$
$\stackrel{D}{=} bc + (-p)c$.

Nach Voraussetzung sind $(-p)$ und c negative Zahlen; somit ist $(-p)c$ positiv. Da man also zu bc eine positive Zahl addieren muß, um ac zu erhalten, gilt $ac > bc$, was zu zeigen war.

Einen wichtigen Sonderfall von Satz 81.2 stellt das Multiplizieren einer Ungleichung mit -1 dar. Es gilt (Abbildung 82.1):

$a < b \Rightarrow a \cdot (-1) > b \cdot (-1)$, also
$a < b \Rightarrow -a > -b$.

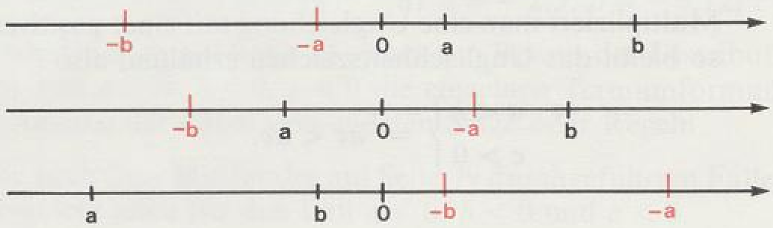


Abb. 82.1 $a < b \Leftrightarrow -a > -b$

Natürlich gelten die beiden Monotoniegesetze auch für das Dividieren einer Ungleichung durch eine positive oder negative Zahl. Das ergibt sich daraus, daß man die Division durch $c \neq 0$ als Multiplikation mit $\frac{1}{c}$ auffassen kann. Da c und $\frac{1}{c}$ gleiches Vorzeichen haben, gilt also:

$$\left.\begin{array}{l} a < b \\ c > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \quad \text{und} \quad \left.\begin{array}{l} a < b \\ c < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{c} > \frac{b}{c}.$$

Aufgaben

1. Multipliziere die Ungleichung mit der angegebenen Zahl.
   a) $-20 < -2 \,\|\cdot 5$ **b)** $1{,}7 > -1{,}8 \,\|\cdot(-0{,}5)$ **c)** $24 > 0 \,\|\cdot(-\frac{3}{8})$
   d) $\frac{3}{7} > -\frac{7}{3} \,\|\cdot(-21)$ **e)** $2x > y \,\|\cdot 0{,}7$ **f)** $0{,}2u < -8v \,\|\cdot(-5)$
2. Dividiere die Ungleichung durch die angegebene Zahl:
   a) $-2 < 1 \,\|:5$ **b)** $68 > 0 \,\|:(-0{,}5)$
   c) $-5{,}4 < -4{,}5 \,\|:(-\frac{5}{3})$ **d)** $\frac{14}{15} < \frac{24}{25} \,\|:0{,}4$
   e) $0{,}01 > -0{,}1 \,\|:(-0{,}001)$ **f)** $-0{,}8 > -\frac{7}{8} \,\|:|-2|$

3. Multipliziere die zwischen a und b bestehende Ungleichung mit dem Faktor c:

a) $a = 37$; $b = -1$; $c = 3$ **b)** $a = \frac{4}{5}$; $b = \frac{3}{4}$; $c = -10$

c) $a = -1{,}9$; $b = -2{,}1$; $c = -0{,}2$ **d)** $a = -0{,}985$; $b = 0$; $c = 200$

4. Was ergibt sich, wenn man eine Ungleichung mit 0 multipliziert?

5. Ist x positiv, null oder negativ, wenn gilt

a) $a < b \Rightarrow ax > bx$ **b)** $u > v \Rightarrow ux = vx$

c) $n > m \Rightarrow \frac{n}{x} < \frac{m}{x}$ **d)** $p > 0 \Rightarrow \frac{p}{x} > 0$?

2.7.3 Zusammenstellung der Rechengesetze

Für rationale Zahlen a, b, c gelten folgende Rechengesetze:		
Gesetze der Addition	**Gesetze der Multiplikation**	**Bezeichnungen**
(E_+) $a + b \in \mathbb{Q}$	$(E_\cdot)$ $a \cdot b \in \mathbb{Q}$	**Existenz der Summe/des Produkts**
(K_+) $a + b = b + a$	$(K_\cdot)$ $a \cdot b = b \cdot a$	**Kommutativgesetz**
(A_+) $(a + b) + c = a + (b + c)$	$(A_\cdot)$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	**Assoziativgesetz**
(N_+) $a + 0 = a$	$(N_\cdot)$ $a \cdot 1 = a$	**Existenz des neutralen Elements**
(I_+) $a + (-a) = 0$	$(I_\cdot)$ $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, falls $a \neq 0$	**Existenz des inversen Elements**
(D) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$		**Distributivgesetz**
$a < b \Rightarrow a + c < b + c$	$\left.\begin{matrix} a < b \\ c > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$	**Monotoniegesetz**
	$\left.\begin{matrix} a < b \\ c < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$	**Umkehrung der Monotonie**

Die hier zusammengestellten Rechengesetze bilden die Grundlage für das Rechnen mit rationalen Zahlen und überhaupt für die ganze Algebra. Du wirst sie im folgenden immer wieder benötigen, besonders häufig die mit (E), (K), (A), (N), (I) und (D) bezeichneten Gesetze. Präge sie dir daher gut ein (Merkwort: EKANID, vgl. auch Aufgabe 84/**5**.).
Besonders auffällig an dieser Gesetzestafel ist natürlich die weitgehende Analogie zwischen den Rechengesetzen der Addition und der Multiplikation: die »EKANI-Gesetze« gibt es für beide Rechenarten. Zu ihrer Unterscheidung wurde in der Tafel ein an den Kennbuchstaben angehängtes Plus- bzw. Malzeichen verwendet. Im Distributivgesetz (D) – und nur in ihm (!) – kommen beide Rechenarten zugleich vor. Es stellt eine Verbindung zwischen den beiden durch die Gesetze der Addition und der Multiplikation beschriebenen Rechenbereichen dar.

Aufgaben

1. Welches der in $\mathbb{Q}$ geltenden Rechengesetze der Addition konnte in der Zahlenmenge $\mathbb{Q}_0^+$ noch nicht aufgestellt werden und warum nicht?

2. Weshalb benötigt man keine eigenen Rechengesetze für die Subtraktion und die Division? (In welchen Rechengesetzen der Addition und Multiplikation sind diese Umkehroperationen enthalten?)

3. Ist es richtig, zu sagen »Wenn man in den Rechengesetzen der Addition die Pluszeichen durch Malzeichen ersetzt, erhält man die Rechengesetze der Multiplikation«?

4. Erkläre an der Zahlengeraden, warum es bei der Addition keine »Umkehrung der Monotonie« gibt.

5. a) Wie gefällt dir der Wahlspruch »In Mathe fit mit EKANID«?
Oder folgender: »Was EKANID weiß, macht mich nicht heiß«?
Denke dir selbst beß're Merksätze aus!
Vielleicht wird gar ein Gedicht daraus?

b) »Beim Rechnen in $\mathbb{Q}_0^+$ eckt man oft an,
Weil man häufig nicht subtrahieren kann.
Das liegt daran: Man hat nur EKAN!
.................................«
Erfinde zu diesem großartigen Gedichtanfang eine passende Fortsetzung, welche auf den mit $\mathbb{Q}$ und EKANI erreichten Fortschritt hinweist!

**Zur Geschichte der negativen Zahlen

Bereits in altbabylonischen Texten um 2000 v. Chr. kommen an einigen Stellen negative Zahlen vor. Aber wir wissen nicht, wie die Babylonier sie aufgefaßt und ob sie mit ihnen gerechnet haben.

Im chinesischen Rechenbuch *Chiu Chang Suan Shu** = *Neun Bücher arithmetischer Technik*, von dem man nicht weiß, wie alt es wirklich ist – der älteste erhaltene Text ist die 263 n. Chr. von LIU Hui mit Kommentaren versehene Ausgabe** –, kommen positive und negative Zahlen vor. Die positiven Zahlen werden rot, die negativen schwarz geschrieben. Die Regeln für die Addition und Subtraktion negativer Zahlen sind bekannt und werden angegeben. Ergeben sich beim Lösen von Gleichungen negative Zahlen, so werden sie als Lösungen anerkannt.

Rechenregeln für das Ausmultiplizieren von $(a-b)(c-d)$ findet man auch bei DIOPHANT (um 250 n. Chr.), der aber im Grunde nur mit Differenzen arbeitet, die einen positiven Wert haben. Negative Zahlen als Lösungen von Gleichungen bezeichnet er als »unstatthaft«.

Die Inder kennen positive und negative Zahlen und benennen sie durch die Wörter *dhana* = Vermögen und *rna* = Schulden. Bei BRAHMAGUPTA (598–nach 665) werden negative Zahlen durch einen darübergesetzten Punkt gekennzeichnet; er schreibt also z. B. $\dot{3}$ für unser -3. In der weiteren Entwicklung der indischen Mathematik werden negative Zahlen auch als Lösungen von Gleichungen zugelassen.

Die Araber übernehmen zwar von den Indern das Rechnen mit negativen Zahlen, erkennen sie aber nicht als Lösungen von Aufgaben an.

Spätestens im 9. Jh. kann man im Abendland mit negativen Zahlen rechnen, aber als erster läßt LEONARDO VON PISA (um 1170–nach 1240) eine negative Zahl als Lösung zu, die er als Schulden deutet; andernfalls wäre die Aufgabe unlösbar.***

Ähnlich geht auch Michael STIFEL (1487(?)–1567) vor, obgleich er zu tieferer Einsicht in das Wesen der negativen Zahlen gekommen ist. Er spricht 1544 in seiner *Arithmetica integra* davon, daß man sich Zahlen kleiner als null vorstellen könne und daß null zwischen den »wahren« Zahlen und den »absurden« Zahlen liege. Im Gegensatz zu STIFEL hat sein

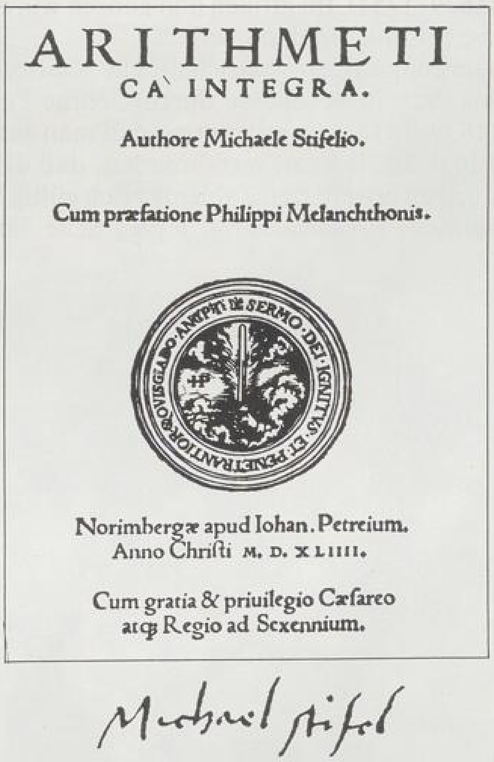

ARITHMETI
CA INTEGRA.
Authore Michaele Stifelio.
Cum præfatione Philippi Melanchthonis.
Norimbergæ apud Iohan. Petreium.
Anno Christi M. D. XLIIII.
Cum gratia & priuilegio Cæsareo
atq; Regio ad Sexennium.

Abb. 85.1 Titelblatt der *Arithmetica integra* – »Die ganze Arithmetik« – (1544) von Michael STIFEL (1487? Esslingen bis 19.4.1567 Jena) und dessen Unterschrift. Ein Bildnis ist nicht überliefert.

* gesprochen tschiu tschang suan schu

** Der erste Kaiser Chinas, SCHI HUANG-TI (= *erster erhabener Kaiser*, Regierungszeit 221–210 v. Chr.), ließ 213 v. Chr. alle Bücher verbrennen und viele konfuzianische Gelehrte lebendig begraben. LIU Hui berichtet, daß das Rechenbuch von CHANG Tsan († 152 v. Chr.) aus erhalten gebliebenen Resten neu zusammengestellt und von CHING Ch'ou-ch'ang (um 50 v. Chr.) erweitert wurde.

*** Um 1430 wird in einer auf provenzalisch geschriebenen Handschrift zum ersten Mal eine negative Zahl als Lösung ohne weitere Erklärung akzeptiert.

Zeitgenosse Geronimo CARDANO (1501–1576) keine Schwierigkeiten mit negativen Zahlen als Lösungen von Aufgaben, nennt sie aber »gedachte« Zahlen im Gegensatz zu den positiven, den »wahren« Zahlen. François VIÈTE (1540–1603), der Begründer der modernen Algebra, hingegen erkennt die negativen Zahlen nicht als Lösungen an. René DESCARTES (1596–1650) verwendet zwar positive und negative Ordinaten bei seinen graphischen Darstellungen, die Abszissen sind für ihn aber immer positiv. Negative Gleichungslösungen nennt er »falsche« Lösungen im Gegensatz zu den »wahren« positiven. Auch Buchstaben stellen bei ihm immer positive Zahlen dar. Der erste, bei dem ein Buchstabe – so wie bei uns jetzt üblich – sowohl eine positive wie auch eine negative Zahl vertreten konnte, war der Amsterdamer Bürgermeister und Mathematiker Jan HUDDE (1628(?)–1704), und zwar in seiner um 1655 verfaßten Schrift *De reductione aequationum.*
Selbst im 18. Jahrhundert gelang es noch nicht, eine befriedigende Erklärung der negativen Zahlen zu finden. Dies führte dazu, daß diese Zahlen von manchen Mathematikern nicht anerkannt wurden, zum Beispiel auch nicht durch Christian von WOLFF (1679–1754). Im großen und ganzen wurden sie aber allmählich gleichberechtigt neben die positiven Zahlen gestellt.
Die endgültige wissenschaftliche Klärung dieses Problems brachte erst das 19. Jahrhundert, insbesondere durch George PEACOCK (1791–1858) und Hermann HANKEL (1839–1873). Sie erkannten, daß man bei der Erweiterung eines Zahlenbereichs nach Möglichkeit so zu verfahren hat, daß die für die bisherigen Zahlen gültigen Gesetze auch im erweiterten Zahlenbereich gültig bleiben. PEACOCK nannte 1830 diesen Grundsatz das *Permanenzprinzip* (vgl. Seite 38).

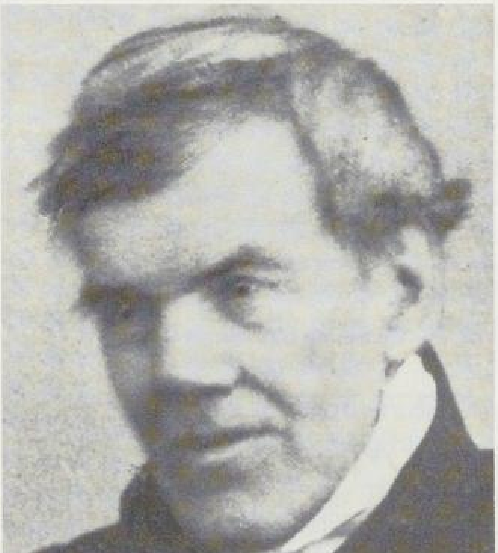
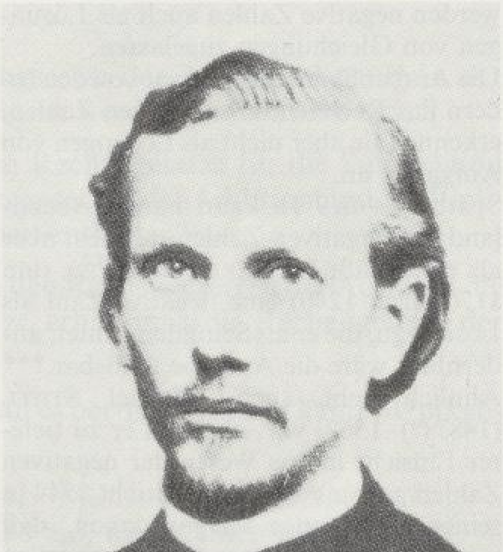


Abb. 86.1 George PEACOCK (1791 Thornton Hall/Denton – 1858 Ely (?))



30. 11. 1869

Hankel

Abb. 86.2 Hermann HANKEL (14.2.1839 Halle/Saale – 29.8.1873 Schramberg)