Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

2.1 Die Zahlenmenge B reicht nicht aus!

2 Die rationalen Zahlen und ihre Rechengesetze

2.1 Die Zahlenmenge $\mathbb{B}$ reicht nicht aus!

Die Menge $\mathbb{B}$ der Bruchzahlen hat, abgesehen von der grundsätzlich unmöglichen Division durch null, für das Rechnen einen wesentlichen Mangel: die Subtraktion zweier Zahlen aus $\mathbb{B}$ ist nicht immer ausführbar. Dieser Mangel ist nicht nur ein Schönheitsfehler innerhalb der mathematischen Theorie, er macht sich auch in der Praxis störend bemerkbar.

Beispiele:

1) An einem Dezembertag zeigt mittags das Thermometer die Temperatur 4 °C (= 4 Grad Celsius) an. Bis zum Abend nimmt sie um 3 Grad ab. Daraus können wir den neuen Thermometerstand berechnen: 4 Grad − 3 Grad = 1 Grad; die Abendtemperatur beträgt also 1 °C. Bis Mitternacht sinkt nun die Temperatur noch einmal um 4 Grad. Wie kann man jetzt die neue Temperaturanzeige ermitteln? Die Rechnung »1 Grad minus 4 Grad« ist ja nicht ausführbar! Bekanntlich hilft man sich hier so, daß man z. B. sagt, die Temperatur sei auf »3 Grad unter 0« gesunken oder die Temperatur sei »minus 3 Grad«, wofür man kurz »− 3 °C« schreibt (Abbildung 36.1).

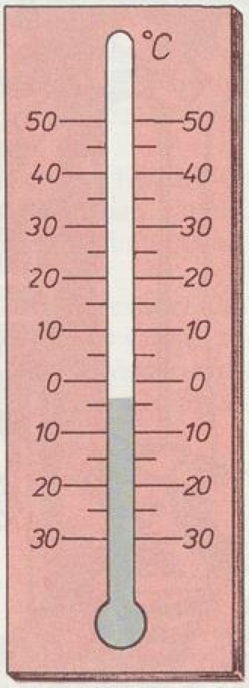

Abb. 36.1 Thermometer

2) Herr Knapp hat auf seinem Bankkonto 530,60 DM. Für dringende Anschaffungen benötigt er 700 DM, die er von seinem Konto abhebt. Auf seinem nächsten Kontoauszug dürfte Herr Knapp als Kontostand »− 169,40 DM« oder auch »169,40 DM Soll« lesen. Das bedeutet, daß er der Bank 169,40 DM schuldet (Abbildung 37.1).

3) In Ägypten liegt westlich von Kairo die Kattara-Senke, für die man im Atlas die Höhenangabe » − 134« findet. Damit wird bekanntlich ausgedrückt, daß der so gekennzeichnete Ort »134 m unter dem Meeresspiegel«, genauer: 134 m tiefer als der Nullpunkt der für solche Höhenangaben verwendeten Skala liegt.* (Abbildung 37.2)

* Dieser Nullpunkt, genannt Normalnull (NN), ist nach dem Amsterdamer Pegel festgelegt und gibt ungefähr die mittlere Meereshöhe an.

KONTONUMMER 1234567890	ALTER KONTOSTAND VOM 14.01.85	DM 530,60 HA
ABHEBUNG	AM 17.01.85	DM 700,00 SO
BUCHUNGSDATUM	NEUER KONTOSTAND 18.01.85	DM 169,40 SO

Abb. 37.1 Kontoauszug

Wie diese Beispiele zeigen, kommt es vor, daß man beim Rückwärtszählen den Nullpunkt einer Skala, also eines Zahlenstrahls, überschreiten muß. Man gelangt zu Ergebnissen »unter Null«, zu deren Beschreibung man Zahlen benützt, vor die ein Minuszeichen gesetzt wird.
Sicher wäre es auch aus mathematischer Sicht günstig, wenn es Zahlen »unter Null« gäbe, mit denen man z. B. Rechnungen wie »$1 - 4$« ausführen könnte. Das Rechnen würde sich sehr vereinfachen, wenn auch die Subtraktion immer ausführbar wäre. Man müßte dann beim Auftreten von Differenzen nicht jedesmal überlegen, ob sie definiert sind bzw., falls Variablen vorkommen, für welche Werte der Variablen das der Fall ist.
Eine ähnliche Situation gab es schon früher beim Rechnen mit den natürlichen Zahlen*. Dort war die *Division* nicht unbeschränkt ausführbar; man konnte z. B. 12 nicht in 5 gleiche Teile zerlegen. Diese Schwierigkeit ließ sich dadurch

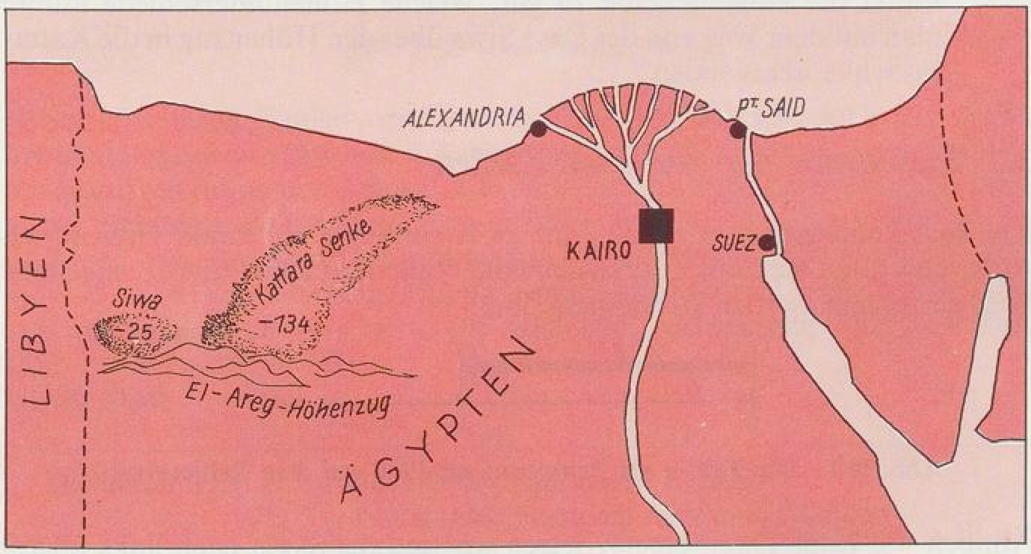

Abb. 37.2 Die Kattára-Senke in Ägypten

* Die Zahlen der Folge 1, 2, 3, … nannte bereits NIKOMACHOS von Gerasa (um 100 n. Chr.) φυσικὸς ἀριθμός (physikós arithmós), was BOETHIUS (um 480–524/525) mit *numerus naturalis* ins Lateinische übersetzte und das im Deutschen zu **natürliche Zahl** wurde.

beseitigen, daß man die Menge $\mathbb{N}_0$ durch Einführung der Brüche erweiterte. In dem größeren Zahlenbereich $\mathbb{B}$ ist die Division immer ausführbar, falls der Divisor von 0 verschieden ist; z. B. gilt $12 : 5 = 2\frac{2}{5}$.
Dieses Beispiel legt den Versuch nahe, die Menge $\mathbb{B}$ noch einmal durch neue Zahlen so zu erweitern, daß auch die Subtraktion immer ausführbar wird. Natürlich ist eine solche Erweiterung nur dann sinnvoll, wenn man im vergrößerten Zahlenbereich wieder »vernünftig« rechnen kann! Das soll heißen: In der erweiterten Zahlenmenge sollen die gleichen Rechengesetze wie bisher gelten. Diesen Grundsatz, von dem man sich in solchen Fällen stets leiten läßt, bezeichnet man als **Permanenzprinzip**, genauer »Prinzip der Permanenz der Rechengesetze*«. Ob sich dieses Anliegen verwirklichen läßt, ist natürlich nicht von vornherein sicher.

Aufgaben

1. Was zeigt ein Thermometer an, wenn die Temperatur von $-3\,°C$ aus
a) um 4 Grad sinkt, **b)** um 2,5 Grad steigt, **c)** um 11 Grad steigt?

2. Nachdem der Kontostand des Herrn Knapp auf $-169{,}40$ DM gesunken war, erhielt er vom Finanzamt eine Steuerrückzahlung von 340,00 DM. Welches Guthaben stand dann auf seinem nächsten Kontoauszug?

3. Westlich der Kattara-Senke mit der Höhenangabe -134 liegt die Oase Siwa, für deren tiefsten Punkt im Atlas die Angabe -25 zu finden ist.
a) Welche der beiden Senken liegt tiefer und wie groß ist der Unterschied?
b) Zwischen den beiden Senken liegt ein Höhenzug, für dessen höchsten Punkt die Höhenangabe 70 gilt. Welche Höhenunterschiede müßte man auf dem Weg von der Oase Siwa über den Höhenzug in die Kattara-Senke überwinden?

2.2 Einführung der negativen Zahlen

Auf dem Zahlenstrahl ist jeder Zahl $x \in \mathbb{B}$ eindeutig ein Punkt zugeordnet. Außerdem kann die Zahl x durch den vom Nullpunkt zum Punkt x zeigenden Pfeil dargestellt werden (Abbildung 38.1).

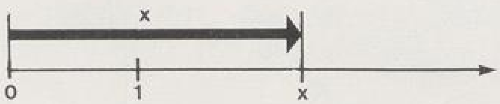

Abb. 38.1 Die Zahl x als Punkt und als Pfeil auf dem Zahlenstrahl

Ähnlich wie beim Thermometer setzen wir nun die Skala nach links über 0 hinaus fort. Indem wir eine, zwei, drei, … Längeneinheiten nach links abtra-

* permanere (lat.) = fortdauern, erhalten bleiben. Der Ausdruck *Permanenzprinzip* wurde von dem englischen Mathematiker und Professor der Astronomie George Peacock (1791–1858) in seinem 1830 erschienenen Werk *A treatise of algebra* geprägt. – Siehe Abbildung 86.1.