



UNIVERSITÄTS-  
BIBLIOTHEK  
PADERBORN

# **Anschauliche Geometrie**

**Barth, Friedrich**

**München, 2000**

7.1 Definition und Eigenschaften

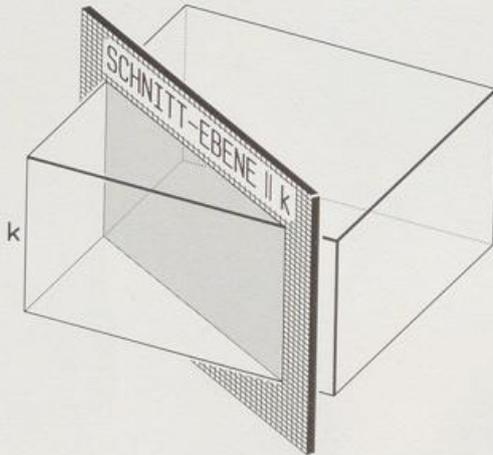
---

[urn:nbn:de:hbz:466:1-83477](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:466:1-83477)

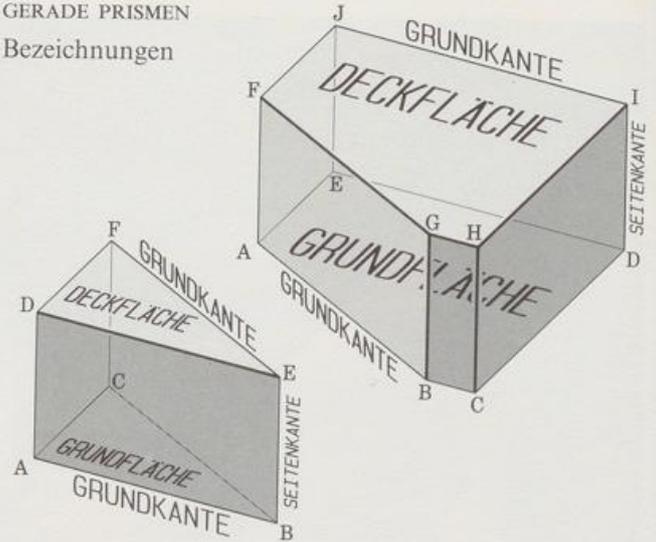
## 7.1 Definition und Eigenschaften

Schneidet man von einem Quader ein Stück so ab, dass die Schnittebene parallel ist zu einer Kante  $k$ , so entstehen zwei neue Körper, sie heißen **gerade Prismen**. Sie haben folgende Eigenschaften:

ERZEUGUNG VON PRISMEN  
Am Quader



GERADE PRISMEN  
Bezeichnungen



- Grund- und Deckfläche sind kongruente Vielecke in parallelen Ebenen. Entsprechende Kanten sind parallel. Solche Vielecke nennt man auch **parallel-kongruent**.
- Die Seitenkanten stehen senkrecht auf Grund- und Deckfläche, sie sind deshalb parallel und gleich lang.
- Die Seitenflächen sind Rechtecke.

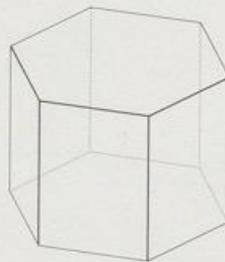
GRUND- UND DECKFLÄCHE

sind

parallel-kongruent

nur kongruent

nur parallel



PRISMA!



kein Prisma!



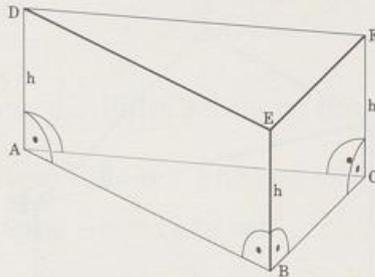
kein Prisma!

### Definition

Ein **gerades n-seitiges Prisma** ist ein Körper, der begrenzt ist von  $n$  Rechtecken (Seitenflächen) und von zwei parallel-kongruenten  $n$ -Ecken (Grund- und Deckfläche) in verschiedenen Ebenen.

Alle Seitenflächen bilden zusammen den **Mantel M** des Prismas.  
 Mantel, Grund- und Deckfläche bilden zusammen die **Oberfläche S** des Prismas.  
 Der Abstand von Grund- und Deckfläche heißt **Höhe h** des Prismas; h ist auch die Länge einer Seitenkante.

EIGENSCHAFTEN DES GERADEN PRISMAS



entsprechende Kanten sind parallel und gleich lang:

$$\begin{aligned} & \overline{AB} \parallel \overline{DE} \text{ und } \overline{AB} = \overline{DE} \\ & \overline{BC} \parallel \overline{EF} \text{ und } \overline{BC} = \overline{EF} \\ & \overline{AC} \parallel \overline{DF} \text{ und } \overline{AC} = \overline{DF} \end{aligned}$$

Seitenkanten sind parallel und gleich lang:

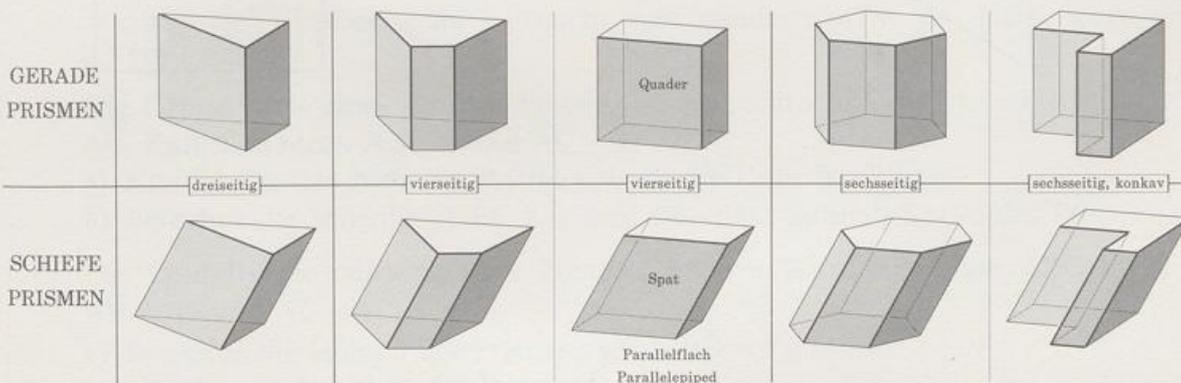
$$\overline{AD} \parallel \overline{BE} \parallel \overline{CF} \text{ und } \overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF} = h$$

Ein Quader ist demnach ein vierseitiges gerades Prisma. In unserm Beispiel haben wir ihn in ein dreiseitiges und ein fünfseitiges gerades Prisma zerschnitten. 45 vierseitige Prismen (aber keine Quader!) in einer wenig üblichen Anordnung sehen wir auf dem zweiten Umschlagbild dieses Buchs.

Von einem allgemeinen Prisma verlangt man nur, dass Grund- und Deckfläche parallel-kongruent sind. Die Seitenkanten müssen nicht senkrecht auf Grund- und Deckfläche stehen, wohl aber immer noch parallel und gleich lang sein. Die Seitenflächen sind dann meistens Parallelogramme und keine Rechtecke mehr. Jedes nicht gerade Prisma heißt **schiefes Prisma**. Ein schiefes vierseitiges Prisma mit einem Parallelogramm als Grundfläche nennt man **Spat** (Das) oder **Parallelfach** (das) oder **Parallelepip** (das).

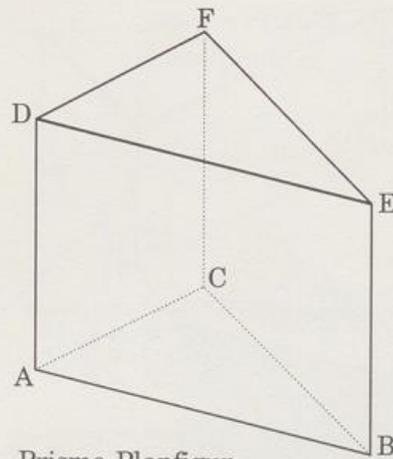
Es gibt konvexe und konkave Vielecke – auch als Grundflächen in Prismen. Dementsprechend unterscheiden wir zwischen konvexen und konkaven Prismen.

Im Folgenden behandeln wir noch gerade konvexe Prismen; der Kürze halber nennen wir sie einfach Prismen.



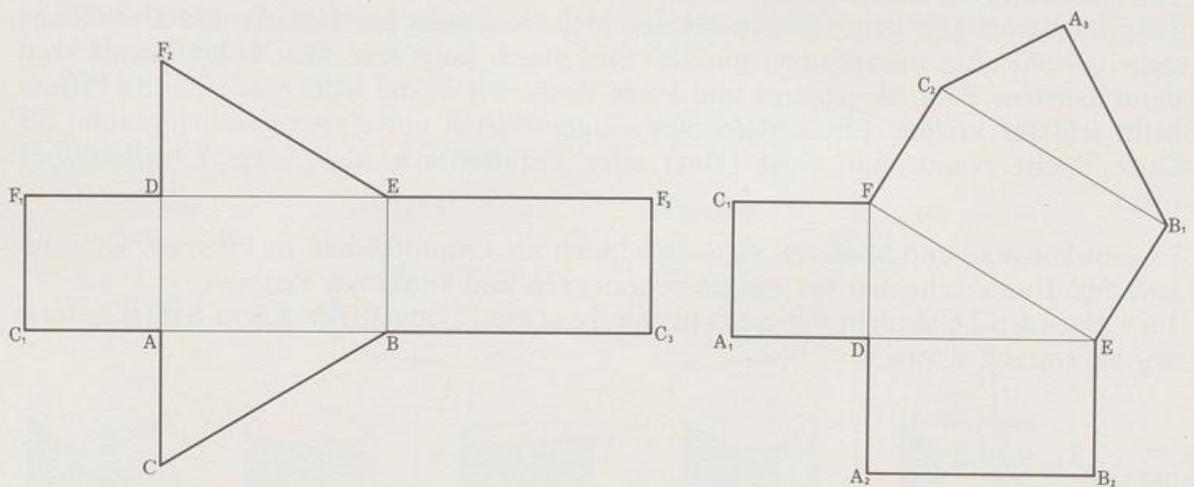
Eine Planfigur eines n-seitigen Prismas fertigt man so an:

- Zeichne ein n-Eck als Deckfläche.
- Zeichne von jedem Eckpunkt aus parallel gleich lange Strecken nach unten.
- Verbinde die unteren Strecken-Endpunkte so, dass die Grundfläche entsteht. (Auf Sichtbarkeit achten: verdeckte Kanten stricheln!)



Prisma-Planfigur

Schneidet man ein Prisma längs geeigneter Kanten so auf, dass sich die Oberfläche in der Ebene ausbreiten lässt, so entsteht ein **Netz** des Prismas. Das Bild zeigt zwei mögliche Netze des Prismas, das wir am Anfang von einem Quader abgeschnitten haben. Die Deckfläche ist deshalb ein bei D rechtwinkliges Dreieck.



## Aufgaben

In den Aufgaben sind alle Prismen gerade und konvex.

1. Wie viele Ecken, Kanten und Flächen hat

- a) ein dreiseitiges Prisma
- b) ein fünfseitiges Prisma
- c) ein n-seitiges Prisma?

Überprüfe die Beziehung, die Euler gefunden hat:

$$e + f = k + 2,$$

e ist die Anzahl der Ecken, f die der Flächen und k die Anzahl der Kanten.

2. Geobold behauptet, er habe ein Prisma mit

- a) 53 Kanten
- b) 53 Ecken
- c) 53 Flächen gesehen.

In welchen Fällen hat er geschwindelt? Begründung!

3. Was für ein Prisma hat

- a) 10 Flächen      b) 6 rechteckige Flächen
- c) 24 Ecken        d) 24 Kanten?

4. Im dreiseitigen Prisma ABCDEF ist gegeben:  $\overline{BC} = 3$ ,  $\overline{AC} = 5$ ,  $BE = 4$ ,  $\sphericalangle ACB = 120^\circ$ , Q liegt so auf [FC], dass  $\overline{CQ} = 0,75 \cdot \overline{CF}$ .

Konstruiere  $\sphericalangle DQB$  und gib seine Größe auf Grad genau an.

5. Im dreiseitigen Prisma ABCDEF ist  $\overline{AB} = 6$ ,  $\overline{BC} = 5$ ,  $CA = 8$  und  $AD = 7$ . Q ist die Mitte von [AD].

Bestimme durch Konstruktion die Größe der Winkel  $\sphericalangle BDC$ ,  $\sphericalangle BQC$  und  $\sphericalangle BAC$ .

6. Zeige: Für den Inhalt S der Oberfläche eines geraden Prismas gilt  $S = 2G + uh$ . G ist der Inhalt der Grundfläche, u ist der Umfang der Grundfläche und h ist die Höhe des Prismas.

7. Ein sechskantiger Bleistift ist 16 cm lang, die Seitenlänge des regelmäßigen Sechsecks ist 4 mm. Wie groß ist die Mantelfläche?

8. Ein Stück Käse hat die Form eines Prismas. Die Grundfläche ist ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen 3 cm und 4 cm, die Hypotenuse ist 5 cm lang.

Wie viel  $\text{cm}^2$  Einwickelpapier braucht man mindestens für den Käse, wenn er 2,5 cm hoch ist?

9. Die Grundfläche eines geraden Prismas ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Kathetenlängen  $\overline{AB} = 4$  und  $\overline{AC} = 3$ .

- a) Konstruiere das Netz des Prismas, wenn die Höhe  $h = 7$  ist.
- b) Berechne die Seitenlänge  $\overline{BC}$  aus dem Oberflächeninhalt  $S = 96$  des Prismas.

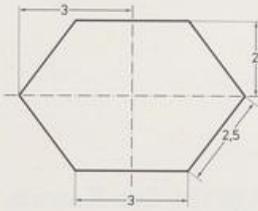
10. Die Grundfläche eines geraden Prismas mit  $S = 72$  ist die Raute ABCD mit  $\overline{AB} = 2,5$  und  $\overline{AC} = 4$ .

- a) Berechne die Höhe h des Prismas, wenn  $\overline{BD} = 3$  ist.
- b) Konstruiere das Netz des Prismas.

### 11. SÄULE

Der Querschnitt der Säule ist symmetrisch.

- Zeichne das Netz, wenn die Säule die Höhe 10 hat.
- Berechne den Inhalt  $S$  der Oberfläche.

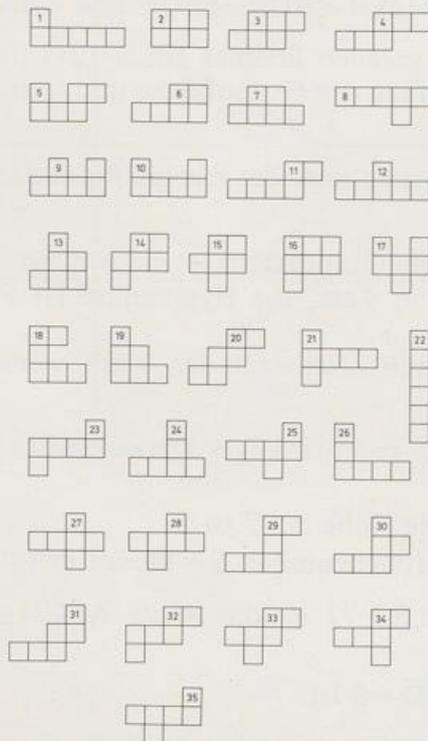


- Im Würfel  $ABCDEFGH$  mit der Kantenlänge 8 sind  $U, V, W$  und  $X$  der Reihe nach die Mitten von  $[AD], [BC], [FG]$  und  $[EH]$ . Zeichne ein Schrägbild des Spats  $ABVUXWGH$ . Konstruiere sein Netz und berechne den Inhalt seiner Oberfläche  $S$ . (Verwende näherungsweise:  $\overline{AX} = 8,9$ ).
- Im Spat von Aufgabe 12. sind  $P, Q, R$  und  $S$  der Reihe nach die Mitten von  $[WX], [HG], [UV]$  und  $[AB]$ . Zeichne ein Schrägbild des Spats  $ASRUPWGQ$  und sein Netz.

### Netze für Fortgeschrittene

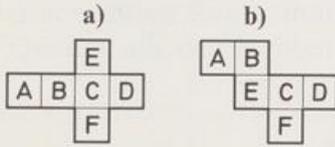
#### • 14. REKLAMATIONEN

Geobold verkauft Würfelnetze. Bei welchen bekommt er Reklamationen?



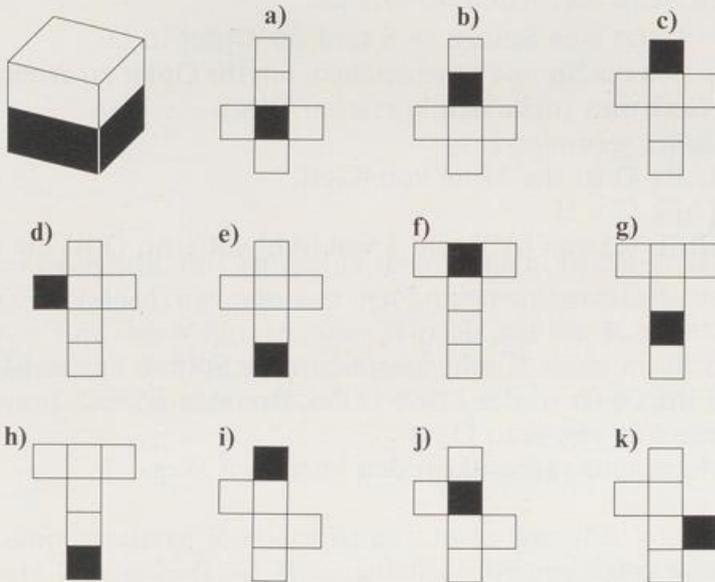
15. Zeichne alle nicht kongruenten Würfelnetze.

16. Auf die Quadrate eines Würfelnetzes sind Buchstaben gedruckt. Falte in Gedanken das Netz so zum Würfel, dass die Buchstaben sichtbar bleiben, und lege den Würfel so hin, dass B oben und C links liegt. Welcher Buchstabe ist dann rechts, welcher ist vorn? Zeichne den Buchstaben der Vorderseite so, wie man ihn sieht.

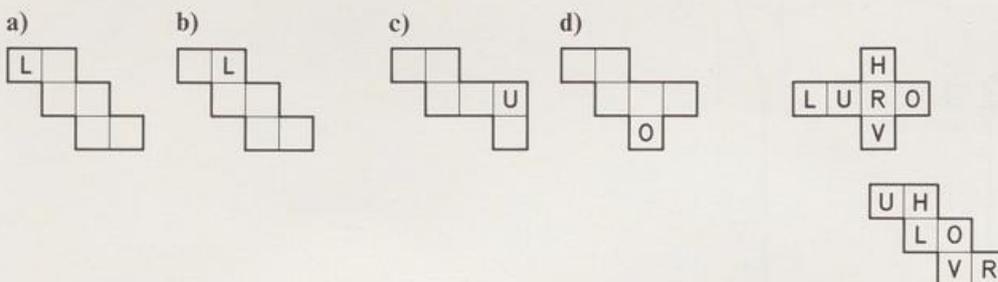


17. TAUCHWÜRFEL

Ein Würfel war zur Hälfte in Tusche eingetaucht. In den Netzen siehst du jeweils ein schwarzes Quadrat, es war ganz eingetaucht. Zeichne die Netze ab und die restlichen gefärbten Flächenteile ein.



18. Wir bezeichnen die sechs Seitenflächen eines Würfels nach ihrer Lage: O(ben), U(nten), R(echts), L(inks), V(orn) und H(inten). Ergänze die Beschriftung. Wie viele Möglichkeiten gibt es jeweils?



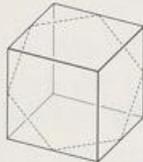
19. UMLAUF

Zeichne die gestrichelte Linie in ein Würfelnetz.  
(Bezeichnungen wie in Aufgabe 18.)

a)



b)



20. In einer quaderförmigen Schachtel ABCDEFGH mit  $\overline{AB} = \overline{AE} = 2$  und  $\overline{BC} = 4$  sitzt eine Spinne in S und ihr Opfer in O.  
Auf welchem Weg muss sich die Spinne anschleichen, um ihr Opfer zu erreichen?  
Zeichne verschiedene Netze und suche den kürzesten Weg.  
Wie lang ist er (auf Zehntel gerundet)?
- a) S ist die Mitte von [AB], O ist die Mitte von [GH].
  - b) S ist die Mitte von [AB], O = H.
  - c) S liegt im Viereck ABFE 0,5 von [AB] und 1 von [AE] entfernt, O ist die Mitte im Viereck EFGH.

21. TURMSPITZE

Im pyramidenförmigen Dach eines Kirchturms sitzt eine Spinne in der Mitte S des Dreiecks ADE und ihr Opfer in der Mitte O des Dreiecks BCE.  
Wie lang ist der kürzeste Weg von S zu O?  
Zeichne verschiedene Netze und suche darin den kürzesten Weg.

