Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

2.2 Einführung der negativen Zahlen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83493

beseitigen, daß man die Menge $\mathbb{N}_0$ durch Einführung der Brüche erweiterte. In dem größeren Zahlenbereich $\mathbb{B}$ ist die Division immer ausführbar, falls der Divisor von 0 verschieden ist; z.B. gilt $12 : 5 = 2\frac{2}{5}$.
Dieses Beispiel legt den Versuch nahe, die Menge $\mathbb{B}$ noch einmal durch neue Zahlen so zu erweitern, daß auch die Subtraktion immer ausführbar wird. Natürlich ist eine solche Erweiterung nur dann sinnvoll, wenn man im vergrößerten Zahlenbereich wieder »vernünftig« rechnen kann! Das soll heißen: In der erweiterten Zahlenmenge sollen die gleichen Rechengesetze wie bisher gelten. Diesen Grundsatz, von dem man sich in solchen Fällen stets leiten läßt, bezeichnet man als **Permanenzprinzip**, genauer »Prinzip der Permanenz der Rechengesetze*«. Ob sich dieses Anliegen verwirklichen läßt, ist natürlich nicht von vornherein sicher.

Aufgaben

1. Was zeigt ein Thermometer an, wenn die Temperatur von $-3\,°C$ aus
a) um 4 Grad sinkt, **b)** um 2,5 Grad steigt, **c)** um 11 Grad steigt?

2. Nachdem der Kontostand des Herrn Knapp auf $-169{,}40$ DM gesunken war, erhielt er vom Finanzamt eine Steuerrückzahlung von 340,00 DM. Welches Guthaben stand dann auf seinem nächsten Kontoauszug?

3. Westlich der Kattara-Senke mit der Höhenangabe -134 liegt die Oase Siwa, für deren tiefsten Punkt im Atlas die Angabe -25 zu finden ist.
a) Welche der beiden Senken liegt tiefer und wie groß ist der Unterschied?
b) Zwischen den beiden Senken liegt ein Höhenzug, für dessen höchsten Punkt die Höhenangabe 70 gilt. Welche Höhenunterschiede müßte man auf dem Weg von der Oase Siwa über den Höhenzug in die Kattara-Senke überwinden?

2.2 Einführung der negativen Zahlen

Auf dem Zahlenstrahl ist jeder Zahl $x \in \mathbb{B}$ eindeutig ein Punkt zugeordnet. Außerdem kann die Zahl x durch den vom Nullpunkt zum Punkt x zeigenden Pfeil dargestellt werden (Abbildung 38.1).

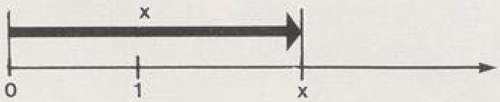

Abb. 38.1 Die Zahl x als Punkt und als Pfeil auf dem Zahlenstrahl

Ähnlich wie beim Thermometer setzen wir nun die Skala nach links über 0 hinaus fort. Indem wir eine, zwei, drei, ... Längeneinheiten nach links abtra-

* permanere (lat.) = fortdauern, erhalten bleiben. Der Ausdruck *Permanenzprinzip* wurde von dem englischen Mathematiker und Professor der Astronomie George Peacock (1791–1858) in seinem 1830 erschienenen Werk *A treatise of algebra* geprägt. – Siehe Abbildung 86.1.

gen, erhalten wir Punkte, die wir mit $-1, -2, -3, \ldots$ bezeichnen. Allgemein erhalten wir zu jeder Zahl $x > 0$, also $x \in \mathbb{B}$, den links von 0 liegenden Punkt $-x$, indem wir den zu x gehörigen Pfeil um den Nullpunkt nach links umklappen. Das heißt, wir zeichnen von 0 aus einen nach **links** gerichteten Pfeil der Länge x. Seine Spitze liefert einen Punkt, den wir mit $-x$ beschriften. Den Pfeil selbst bezeichnen wir ebenfalls mit $-x$ (Abbildung 39.1).

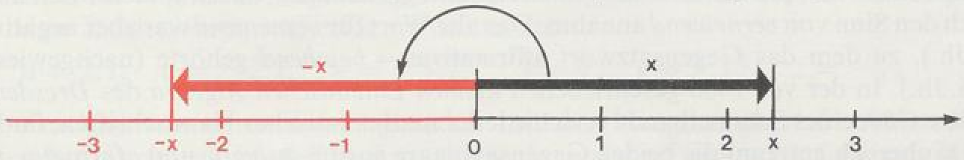

Abb. 39.1 Erweiterung des Zahlenstrahls

Natürlich wollen wir nun diese Punkte bzw. Pfeile $-1, -2, -3, \ldots$, allgemein $-x$, als Veranschaulichungen neuer Zahlen deuten! Diese ebenfalls mit $-1, -2, -3, \ldots, -x, \ldots$ bezeichneten Zahlen nennen wir **negative Zahlen**. In dieser Bezeichnung kommt zum Ausdruck, daß es sich bei ihnen um die »Gegenstücke« zu den schon bekannten positiven Zahlen, also den Zahlen der Menge $\mathbb{B} \setminus \{0\}$ ($= \mathbb{B}$ ohne die Zahl 0), handelt. Der erweiterte Zahlenstrahl heißt **Zahlengerade** (Abbildung 39.2).

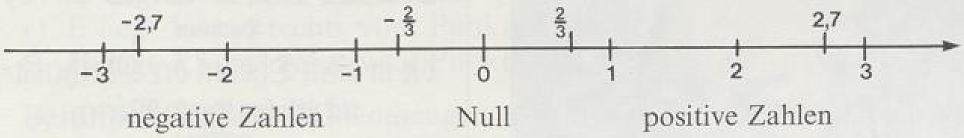

Abb. 39.2 Die Zahlengerade

Unser erweiterter Zahlenvorrat besteht nunmehr also aus den schon bisher bekannten positiven rationalen Zahlen und der Null sowie den neu eingeführten negativen rationalen Zahlen. Alle diese Zahlen zusammen bilden die **Menge der rationalen Zahlen***, die man mit $\mathbb{Q}$ bezeichnet. Für die Teilmenge der positiven bzw. der negativen rationalen Zahlen verwendet man die Bezeichnung $\mathbb{Q}^+$ bzw. $\mathbb{Q}^-$. Die bisher häufig benützte Zahlenmenge $\mathbb{B}$ (Brüche!) läßt sich nun in der Form $\mathbb{B} = \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ darstellen; man schreibt dafür auch kurz $\mathbb{Q}_0^+$.

Es gilt also:

Definition 39.1: $\mathbb{Q}$ = Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{Q}^+$ = Menge der positiven rationalen Zahlen
$\mathbb{Q}^-$ = Menge der negativen rationalen Zahlen
$\mathbb{Q}_0^+$ = Menge der nicht-negativen rationalen Zahlen

* *rationalis* bedeutet seit dem 2. Jh. *zu den Rechnungen gehörend* und hängt mit *ratio = Rechnung, Verhältnis, Vernunft* zusammen. Die mathematische Bedeutung können wir dir aber erst im Band *Algebra 3* erklären.

**Zur Geschichte der Fachwörter *positiv* und *negativ*

An der Entstehung des heutigen Gegensatzpaares *positiv–negativ* kann man sehr gut verfolgen, wie bei der Herausbildung einer Fachsprache die ursprüngliche Bedeutung der Wörter meist verlorengeht.
Das seit dem 4. Jh. belegte lateinische Wort **positivus** = *gesetzt, gegeben* hatte als Gegensatz das Wort **privativus** = *abgesondert, hinweggenommen*, das in späterer Zeit auch noch den Sinn von *verneinend* annahm. Das alte Wort für *verneinend* war aber **negativus** (2. Jh.), zu dem das Gegensatzwort **affirmativus** = *bejahend* gehörte (nachgewiesen 5./6. Jh.). In der vor 1486 geschriebenen *kleinen Lateinischen Algebra* des *Dresdener Codex C80*, eines Sammelbands verschiedener mathematischer Handschriften, finden wir säuberlich getrennt die beiden Gegensatzpaare *positiv–privativ* und *affirmativ–negativ*. Bald jedoch werden diese Paare vermischt, und das Wort *privativ* verschwindet immer mehr und wird durch *negativ* ersetzt. So verwendet François Viète (1540–1603) den Gegensatz *affirmativus–negatus* (1591). Der deutsche Philosoph und Mathematiker Christian von Wolff (1679–1754) verfaßt 1716 ein *Mathematisches Lexicon*, in dem das Gegensatzpaar *positiv–negativ* zu Fachwörtern wird. Und dabei ist es dann geblieben!

Abb. 40.1 Christian, Freiherr von (seit 1745) Wolff, auch Wolf, (24.1.1679 Breslau – 9.4.1754 Halle/Saale)


Mathematisches
LEXICON,
Darinnen
die in allen Theilen der Mathematick üblichen Kunst-Wörter
erkläret,
und
Zur Historie
der
Mathematischen Wissenschafften
dienliche Nachrichten ertheilet,
Auch die Schrifften,
wo iede Materie ausgeführet zu finden,
angeführet werden:
Auff Begehren heraus gegeben
von
Christian Wolffen,
K. P. H. und P. P. O.
Leipzig,
Bey Joh. Friedrich Gleditschens seel. Sohn.
1716.

Abb. 40.2 Titelblatt der 1. Auflage

Aufgaben

1. Trage auf einer Zahlengeraden mit der Längeneinheit 1 cm die zu folgenden Zahlen gehörenden Punkte ein:
a) 4,6 **b)** -4 **c)** 0 **d)** $-1{,}5$ **e)** 2,2 **f)** $-3\frac{1}{2}$

2. Gib auf einer Zahlengeraden mit der Längeneinheit 2 cm die den folgenden Zahlen entsprechenden Punkte an:
$u = 2{,}1$; $v = -2{,}1$; $w = -1{,}25$; $x = \frac{3}{4}$; $y = -1\frac{2}{5}$; $z = -\frac{7}{10}$.

3. Zeichne von einer Zahlengeraden mit der Längeneinheit 6 cm den Abschnitt von -1 bis 0,5 und markiere darauf die Punkte für folgende Zahlen:
a) $x_1 = \frac{1}{3}$ **b)** $x_2 = -\frac{2}{3}$ **c)** $x_3 = -\frac{5}{6}$ **d)** $x_4 = \frac{5}{12}$ **e)** $x_5 = -\frac{1}{12}$
f) $y_1 = 0{,}2$ **g)** $y_2 = -0{,}3$ **h)** $y_3 = -0{,}90$ **i)** $y_4 = -0{,}05$

4. Zeichne für eine Zahlengerade mit der Längeneinheit 1 cm den Abschnitt von -5 bis 5. Trage darauf folgende Punkte ein und gib die zugehörigen rationalen Zahlen an:
a) A liegt 3,5 cm links vom Punkt 2.
b) B liegt 2,8 cm rechts vom Punkt -5.
c) C liegt $2\frac{3}{4}$ cm links vom Punkt 0.
d) D liegt 3 cm links vom Punkt $\frac{17}{5}$.
e) E liegt 1,4 cm rechts vom Punkt $-1\frac{4}{5}$.
f) F liegt 4,5 cm rechts vom Punkt $-4\frac{1}{2}$.

5. Bestimme folgende Zahlenmengen. (Beschreibe die sich ergebenden Mengen zuerst in Worten und dann mit Mengensymbolen.)
a) $\mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{Q}^-$ **b)** $\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-$ **c)** $\mathbb{Q} \cap \mathbb{N}$ **d)** $\mathbb{Q}^+ \cap \mathbb{N}_0$
e) $\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{N}_0$ **f)** $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}^-$ **g)** $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}^+$ **h)** $\mathbb{Q} \setminus (\mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^-)$

2.3 Zahl und Gegenzahl, absoluter Betrag

Jede Zahl $a \in \mathbb{Q}$ läßt sich auf der Zahlengeraden durch den von 0 zum Punkt a zeigenden Pfeil darstellen. Zu dem gleich langen, aber entgegengesetzt gerichteten Pfeil gehört wieder eine rationale Zahl, die wir die Gegenzahl von a nennen und mit $-a$ bezeichnen.

> **Definition 41.1:** Zwei Zahlen, zu denen auf der Zahlengeraden gleich lange, aber entgegengesetzt gerichtete Pfeile gehören, heißen (ein Paar von) **Gegenzahlen**.
> Die Gegenzahl von a wird mit $-a$ bezeichnet.