UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 2000

7. Kapitel: Das gerade Prisma

urn:nbn:de:hbz:466:1-83477

Visual Library

7. Kapitel

Das gerade Prisma

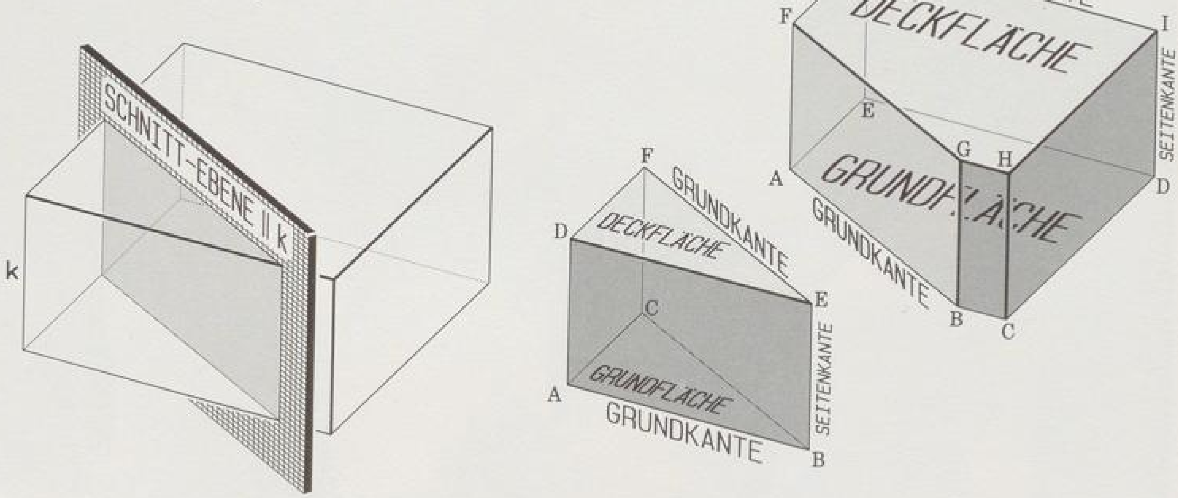
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

7.1 Definition und Eigenschaften

Schneidet man von einem Quader ein Stück so ab, dass die Schnittebene parallel ist zu einer Kante k, so entstehen zwei neue Körper, sie heißen **gerade Prismen.** Sie haben folgende Eigenschaften:

ERZEUGUNG VON PRISMEN — Am Quader

GERADE PRISMEN — Bezeichnungen



- Grund- und Deckfläche sind kongruente Vielecke in parallelen Ebenen. Entsprechende Kanten sind parallel. Solche Vielecke nennt man auch **parallel-kongruent.**
- Die Seitenkanten stehen senkrecht auf Grund- und Deckfläche, sie sind deshalb parallel und gleich lang.
- Die Seitenflächen sind Rechtecke.

GRUND- UND DECKFLÄCHE

sind	parallel-kongruent	nur kongruent	nur parallel

	PRISMA!	kein Prisma!	kein Prisma!

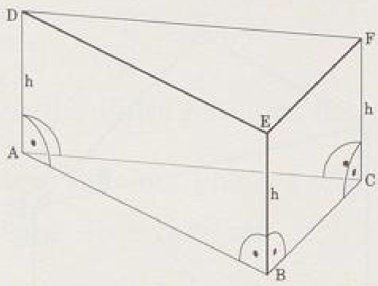
Definition

> Ein **gerades n-seitiges Prisma** ist ein Körper, der begrenzt ist von n Rechtecken (Seitenflächen) und von zwei parallel-kongruenten n-Ecken (Grund- und Deckfläche) in verschiedenen Ebenen.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Alle Seitenflächen bilden zusammen den **Mantel M** des Prismas.
Mantel, Grund- und Deckfläche bilden zusammen die **Oberfläche S** des Prismas.
Der Abstand von Grund- und Deckfläche heißt **Höhe h** des Prismas; h ist auch die Länge einer Seitenkante.

EIGENSCHAFTEN DES GERADEN PRISMAS

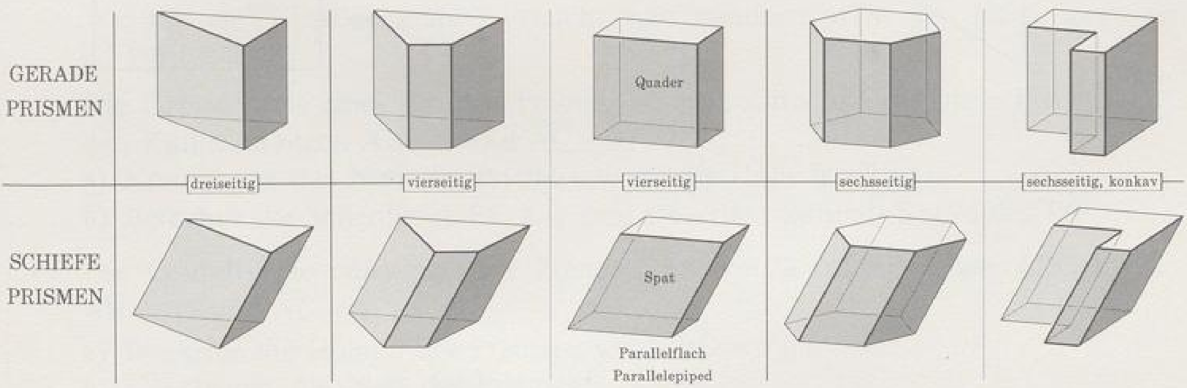


entsprechende Kanten sind parallel und gleich lang:
$[AB] \parallel [DE]$ und $\overline{AB} = \overline{DE}$
$[BC] \parallel [EF]$ und $\overline{BC} = \overline{EF}$
$[AC] \parallel [DF]$ und $\overline{AC} = \overline{DF}$

Seitenkanten sind parallel und gleich lang:
$[AD] \parallel [BE] \parallel [CF]$ und $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF} = h$

Ein Quader ist demnach ein vierseitiges gerades Prisma. In unserm Beispiel haben wir ihn in ein dreiseitiges und ein fünfseitiges gerades Prisma zerschnitten. 45 vierseitige Prismen (aber keine Quader!) in einer wenig üblichen Anordnung sehen wir auf dem zweiten Umschlagbild dieses Buchs.
Von einem allgemeinen Prisma verlangt man nur, dass Grund- und Deckfläche parallelkongruent sind. Die Seitenkanten müssen nicht senkrecht auf Grund- und Deckfläche stehen, wohl aber immer noch parallel und gleich lang sein. Die Seitenflächen sind dann meistens Parallelogramme und keine Rechtecke mehr. Jedes nicht gerade Prisma heißt **schiefes** Prisma. Ein schiefes vierseitiges Prisma mit einem Parallelogramm als Grundfläche nennt man **Spat** (Das) oder **Parallelflach** (das) oder **Parallelepiped** (das).

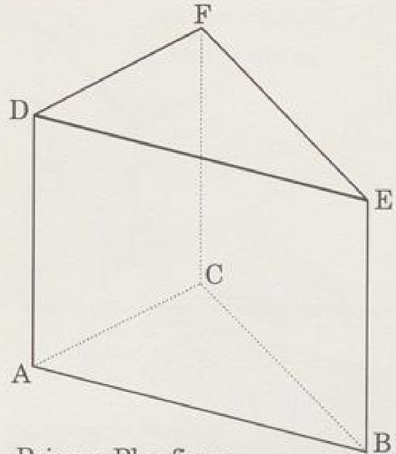
Es gibt konvexe und konkave Vielecke – auch als Grundflächen in Prismen. Dementsprechend unterscheiden wir zwischen konvexen und konkaven Prismen.
Im Folgenden behandeln wir noch gerade konvexe Prismen; der Kürze halber nennen wir sie einfach Prismen.



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

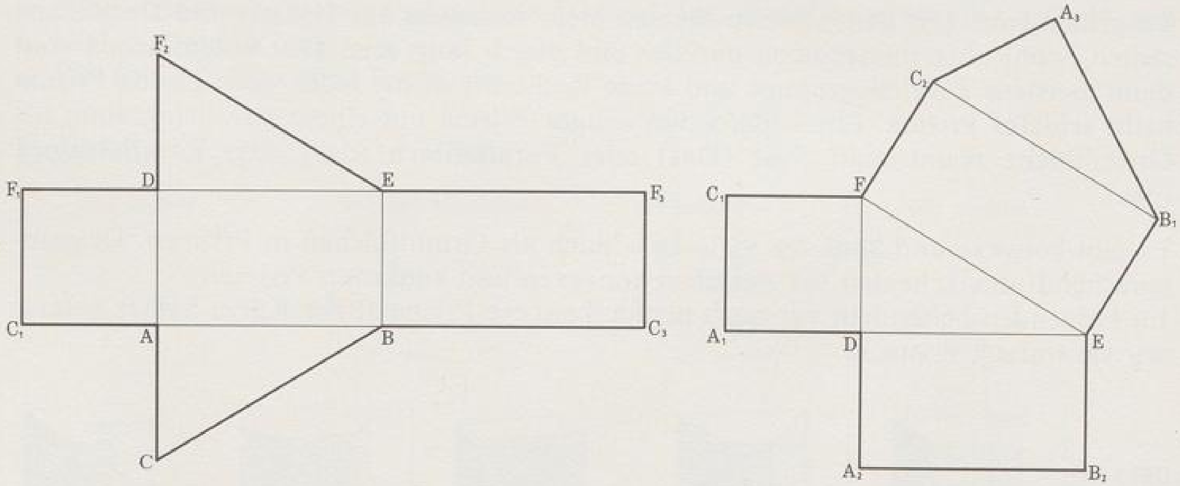
Eine Planfigur eines n-seitigen Prismas fertigt man so an:

- Zeichne ein n-Eck als Deckfläche.
- Zeichne von jedem Eckpunkt aus parallel gleich lange Strecken nach unten.
- Verbinde die unteren Strecken-Endpunkte so, dass die Grundfläche entsteht. (Auf Sichtbarkeit achten: verdeckte Kanten stricheln!)



Prisma-Planfigur

Schneidet man ein Prisma längs geeigneter Kanten so auf, dass sich die Oberfläche in der Ebene ausbreiten lässt, so entsteht ein **Netz** des Prismas. Das Bild zeigt zwei mögliche Netze des Prismas, das wir am Anfang von einem Quader abgeschnitten haben. Die Deckfläche ist deshalb ein bei D rechtwinkliges Dreieck.



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Aufgaben

In den Aufgaben sind alle Prismen gerade und konvex.

1. Wie viele Ecken, Kanten und Flächen hat
   a) ein dreiseitiges Prisma
   b) ein fünfseitiges Prisma
   c) ein n-seitiges Prisma?
   Überprüfe die Beziehung, die Euler gefunden hat:
   $e + f = k + 2$,
   e ist die Anzahl der Ecken, f die der Flächen und k die Anzahl der Kanten.

2. Geobold behauptet, er habe ein Prisma mit
   a) 53 Kanten
   b) 53 Ecken
   c) 53 Flächen gesehen.
   In welchen Fällen hat er geschwindelt? Begründung!

3. Was für ein Prisma hat
   a) 10 Flächen **b)** 6 rechteckige Flächen
   c) 24 Ecken **d)** 24 Kanten?

4. Im dreiseitigen Prisma ABCDEF ist gegeben: $\overline{BC} = 3$, $\overline{AC} = 5$, $BE = 4$, $\sphericalangle ACB = 120°$, Q liegt so auf [FC], dass $\overline{CQ} = 0{,}75 \cdot \overline{CF}$.
   Konstruiere $\sphericalangle DQB$ und gib seine Größe auf Grad genau an.

5. Im dreiseitigen Prisma ABCDEF ist $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 5$, $CA = 8$ und $AD = 7$. Q ist die Mitte von [AD].
   Bestimme durch Konstruktion die Größe der Winkel $\sphericalangle BDC$, $\sphericalangle BQC$ und $\sphericalangle BAC$.

6. Zeige: Für den Inhalt S der Oberfläche eines geraden Prismas gilt $S = 2G + uh$. G ist der Inhalt der Grundfläche, u ist der Umfang der Grundfläche und h ist die Höhe des Prismas.

7. Ein sechskantiger Bleistift ist 16 cm lang, die Seitenlänge des regelmäßigen Sechsecks ist 4 mm. Wie groß ist die Mantelfläche?

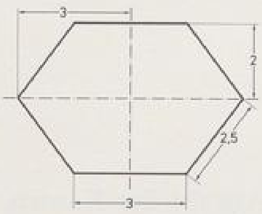
8. Ein Stück Käse hat die Form eines Prismas. Die Grundfläche ist ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen 3 cm und 4 cm, die Hypotenuse ist 5 cm lang.
   Wie viel cm^2 Einwickelpapier braucht man mindestens für den Käse, wenn er 2,5 cm hoch ist?

9. Die Grundfläche eines geraden Prismas ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Kathetenlängen $\overline{AB} = 4$ und $\overline{AC} = 3$.
   a) Konstruiere das Netz des Prismas, wenn die Höhe $h = 7$ ist.
   b) Berechne die Seitenlänge $\overline{BC}$ aus dem Oberflächeninhalt $S = 96$ des Prismas.

10. Die Grundfläche eines geraden Prismas mit $S = 72$ ist die Raute ABCD mit $\overline{AB} = 2{,}5$ und $\overline{AC} = 4$.
    a) Berechne die Höhe h des Prismas, wenn $\overline{BD} = 3$ ist.
    b) Konstruiere das Netz des Prismas.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

11. SÄULE
Der Querschnitt der Säule ist symmetrisch.
a) Zeichne das Netz, wenn die Säule die Höhe 10 hat.
b) Berechne den Inhalt S der Oberfläche.

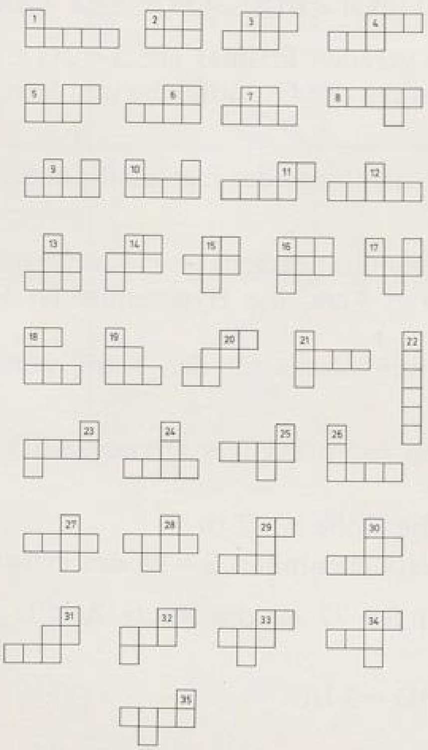


:12. Im Würfel ABCDEFGH mit der Kantenlänge 8 sind U, V, W und X der Reihe nach die Mitten von [AD], [BC], [FG] und [EH].
Zeichne ein Schrägbild des Spats ABVUXWGH.
Konstruiere sein Netz und berechne den Inhalt seiner Oberfläche S. (Verwende näherungsweise: $\overline{AX} = 8{,}9$).

:13. Im Spat von Aufgabe **12.** sind P, Q, R und S der Reihe nach die Mitten von [WX], [HG], [UV] und [AB].
Zeichne ein Schrägbild des Spats ASRUPWGQ und sein Netz.

Netze für Fortgeschrittene

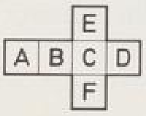
•14. REKLAMATIONEN
Geobold verkauft Würfelnetze. Bei welchen bekommt er Reklamationen?



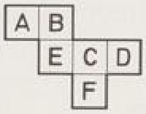
15. Zeichne alle nicht kongruenten Würfelnetze.

16. Auf die Quadrate eines Würfelnetzes sind Buchstaben gedruckt. Falte in Gedanken das Netz so zum Würfel, dass die Buchstaben sichtbar bleiben, und lege den Würfel so hin, dass B oben und C links liegt.
Welcher Buchstabe ist dann rechts, welcher ist vorn?
Zeichne den Buchstaben der Vorderseite so, wie man ihn sieht.

a)

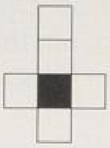


b)

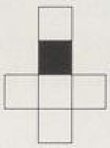


17. TAUCHWÜRFEL
Ein Würfel war zur Hälfte in Tusche eingetaucht. In den Netzen siehst du jeweils ein schwarzes Quadrat, es war ganz eingetaucht.
Zeichne die Netze ab und die restlichen gefärbten Flächenteile ein.

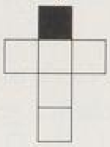
a)



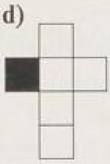
b)



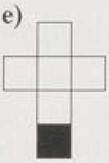
c)



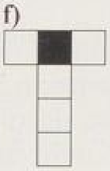
d)



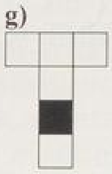
e)



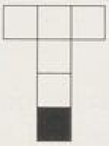
f)



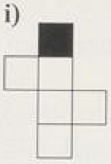
g)



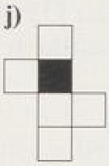
h)



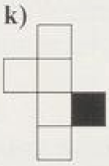
i)



j)

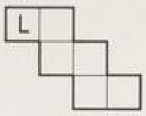


k)

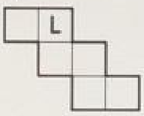


18. Wir bezeichnen die sechs Seitenflächen eines Würfels nach ihrer Lage: O(ben), U(nten), R(echts), L(inks), V(orn) und H(inten).
Ergänze die Beschriftung. Wie viele Möglichkeiten gibt es jeweils?

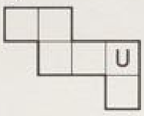
a)



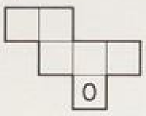
b)

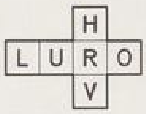


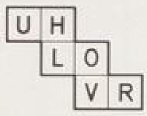
c)



d)



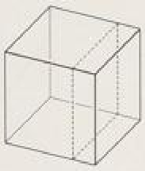




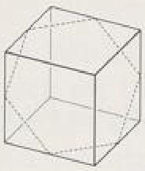
UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

19. UMLAUF
Zeichne die gestrichelte Linie in ein Würfelnetz.
(Bezeichnungen wie in Aufgabe **18.**)

a)



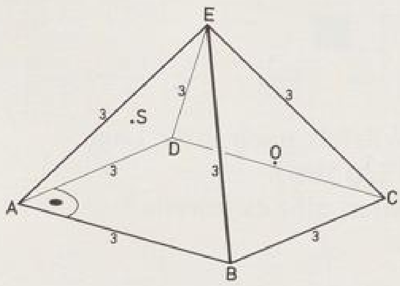
b)



20. In einer quaderförmigen Schachtel ABCDEFGH mit
$\overline{AB} = \overline{AE} = 2$ und $\overline{BC} = 4$ sitzt eine Spinne in S und ihr Opfer in O.
Auf welchem Weg muss sich die Spinne anschleichen, um ihr Opfer zu erreichen?
Zeichne verschiedene Netze und suche den kürzesten Weg.
Wie lang ist er (auf Zehntel gerundet)?

a) S ist die Mitte von [AB], O ist die Mitte von [GH].
b) S ist die Mitte von [AB], O = H.
c) S liegt im Viereck ABFE 0,5 von [AB] und 1 von [AE] entfernt, O ist die Mitte im Viereck EFGH.

21. TURMSPITZE
Im pyramidenförmigen Dach eines Kirchturms sitzt eine Spinne in der Mitte S des Dreiecks ADE und ihr Opfer in der Mitte O des Dreiecks BCE.
Wie lang ist der kürzeste Weg von S zu O?
Zeichne verschiedene Netze und suche darin den kürzesten Weg.

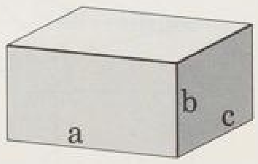


7.2 Volumen

Bei der Raummessung macht man's wie bei der Flächenmessung. Als Raumeinheit dient ein Würfel mit der Seitenlänge 1: der Einheitswürfel. Will man den Rauminhalt (das Volumen) eines Körpers messen, so muss man feststellen, wie oft der Einheitswürfel im Körper enthalten ist. Passt er zum Beispiel genau $3 \cdot 4 \cdot 6$mal in einen Quader, dann sagt man: Der Quader hat das Volumen 72 ($= 3 \cdot 4 \cdot 6$). 72 ist die Maßzahl bezüglich der gewählten Raumeinheit. Gewöhnlich bezeichnet man das Volumen mit V. Für einen Quader mit den Kantenlängen a, b und c gilt – wie wir schon wissen

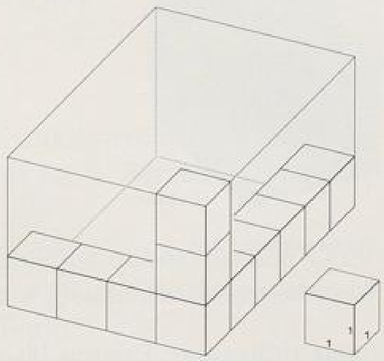
Volumen des Quaders

$V = abc$



Quadervolumen:

$4 \cdot 3 \cdot 6 = 72$



Einheitswürfel

In der Geometrie sind Volumina reine Zahlen. In der Wirklichkeit gibt man den Raumeinheiten Namen, die man von den Längeneinheiten ableitet: Zum Beispiel ist 1 Kubikmeter = 1 m^3 das Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge 1 m. Entsprechend sind in Gebrauch 1 dm^3, 1 cm^3 und 1 mm^3.

Achte auf die Umrechnungszahl 1 000: $1\,m^3 = 1\,000\,dm^3$ ($= 1\,000$ l)

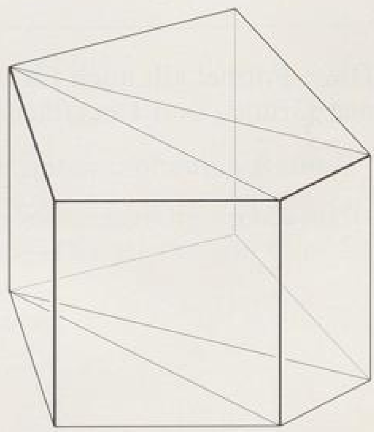
$1\,dm^3 = 1\,000\,cm^3$

$1\,cm^3 = 1\,000\,mm^3$

Bei komplizierteren Körpern ist es schwieriger, das Volumen zu berechnen. Eine naheliegende Eigenschaft des Rauminhalts hilft uns dann weiter:

Zerlegt man einen Körper in Teilkörper, so ist sein Volumen gleich der Summe der Volumina der Teilkörper.

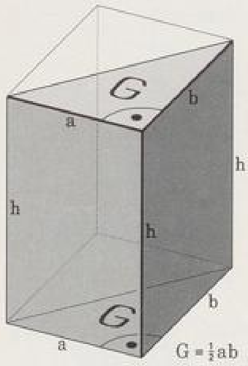
Zerlegung in dreiseitige Prismen



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

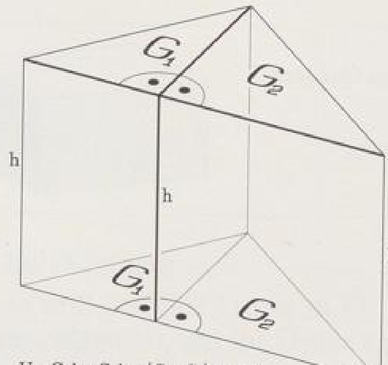
Volumen des geraden Prismas

Jedes Prisma lässt sich in dreiseitige Prismen zerlegen. Deshalb suchen wir eine Formel fürs Volumen dreiseitiger Prismen. Sie ist recht einfach, wenn die Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck ist. Ein solches Prisma kann als halber Quader aufgefasst werden, sein Volumen ist $V = \frac{1}{2}$ abh. Kürzt man mit G den Inhalt $\frac{1}{2}$ ab der Prismengrundfläche ab, so ist V = Gh.



Quadervolumen: abh

Prismavolumen: ½abh = Gh



$V = G_1h + G_2h = (G_1 + G_2)h = Gh$

Jedes dreiseitige Prisma lässt sich in zwei dreiseitige Prismen zerlegen, die rechtwinklige Dreiecke als Grundflächen haben, siehe Bild.
Ist ein gerades Prisma in n dreiseitige Prismen zerlegt, so gilt:

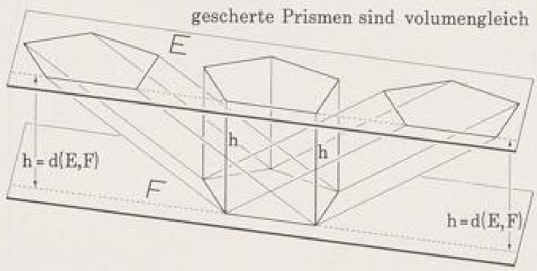
$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 + \ldots + V_n \\ &= G_1h + G_2h + \ldots + G_nh \\ &= (G_1 + G_2 + \ldots + G_n)h = Gh. \end{aligned}$$

Wir merken uns

Volumen des Prismas

V = Gh

Diese Formel gilt auch fürs schiefe Prisma. Dabei ist h der Abstand der Ebenen, in denen Grund- und Deckfläche liegen.



Aufgaben

1. Berechne die fehlenden Stücke eines geraden Prismas

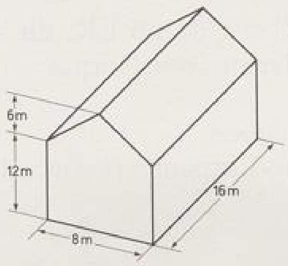
	Inhalt G der Grundfläche	Umfang u der Grundfläche	Höhe h	Volumen V	Inhalt S der Oberfläche
a)	2,5	12,5	8		
b)	18	36		90	
c)	0,24	2,4			6
d)			0,7	0,077	1,27
e)	0,3		0,7		6,27

2. Ein gerades Prisma hat als Grundfläche ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit einer Kathetenlänge 4. Die Höhe des Prismas ist 6. Berechne das Volumen.

3. Bei der Herstellung einer Steinsäule wird von der zunächst quadratischen Querschnittsfläche (Seitenlänge $a = 20$ cm) an jeder Ecke ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck (Kathetenlänge $b = 4$ cm) weggeschliffen.
   Berechne das Volumen der entstehenden achtkantigen Säule mit der Höhe $h = 80$ cm.

4. Das Profil eines 50 km langen Kanals ist ein gleichschenkliges Trapez, die Grundseiten sind 6 m und 8 m lang, die Höhe ist 2 m.
   a) Wie viel Kubikmeter Wasser enthält der volle Kanal?
   b) Wie viel Wasser fließt in einer Minute an einem Fischer vorbei, wenn die Strömungsgeschwindigkeit 0,5 m/s beträgt?

5. HAUS



   Berechne das Dachvolumen und das Volumen des gesamten umbauten Raums.

6. Ein dreiseitiges Glasprisma hat als Grundfläche ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck. Die Höhe und die Katheten sind 8 cm lang. Die Dichte von Glas ist $2{,}21\ g/cm^3$.
   Berechne die Masse.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

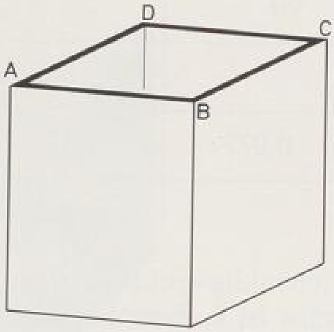
•7. VASE

Eine Tonvase hat als Grundfläche eine Raute, die Diagonalen haben die Längen $\overline{AC} = 20$ cm und $\overline{BD} = 10$ cm. Die Diagonalen der inneren Rauten sind 17 cm und 8 cm lang.

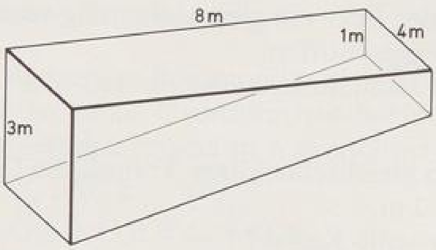
Der Boden ist 2 cm dick und die Vase ist 15 cm hoch.

a) Wie viel cm^3 Wasser sind in der Vase, wenn sie bis 2 cm unter den Rand gefüllt ist?

b) Wie viel cm^3 Ton waren zur Herstellung nötig?



8. SCHWIMMBECKEN



Ein Schwimmbecken hat die Gestalt eines vierseitigen Prismas. Wie viel Kubikmeter fasst es, wenn es randvoll ist?

9. Der Quader ABCDEFGH hat die Kantenlänge $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 4$ und $\overline{AE} = 7$.

Der Punkt K liegt so auf [BF], dass $\overline{BK} = 4$ ist. Eine Ebene durch EK, die senkrecht auf dem Rechteck ABFE steht, zerlegt den Quader in zwei Körper.

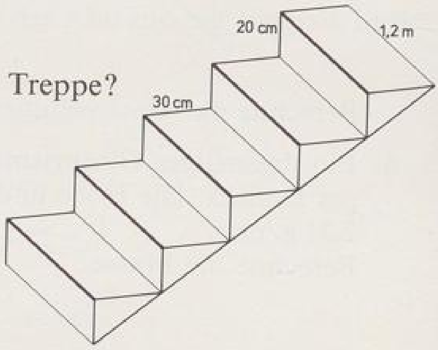
a) Fertige eine Skizze an.

b) Berechne die Volumina der beiden entstehenden Prismen.

c) Berechne die Inhalte der Oberflächen von Quader und Prismen (verwende näherungsweise $\overline{EK} = 5{,}8$).

10. TREPPE

Wie viel m^3 Beton braucht man zum Gießen der Treppe?



11. Im Quader von Aufgabe **9.** liegt L so auf [AE], dass $\overline{LE} = 2{,}5$ ist. M ist der Mittelpunkt von [BF]. Eine Ebene durch LM, die senkrecht auf dem Rechteck ABFE steht, zerlegt den Quader in zwei Körper.

a) Fertige eine Skizze an.

b) Berechne die Inhalte der beiden Prismenoberflächen (verwende näherungsweise $\overline{LM} = 5{,}1$).

c) Berechne das Verhältnis der Volumina der beiden Prismen.

d) Wohin müsste der Punkt M auf [BF] verlegt werden, damit beide Prismen denselben Rauminhalt haben?

• **12.** Ein dreiseitiges Prisma hat als Grundfläche ein Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5. Es soll durch drei geradlinige Schnitte in sechs volumengleiche dreiseitige Prismen zerlegt werden, jeder Schnitt geht durch eine Ecke.
Wie muss man schneiden? Begründung!

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN