Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

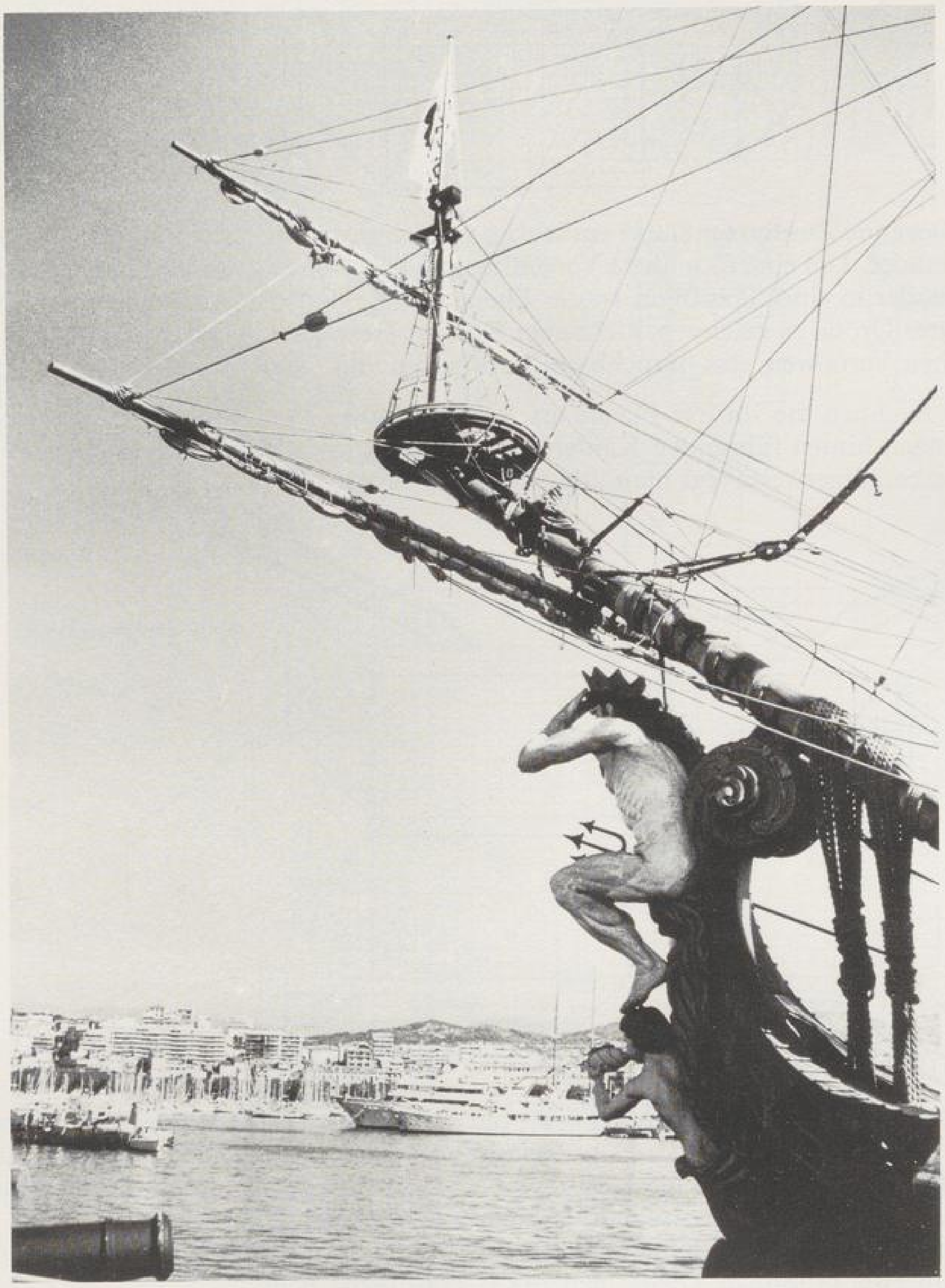
München, 2000

6. Kapitel: Geraden und Ebenen im Raum

urn:nbn:de:hbz:466:1-83477

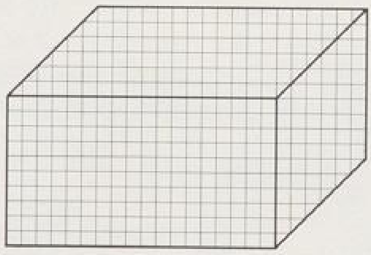
6. Kapitel

Geraden und Ebenen im Raum



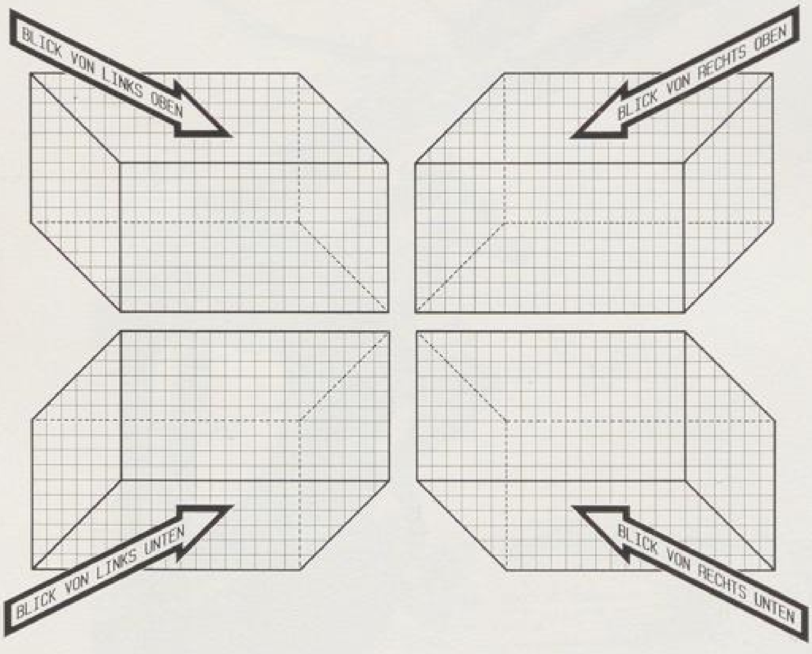
Bisher haben wir Planimetrie getrieben, das heißt, wir haben uns mit Figuren in der Ebene beschäftigt. Jetzt gehen wir hinaus in den Raum und untersuchen dort Figuren und Körper, das heißt, wir treiben **Raumgeometrie** (Stereometrie).

QUADER IM SCHRÄGBILD



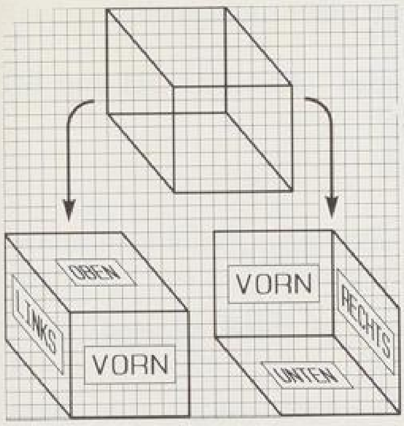
Grundlegende Zusammenhänge entdecken wir schon an einem so einfachen Körper wie dem Quader. Um eine räumliche Vorstellung zu bekommen, veranschaulichen wir auch den Quader in einer Planfigur. In der Ebene (Tafel, Heft) ist es zwar möglich, Figuren in wahrer Größe zu zeichnen, nicht aber Körper. Deswegen behelfen wir uns mit einem einfachen Verfahren, das brauchbare Planfiguren von Quadern liefert:

> Wir zeichnen die vordere Fläche als Rechteck und
> die nach hinten führenden Kanten parallel und gleich lang.
> Zweckmäßigerweise legt man alle Ecken auf Gitterpunkte.

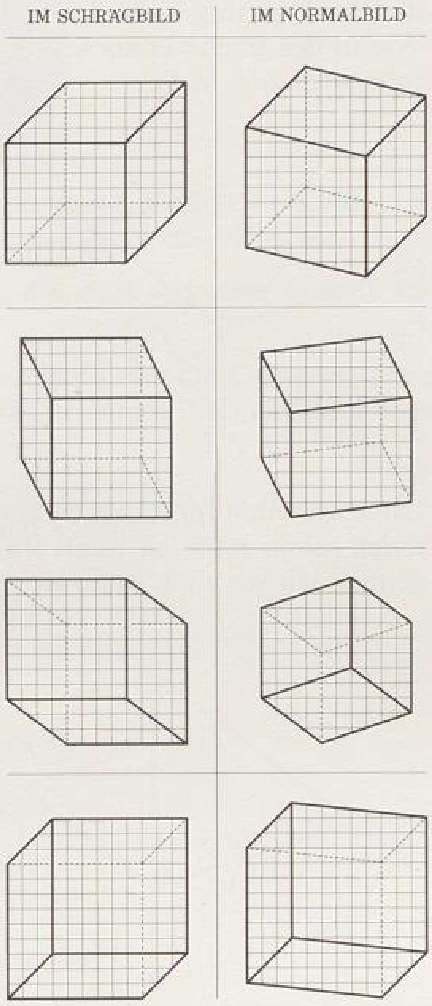


Eine solche Planfigur heißt **Schrägbild** des Quaders. Sie wirkt noch räumlicher, wenn man die unsichtbaren (verdeckten) Kanten strichelt oder dünner zeichnet.
Zeichnet man alle zwölf Kanten gleich dick und als durchgehende Linien, dann lässt das Bild zwei räumliche Deutungen zu.
Beim Schrägbild eines Würfels ist die Vorderfläche ein Quadrat. Zu lange nach hinten führende Kanten geben ein schiefes Bild vom Würfel. In Wirklichkeit sieht man Quader und Würfel nicht so wie im Schrägbild. Im **Normalbild** dagegen wirken Körper viel

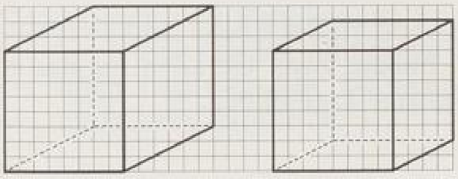
natürlicher. Normalbilder sind aber etwas schwieriger zu zeichnen als Schrägbilder – wie man sie zeichnet, erfahren wir später.



VERSCHIEDENE WÜRFEL

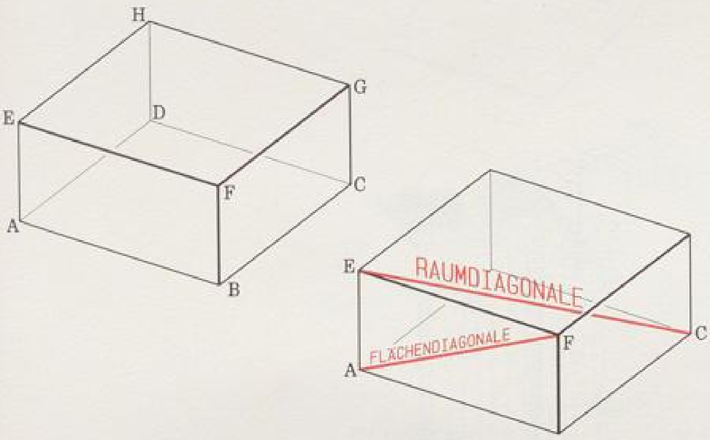


WÜRFEL IM SCHRÄGBILD



NICHT SO SONDERN SO !

übliche Bezeichnungen beim Quader

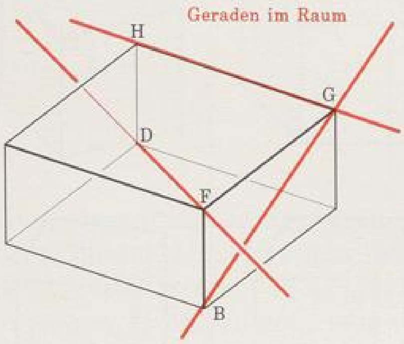


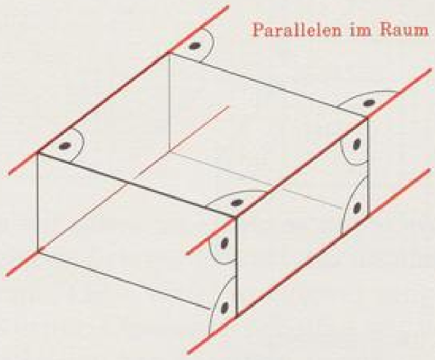
Die einfachsten Punktemengen im Raum sind Geraden und Ebenen. Ihre grundlegenden Eigenschaften überlegen wir uns am Quader.

Übliche Bezeichnungen: Die Seiten der Quaderflächen heißen **Kanten,** zum Beispiel [AB], [HD], …
Die Diagonalen der Quaderflächen heißen **Flächendiagonalen,** zum Beispiel [AF], [ED], …
Die Verbindungsstrecken zweier Ecken, die durchs Innere des Quaders gehen, heißen **Raumdiagonalen,** zum Beispiel [EC], [DF], …

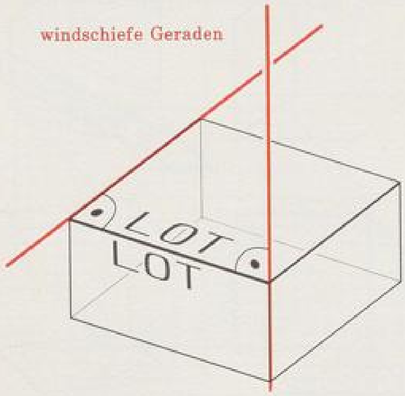
Gerade–Gerade

Auch im Raum ist eine Gerade durch zwei Punkte festgelegt. So ist zum Beispiel GH die Verlängerung einer Kante, BG die Verlängerung einer Flächendiagonale und DF die Verlängerung einer Raumdiagonale.
Wie in der Ebene können sich auch im Raum zwei Geraden schneiden: GH und BG schneiden sich in G.

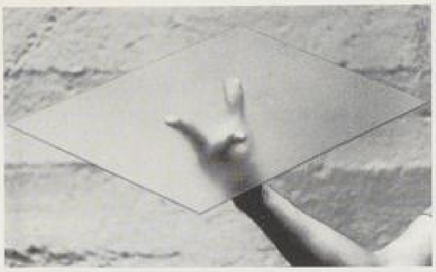




Die Parallelität im Raum ist komplizierter als in der Ebene. In der Ebene sind zwei Geraden schon parallel, wenn sie **ein** gemeinsames Lot haben. Zwei Geraden im Raum nennen wir parallel, wenn sie mindestens **zwei** gemeinsame Lote haben.



Im Gegensatz zur Ebene gibt es im Raum auch noch Geraden, die sich weder schneiden noch parallel sind. Solche Geraden heißen **windschief.** Das Bild zeigt zwei windschiefe Geraden und ihr gemeinsames Lot. Am Bild wird uns auch klar, warum wir im Raum mindestens zwei gemeinsame Lote brauchen, um zwei Geraden als Parallelen festzulegen.



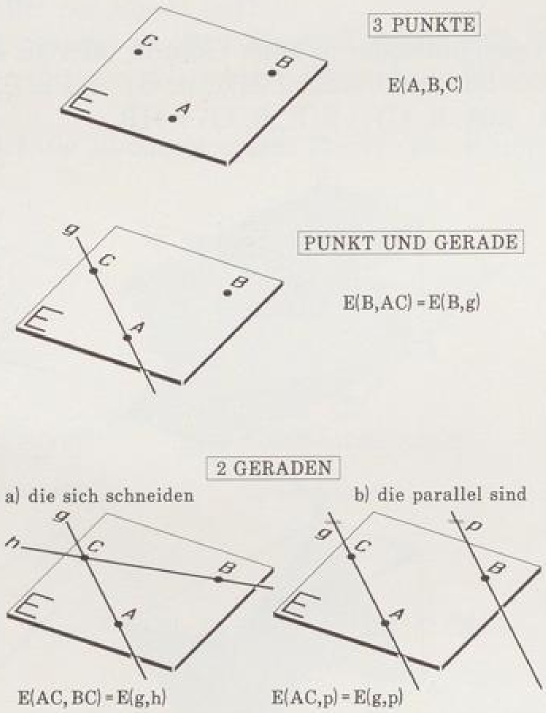
Wenn man eine Glasscheibe in drei Punkten unterstützt, dann wackelt sie nicht, sondern liegt fest auf. Fassen wir eine Glasscheibe als Ebene auf, so erkennen wir:

Eine Ebene im Raum ist durch drei Punkte festgelegt, die nicht auf einer Gerade liegen.

Wenn aber die drei Punkte auf einer Gerade liegen, dann kann sich die Ebene um diese Gerade drehen – genauso wie eine Tür, die an drei Nägeln hängt. Eine solche Ebene liegt nicht eindeutig fest.

Statt durch drei Punkte kann man eine Ebene auch anders festlegen:
- durch eine Gerade und einen Punkt, der nicht auf der Gerade liegt,
- durch zwei Geraden, die sich schneiden,
- durch zwei Parallelen.

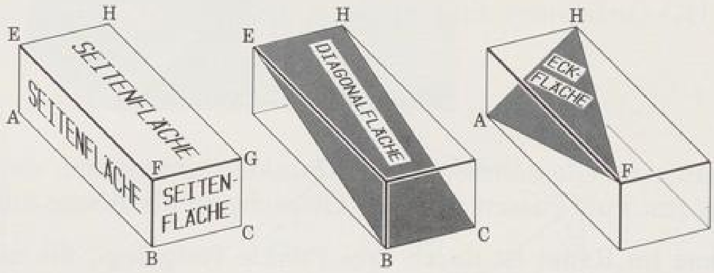
BESTIMMUNGSSTÜCKE EINER EBENE



In jedem dieser drei Fälle erkennen wir wieder drei Punkte, die die Ebene bestimmen.

Die Bestimmungsstücke einer Ebene finden sich auch in der symbolischen Schreibweise, zum Beispiel E(A, B, C) oder E(B, g) oder E(g, h). Wenn klar ist, welche Ebene gemeint ist, dann genügt ein lateinischer Großbuchstabe, zum Beispiel Ebene E oder Ebene F oder … Wir zeigen das an einigen besonderen Flächen.

FLÄCHEN BEIM QUADER



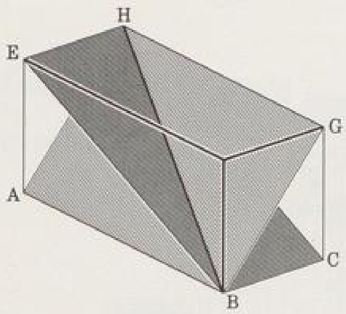
Der Quader hat:

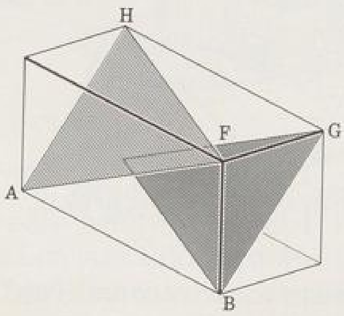
- 6 Seitenflächen (jede enthält 4 Kanten) zum Beispiel
  E(B, C, F) = E(B, C, G) = E(BC, G) = E(BC, CG) = E(BC, GF)
- 6 Diagonalflächen (jede enthält 2 Raumdiagonalen) zum Beispiel
  E(B, C, H) = E(BC, EH) = E(BE, CH) = E(BH, CE)
- 8 Eckflächen (jede enthält 3 Flächendiagonalen)
  zum Beispiel E(B, G, E)

Alle Seitenflächen bilden zusammen die Oberfläche des Quaders. Die Seitenfläche, auf der der Quader steht, heißt auch Grundfläche – ihr gegenüber liegt die Deckfläche.

Ebene–Ebene

Zwei Ebenen schneiden sich entweder in einer Gerade, oder sie sind parallel. So schneiden sich beim Quader die Diagonalflächen E(A, B, G) und E(E, B, C) in der Raumdiagonale HB, symbolisch: E(A, B, G) ∩ E(E, B, G) = HB.

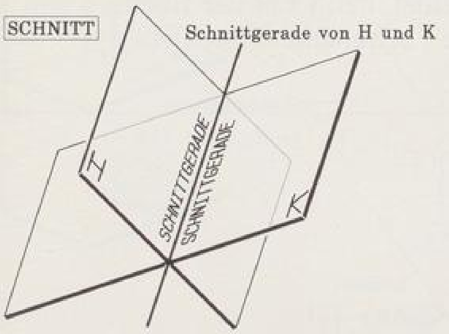




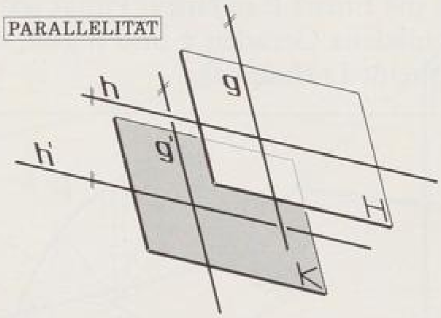
Die Parallelität zweier Ebenen H und K erkennt man zum Beispiel daran, dass es zu einer Geradenkreuzung (g, h) in H eine Geradenkreuzung (g′, h′) in K gibt, sodass g′ parallel zu g und h′ parallel zu h ist. Die Eckflächen E(A, F, H) und E(B, G, D) sind parallel, weil BG parallel AH und BD parallel FH ist.

LAGE VON EBENEN

SCHNITT



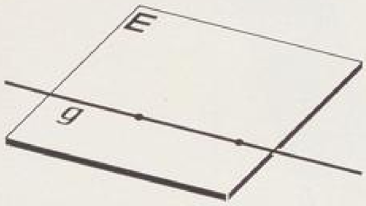
PARALLELITÄT



Gerade–Ebene

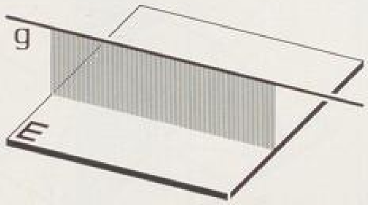
Zwischen Gerade und Ebene gibt es drei Lagebeziehungen:

- Die Gerade liegt in der Ebene ($g \subset E$).
  Eine Gerade liegt schon dann ganz in einer Ebene, wenn sie wenigstens zwei Punkte mit ihr gemeinsam hat.
- Die Gerade ist parallel zur Ebene ($g \parallel E$).
  Eine Gerade g heißt parallel zu einer Ebene E, wenn es in E eine Gerade f gibt, die parallel ist zu g. Eine Gerade, die in einer Ebene liegt, ist damit auch parallel zu dieser Ebene.
- Die Gerade schneidet die Ebene in einem Punkt ($g \cap E = \{S\}$).



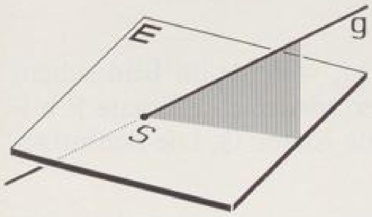
MEHR ALS EIN GEMEINSAMER PUNKT

Drinliegen: $g \subset E$ und Parallelität: $g \parallel E$



KEIN GEMEINSAMER PUNKT

Parallelität: $g \parallel E$



GENAU EIN GEMEINSAMER PUNKT

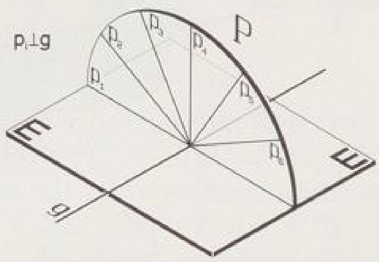
Schnitt: $g \cap E = \{S\}$

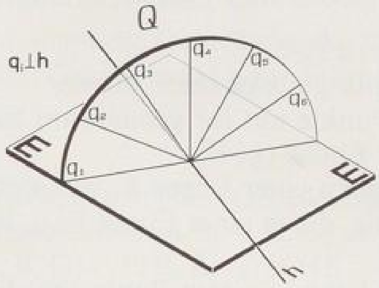
LAGE VON GERADE UND EBENE

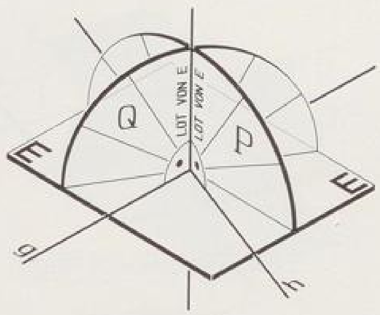
Beim Schnitt von Gerade und Ebene gibt es einen wichtigen Sonderfall:
Die Gerade steht senkrecht auf der Ebene, das heißt, sie ist ein Lot der Ebene.
Wann ist eine Gerade Lot einer Ebene?

Definition

> Eine Gerade l, die die Ebene E in einem Punkt schneidet, heißt **Lot** der Ebene, wenn es in E zwei verschiedene Geraden g und h gibt, die l senkrecht schneidet.
> Der Schnittpunkt heißt **Lotfußpunkt.**





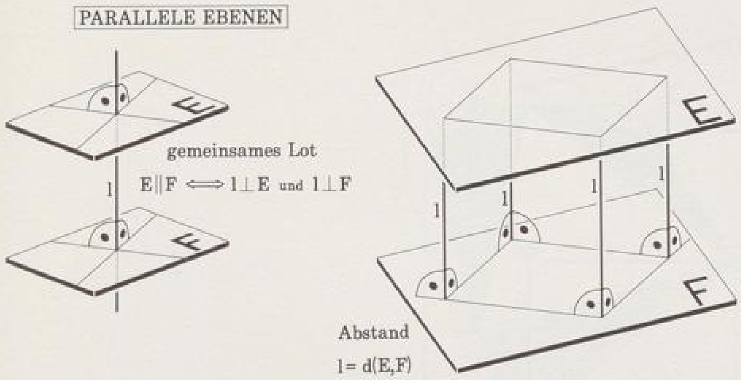


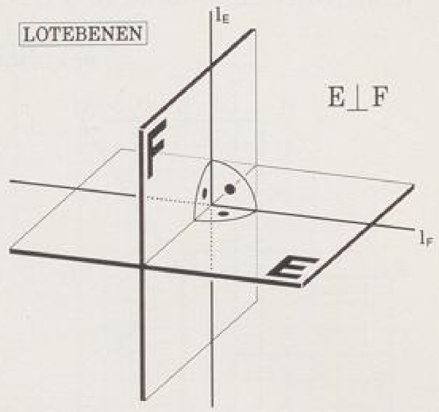
Ist l ein Lot der Ebene E, dann schreiben wir: $l \perp E$.

Die Gerade g allein reicht zur Definition des Lots noch nicht, wie wir im Bild sehen. Denn zur Gerade g gibt es unendlich viele Lote p_i, die selber wieder eine Ebene P bilden. Die Lote q_i der zweiten Gerade h bilden auch wieder eine Ebene Q. Die Schnittgerade der beiden Ebenen P und Q ist Lot l der Ebene E.

Man kann zeigen: Ein solches Lot steht sogar auf allen Geraden senkrecht, die in der Ebene liegen und durch den Lotfußpunkt gehen.
Jede Parallele zu einem Lot ist auch wieder ein Lot.

Zwei Ebenen sind genau dann parallel, wenn sie ein gemeinsames Lot haben. Die Lotstrecken sind alle gleich lang, ihre Länge heißt **Abstand** der beiden Ebenen.
Enthält eine Ebene F ein Lot l_E einer anderen Ebene E, dann heißt F **Lotebene** von E. E ist dann auch Lotebene von F, weil sie das Lot l_F enthält.

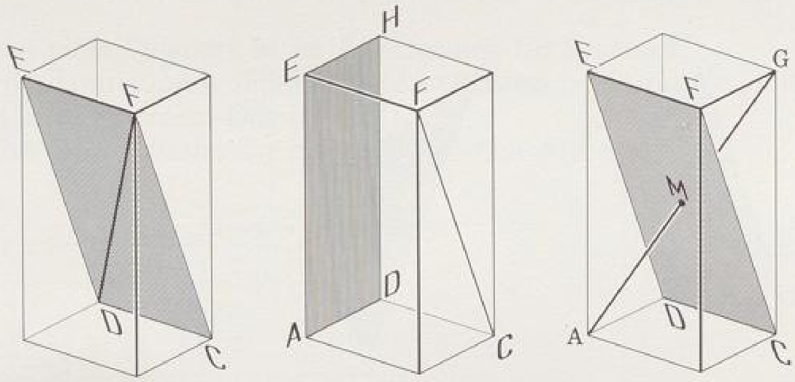


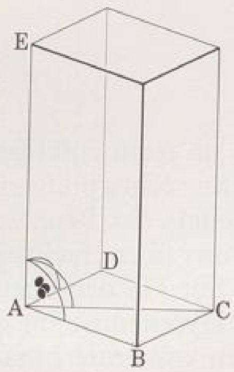


Beispiele für die möglichen Lagen von Gerade und Ebene finden wir wieder am Quader:

- die Raumdiagonale [DF] liegt in der Diagonalfläche E(F, E, D),
- die Flächendiagonale [CF] ist parallel zur Seitenfläche E(A, D, H),
- die Raumdiagonale [AG] schneidet die Diagonalfläche E(F, E, D) im Mittelpunkt M des Quaders.

Die Kante [AE] ist ein Lot der Seitenfläche E(A, B, C), weil sie auf AB und AD senkrecht steht. Sie steht deshalb auch senkrecht auf der Flächendiagonale [AC].



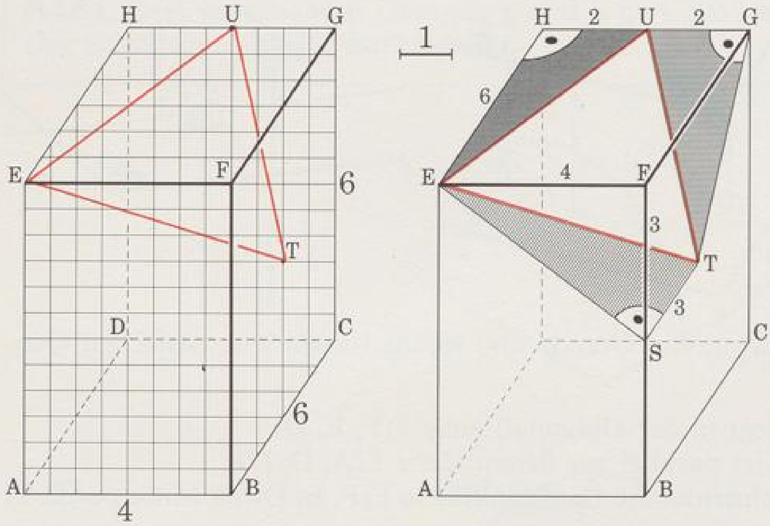


Wir verwenden diese Lagebeziehungen, um Strecken oder Winkel in einem Körper in wahrer Größe zu konstruieren – dazu jetzt ein Beispiel:

Im Quader ABCDEFGH ist $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 6$ und $\overline{CG} = 6$.

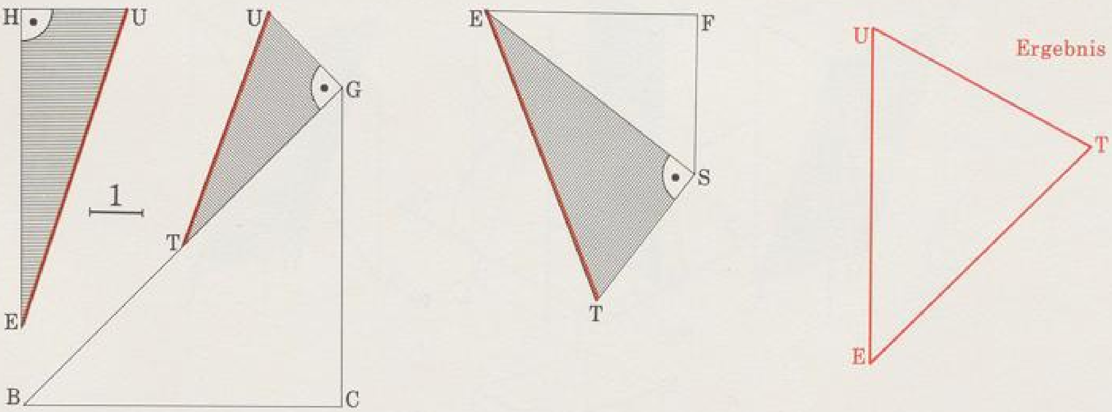
T ist Mittelpunkt der Seitenfläche BCGF und U ist der Mittelpunkt der Kante [HG]. Konstruiere das Dreieck TUE in wahrer Größe.

PLANFIGUREN



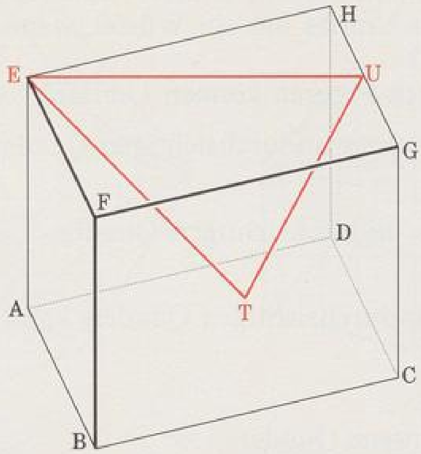
Zur Konstruktion eines Dreiecks braucht man drei Bestimmungsstücke. Wir beschaffen sie uns durch Überlegen oder durch Hilfskonstruktionen.

In einer Planfigur tragen wir die gegebenen Punkte und Längen ein.



Lösungsidee: [EU] ist Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck HEU.
[UT] ist Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck GUT, in dem die Kathete [GT] die halbe Diagonale des Rechtecks BCFG ist.
[ET] beschaffen wir uns übers rechtwinklige Dreieck EST.
(ST ist parallel zum Lot FG der Ebene E(A, B, E)!)
Die Kathete [ES] ist Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck FES.
Mit diesen drei Seiten konstruiert man das Dreieck TUE.

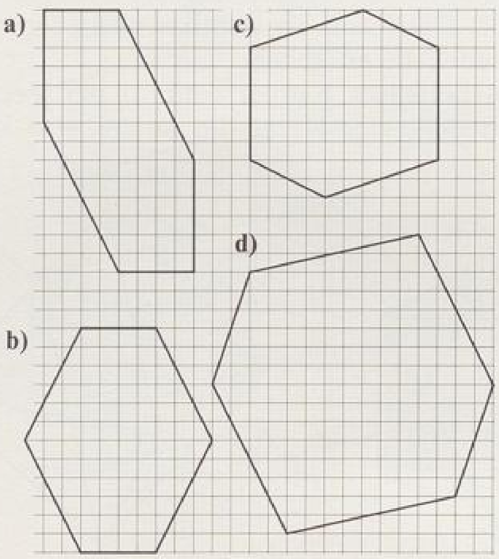
Ergebnis in wahrer Größe mit Umgebung



Auch im Quader sehen wir das Dreieck TUE in wahrer Größe, wenn wir den Quader so drehen, dass unser Blick senkrecht aufs Dreieck TUE fällt, das heißt, dass der Sehstrahl ein Lot der Ebene ist, in der das Dreieck TUE liegt.

Aufgaben

1. UMRISSE
   Der Umriss eines Quaders ist im Allgemeinen ein Sechseck.
   Ergänze die Umrisse mit sichtbaren (durchgezogenen) und unsichtbaren (gestrichelten) Linien zu einem Quaderbild.
   Zeichne für jeden Umriss die beiden möglichen Ansichten.



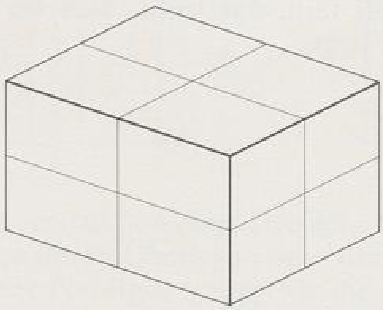
2. Der Umriss eines Quaders ist im Allgemeinen ein Sechseck.
   a) Welche Besonderheit(en) hat das Umriss-Sechseck eines Quaders?
   b) Welchen besonderen Umriss hat ein Würfel, wenn sich beim Betrachten zwei Gegenecken decken?
   c) Welche geometrischen Figuren können Umrisse von Quadern sein?

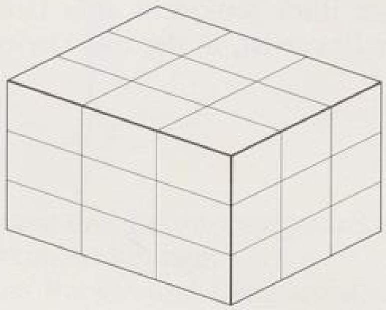
3. Wie viele Seitenflächen eines undurchsichtigen Quaders kann man je nach Blickrichtung sehen?

4. Wie viele Kanten eines undurchsichtigen Quaders kann man je nach Blickrichtung sehen?

5. Wie viele Ecken eines undurchsichtigen Quaders kann man je nach Blickrichtung sehen?

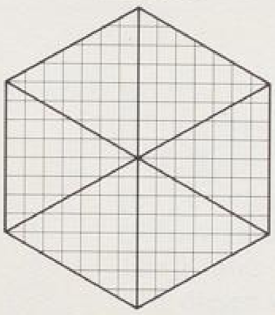
•6. QUADERSCHNITTE
Das Bild zeigt zerschnittene Quader.
   a) Wie viel Schnitte sind es jeweils?
   b) Wie viel kongruente Teilquader entstehen?



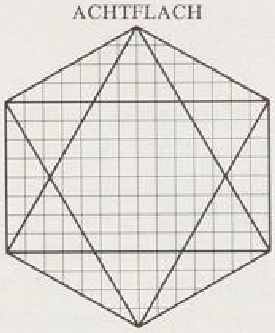


• 7. ANSICHTSACHE(N)
Zeichne eine Figur ab (dünner Strich!). Hebe dann die sichtbaren Kanten hervor (dicker Strich, Farbe!), sodass eine Ansicht des Körpers entsteht. Es gibt jeweils zwei Ansichten, je nachdem wie man die Figur räumlich deutet.
Anleitung: Fang an mit dem Umriss, denn der ist immer sichtbar. Geh von einer Umrissecke auf einer Kante nach innen: Die Kante ist sichtbar und ebenso alle weiteren Kanten, die von einer sichtbaren Ecke ausgehen.
Schneiden sich zwei sichtbare Kanten konkaver Körper (nur in der Zeichenebene!), dann verdeckt bei dieser Schnittstelle eine Kante die andere, eine Kante wird dort also unsichtbar.

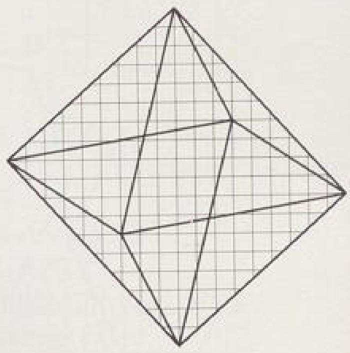
SECHSFLACH



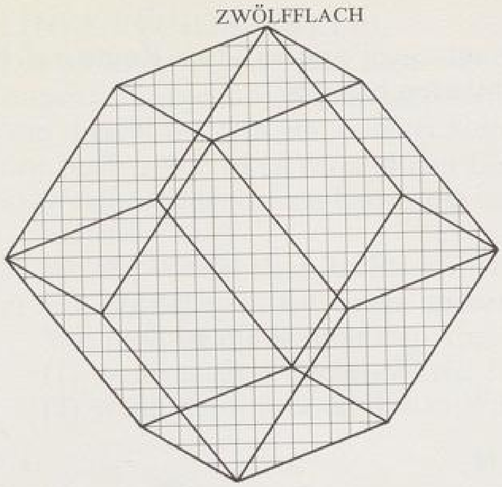
ACHTFLACH



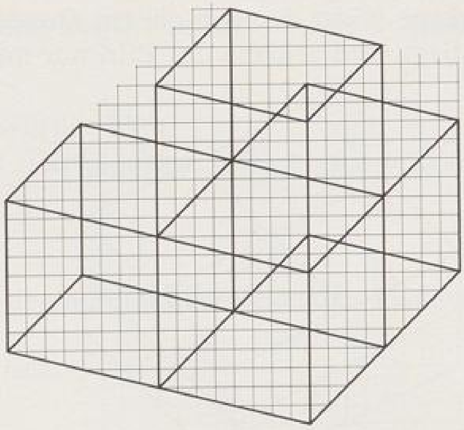
OKTAEDER



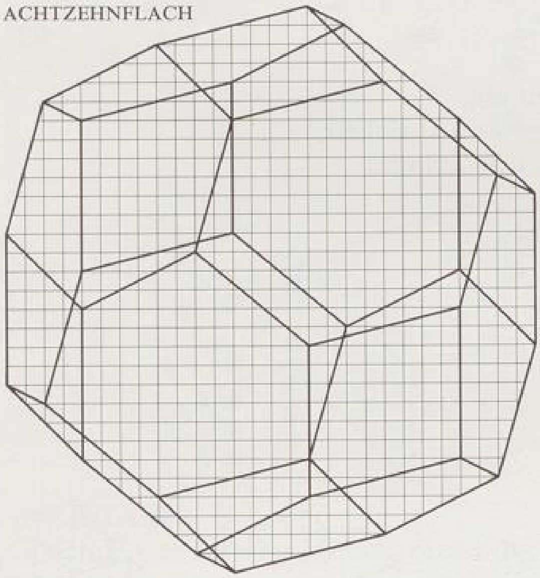
ZWÖLFFLACH



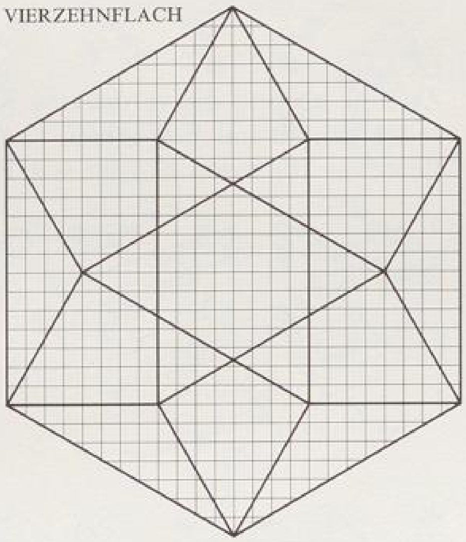
a) DREIBEIN



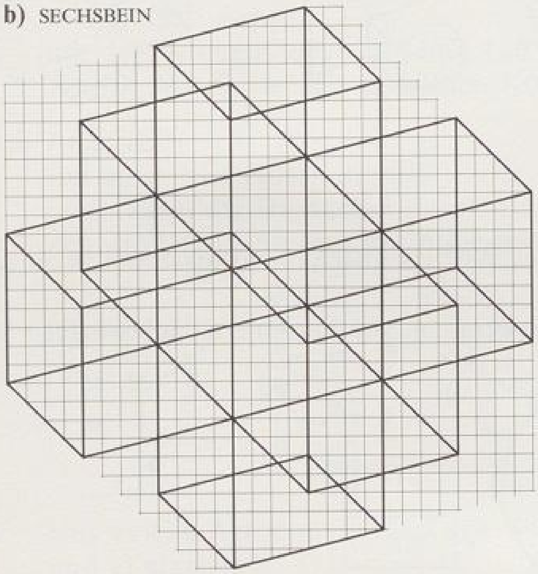
ACHTZEHNFLACH



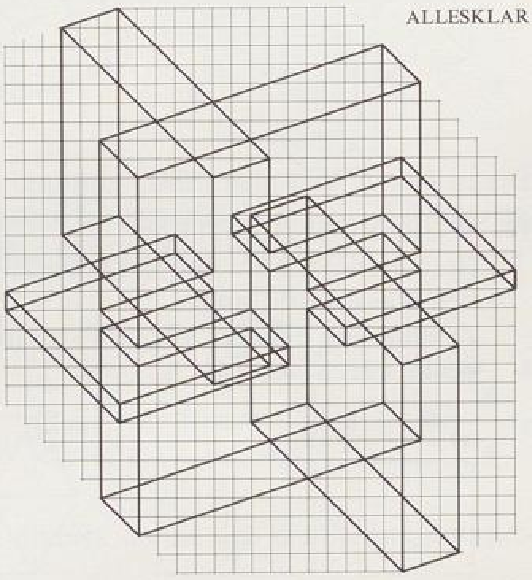
VIERZEHNFLACH



b) SECHSBEIN

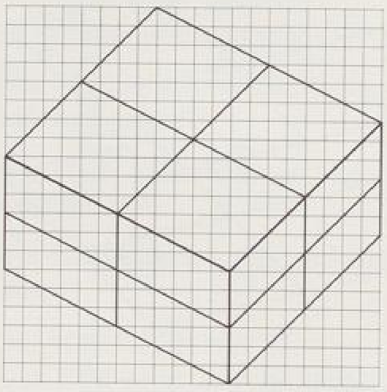


ALLESKLAR



8. UMBAU

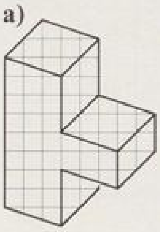
Lege einen der vier oberen Quader so auf einen andern, dass Kante auf Kante liegt, und zeichne das Bild nur mit sichtbaren Kanten.



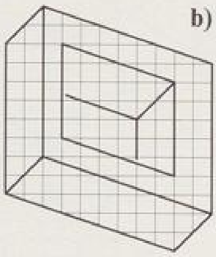
9. EULER

Zeichne ab und die verdeckten Kanten ein.
Jeder Körper hat F Flächen, K Kanten und E Ecken.
Berechne für jeden Körper E + F − K und staune!

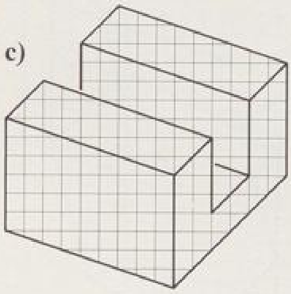
a)



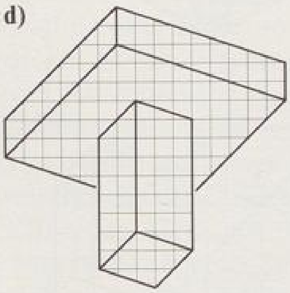
b)



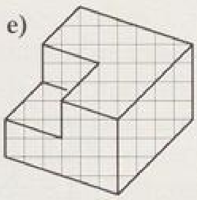
c)



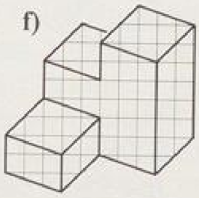
d)



e)



f)

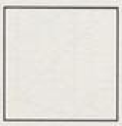


g)

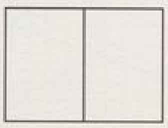
:10. WÜRFELANSICHTEN

Beschreibe, wie du das Drahtmodell eines Würfels anschauen musst, um es zu sehen wie im Bild links.
Zeichne die Figuren ab und strichle die Kanten, die bei einem Holzwürfel verdeckt wären.

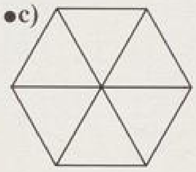
a)



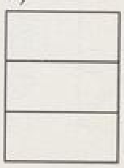
b)



●c)



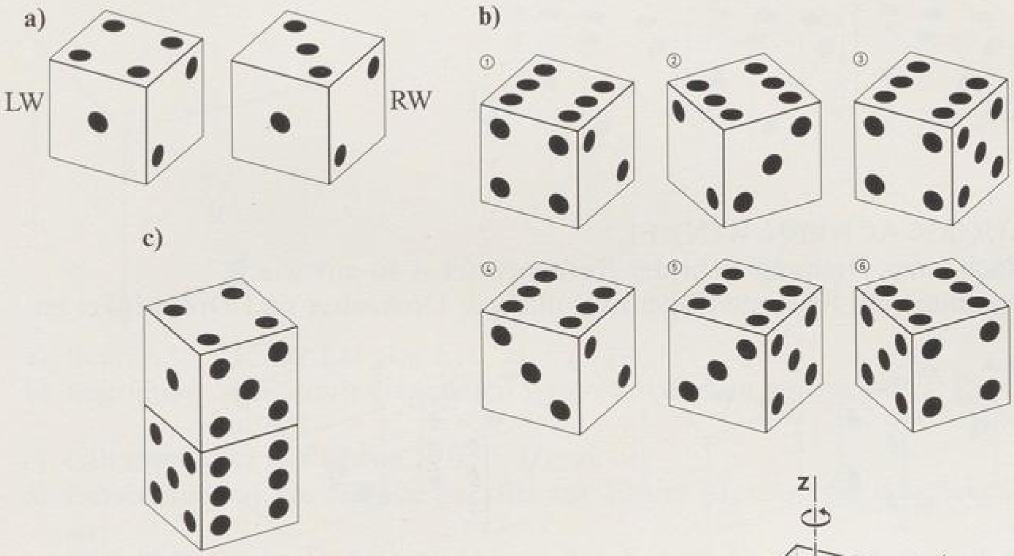
d)



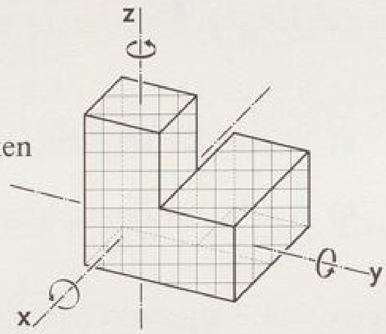
11. LINKS-RECHTS-WÜRFEL

Die üblichen Würfel sind nach der Siebener-Regel beschriftet: Die Summe der Augen auf gegenüberliegenden Seiten ist 7.
Von diesen Würfeln gibt es zwei Sorten:
den Rechts-Würfel (RW) und den Links-Würfel (LW).

a) Welche Augenzahlen haben die beiden Würfel unten, links hinten und rechts hinten?
b) Welche Würfel sind Rechts-Würfel?
c) Ein Würfel steht auf einem andern.
Wie groß ist die Summe der Augen in den aufeinander liegenden Flächen,
(1) wenn es zwei Rechts-Würfel sind?
(2) wenn der untere ein Links-Würfel ist?



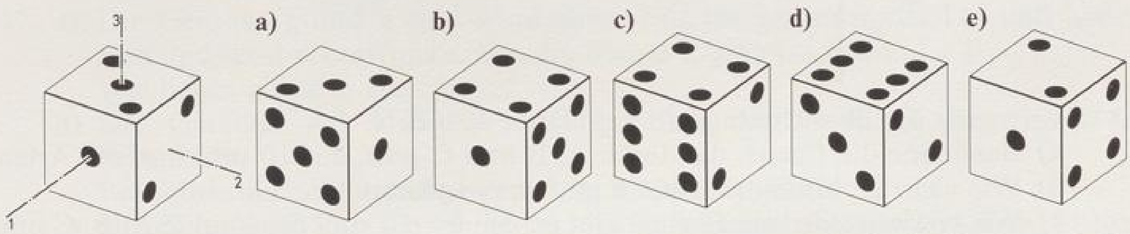
12. DREHAXN



Zeichne den Körper ab und drehe ihn in Gedanken
a) um die x-Achse **b)** um die y-Achse
c) um die z-Achse
mit den Winkeln 90°, −90° und 180°.
Zeichne die Bilder des gedrehten Körpers.

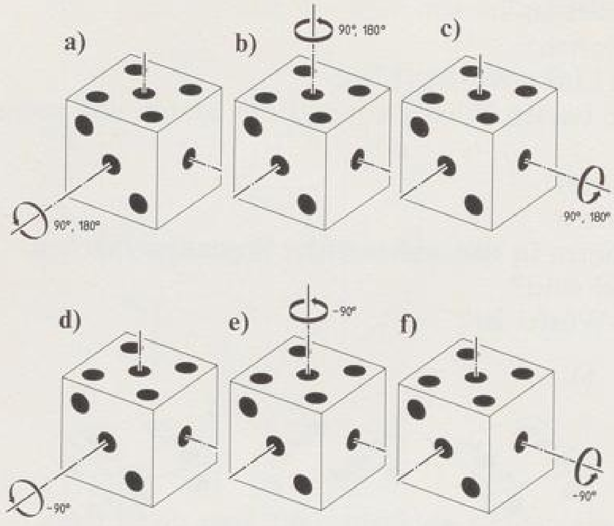
13. ACHSE?

Bei einer Vierteldrehung (90°) oder Halbdrehung (180°) geht ein Würfel in sich über, wenn die Drehachse durch die Mitten von Gegenflächen geht. Wir bezeichnen die Drehachse mit der Augenzahl einer durchstoßenen Fläche.

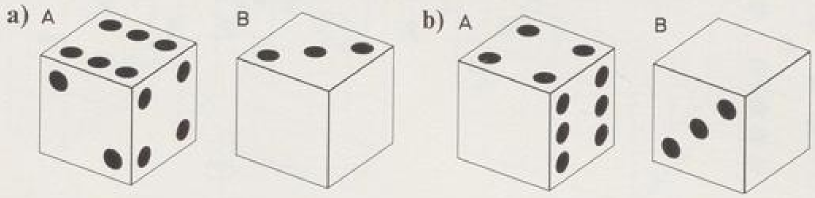


Um welche Achse muss man den Würfel drehen, damit sich die Stellungen **a)**, **b)** und **c)** ergeben?

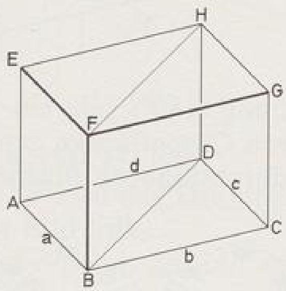
14. AUGEN?
Zeichne den Würfel, nachdem er sich gedreht hat.



15. AUGEN-ACHSEN-WINKEL?
Nach einer Drehung sieht der Rechtswürfel A so aus wie B.
Bestimme die fehlende Augenzahl und gib Drehachse und Drehwinkel an.



16. LAGEN
a) Welche der eingezeichneten Geraden sind parallel zu BC bzw. windschief zu BC?
b) Welche der eingezeichneten Geraden sind parallel zu BD bzw. windschief zu BD?



17. Verwende die Bezeichnungen der Aufgabe LAGEN.
a) Bezeichne die Ebene, die durch A, B und C geht, auf 10 verschiedene Arten.
b) Wie viele Verbindungsgeraden gibt es zwischen C, F, E und B?
c) Wie viel verschiedene Ebenen gibt es, die jeweils drei der Punkte A, B, C und H enthalten?
d) Welche Ebenen sind senkrecht zur Grundfläche, welche dazu parallel?

18. Zeichne ins Schrägbild eines Quaders ABCDEFGH die Mittelpunkte L und M von Grund- und Deckfläche sowie den Mittelpunkt N von [HG] ein.

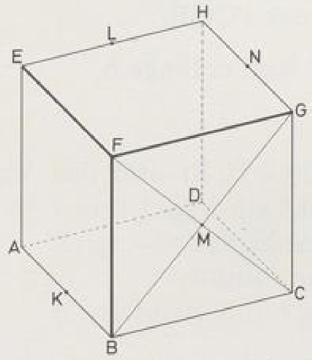
a) Begründe: BD ∥ MF, AE ∥ ML, BC ∥ MN.

b) Gib drei Punkte an, die keine Ebene festlegen. (Mehrere Möglichkeiten!)

c) Begründe: E(A, B, F) ∥ E(H, D, C), E(M, L, N) ∥ E(B, C, F).

d) Entscheide, ob die Ebenen parallel sind, oder gib die Schnittgerade an: E(A, C, G) und E(D, H, F), E(A, M, N) und E(E, H, D), E(F, L, H) und E(N, G, C), E(G, F, L) und E(A, M, D).

19. MITTELPUNKTE
Gegeben ist der Würfel ABCDEFGH. K, L und N sind Kanten-Mittelpunkte, M ist Mittelpunkt des Vierecks BCGF.



a) Begründe: GC ist Lot von E(L, N, F).

b) Begründe: Alle Raumdiagonalen schneiden sich in einem Punkt: der Würfelmitte I.

c) Gib zwei Lote der Ebene E(B, F, D) an.

d) Entscheide, ob die Gerade parallel zur Ebene ist, oder gib den Schnittpunkt an:
E(A, B, H) und GC, E(D, C, F) und BG, E(A, B, F) und LM, E(A, B, M) und DH, E(B, F, N) und KD, E(B, C, M) und FG, E(A, B, G) und FD, E(D, C, F) und KN.

e) Begründe: GM liegt in E(B, C, F).

f) In welcher Gerade schneiden sich E(A, B, G) und E(A, D, H), E(B, C, H) und E(A, F, G)?

20. Skizziere drei verschiedene Ebenen, die keine, eine, zwei oder drei Schnittgeraden haben.

⁝**21.** Je drei Eckpunkte eines Quaders ABCDEFGH legen eine Ebene fest.
Wie viel (verschiedene) Ebenen gibt es?

22. a) Die Geraden g und h sind windschief, l ist ihr gemeinsames Lot und L der Mittelpunkt der Lotstrecke. Für die Ebene E gilt: $L \in E$ und $l \perp E$.
Wie liegen g und h zur Ebene?

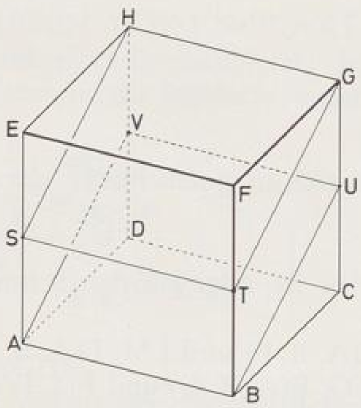
b) Die Geraden AB und CD sind parallel, der Punkt G liegt nicht in E(A, B, D).
Bestimme die Schnittmenge von E(A, B, D) und E(D, C, G).

c) Die Geraden g, h und k schneiden sich in S, liegen aber nicht in einer Ebene. A ist ein von S verschiedener Punkt auf h.
Bestimme die Schnittmenge von E(g, A) und E(h, k).

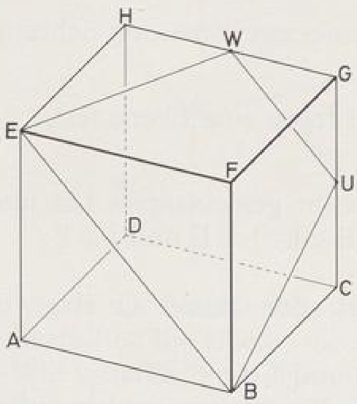
23. Der Würfel ABCDEFGH hat die Kantenlänge $a = 6$. K und L sind Kanten-Mittelpunkte, M ist Mittelpunkt des Vierecks BCGF, siehe Aufgabe Mittelpunkte.
Konstruiere in wahrer Größe:
a) Viereck BFGH **b)** Dreieck EFC **c)** Dreieck ACM
d) Dreieck KLM **e)** Winkel BMD **f)** Viereck ACNL.

24. Im Quader ABCDEFGH ist $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 4$ und $\overline{BF} = 8$. L liegt so auf [AD], dass $\overline{AL} = 1$, und K liegt so auf [CG], dass $\overline{CK} = 6$. M ist Mittelpunkt der Deckfläche EFGH, P ist Mittelpunkt von [AE], Q ist Mittelpunkt von [CG].
Konstruiere in wahrer Größe:
a) Dreieck BCG **b)** Dreieck BFD **c)** Dreieck FKM
d) Dreieck LKM **e)** Dreieck DKM **f)** Dreieck HLK
g) Viereck ECKM **h)** Viereck DBFM **i)** Viereck PCQE.

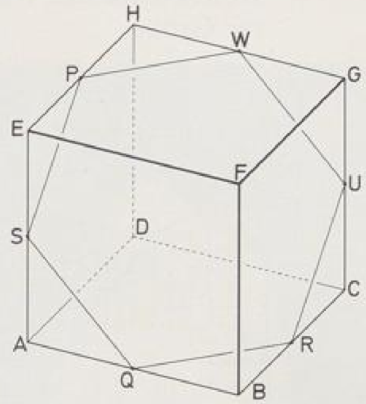
:25. WAHRE GRÖSSE im Würfel ABCDEFGH mit der Kantenlänge 6.
a) S, T, U und V sind Kantenmitten.
Zeige: $E(A, B, U) \parallel E(G, H, S)$.
Konstruiere den Abstand von E(A, B, U) und E(G, H, S) und das Viereck ABUV in wahrer Größe.



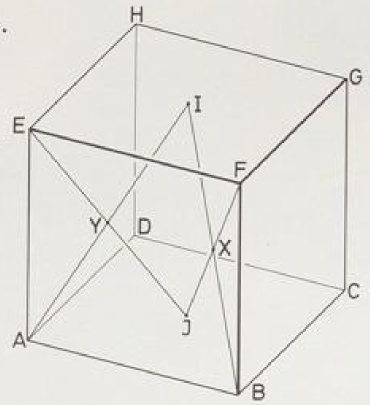
b) U und W sind Kantenmitten. Zeige: BUWE ist ein Trapez.
Konstruiere BUWE in wahrer Größe.



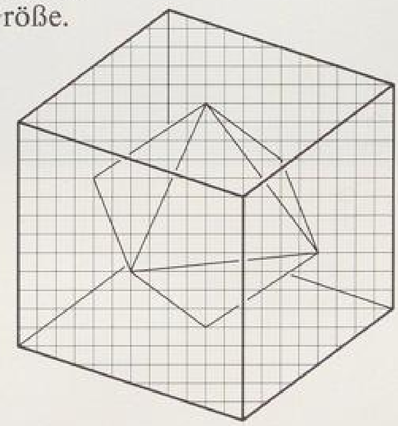
c) P, Q, R, S, U und W sind Kantenmitten.
Zeige: PSQRUW ist ein regelmäßiges Sechseck.
Konstruiere PSQRUW in wahrer Größe.
Wie viel solcher regelmäßigen Sechsecke gibt's im Würfel?



d) I und J sind die Mitten von Deck- und Grundfläche.
Zeige: Es schneiden sich AI und EJ sowie BI und FJ (Schnittpunkte Y und X).
Konstruiere das Viereck ABXY in wahrer Größe.



e) Verbindet man die Mitten angrenzender Quadrate, so ergibt sich ein regelmäßiges Achtflach.
Zeichne die Figur ab und die verdeckten Kanten ein.
Konstruiere eine der acht Flächen in wahrer Größe.



f) Verbindet man die Mitten angrenzender Kanten, so ergibt sich ein regelmäßiger Würfelstumpf.
Zeichne die Figur ab und die verdeckten Kanten ein.
Von welcher Art sind die Vielecke, die seine Oberfläche ausmachen?
Konstruiere den Abstand gegenüberliegender Dreiecke (vom Stumpf) in wahrer Größe.