Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

2.4 Addition und Subtraktion von rationalen Zahlen

Aufgaben

1. Wie heißt die Gegenzahl von
a) 167 **b)** $-3{,}14$ **c)** $2\frac{10}{11}$ **d)** $-0{,}001$?

2. Vereinfache die Schreibweise der folgenden Zahlen:
a) $-(-2)$ **b)** $-(-0{,}34)$ **c)** $-(-(-1))$ **d)** $-(-(-(-0{,}6)))$
e) $+49$ **f)** $-(+7{,}3)$ **g)** $-(+(-4))$ **h)** $+(-(+5))$

3. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Berichtige die falschen Aussagen.
a) Die Gegenzahl einer positiven Zahl ist nicht positiv.
b) Die Gegenzahl einer rationalen Zahl ist negativ.
c) Die Gegenzahl einer nichtnegativen Zahl ist negativ.
d) Die Gegenzahl einer natürlichen Zahl ist eine ganze Zahl.
e) Wenn man zu den Elementen von $\mathbb{N}$ alle ihre Gegenzahlen hinzufügt, erhält man die Menge $\mathbb{Z}$.

4. Bestimme $|x|$ für $x \in \{-1000;\ -111;\ -0{,}1;\ 0;\ 0{,}12;\ 63;\ 10^6\}$.

5. Bestimme alle Zahlen mit folgender Eigenschaft:
a) Der absolute Betrag ist 7,5.
b) Die Zahl ist negativ und hat den Betrag 2,8.
c) Die Zahl ist positiv und hat denselben Betrag wie -99.
d) Weder die Zahl selbst noch ihr absoluter Betrag sind positiv.
e) Die Zahl ist von ihrem Betrag verschieden, und dieser hat den Wert 7.

6. Berechne:
a) $|7{,}9|+|-5|$ **b)** $|7{,}9|-|-5|$
c) $|-81|+|-19|$ **d)** $|-81|-|19|$
e) $|-\frac{17}{20}|-|-0{,}85|$ **f)** $|-1|-|\frac{1}{2}|-|-\frac{1}{4}|$.

7. Bestimme die Lösungsmengen:
a) $|x|=0{,}5$ **b)** $|x|=7$ **c)** $|x|=0$
d) $|x|=-1$ **e)** $|x|\geqq 0$ **f)** $|x|>0$.

8. Welche Zahlen $z\in\mathbb{Z}$ erfüllen folgende Bedingung?
a) $|z|\leqq 0$ **b)** $|z|<1$ **c)** $|z|\leqq 3$
d) $|z|>0$ **e)** $|z|\geqq 2$ **f)** $1<|z|<4$.

2.4 Addition und Subtraktion von rationalen Zahlen

2.4.1 Definition der Addition

Ob die neu eingeführten negativen Zahlen zu Recht als Zahlen bezeichnet werden, entscheidet sich an der Frage, ob man mit ihnen in gewohnter Weise rechnen kann. Wir wollen dies zunächst für die Addition untersuchen. Dazu betrachten wir einige Beispiele von Summen aus rationalen Zahlen:

Beispiele:

1) $2 + 3{,}7$ **2)** $5 + 0$ **3)** $5{,}2 + (-3)$

4) $(-4) + 1\frac{3}{4}$ **5)** $(-2{,}4) + (-3{,}7)$ **6)** $0 + (-1)$

Beachte: Beim Anschreiben solcher Summen ist es wichtig, zwischen Rechenzeichen und Vorzeichen genau zu unterscheiden. Das Vorzeichen ist ein Bestandteil der betreffenden Zahl! Dies wird, wie die Beispiele 3 bis 6 zeigen, durch Klammern zum Ausdruck gebracht.

Die Summen in den Beispielen 1 und 2 sind von bekannter Art. Dagegen stellen uns die übrigen Beispiele vor neue Situationen: Wir wissen ja noch nicht, wie Summen mit negativen Summanden zu berechnen sind! Man muß erst einmal definieren, welche Bedeutung solche Summen haben sollen. Natürlich soll diese *Definition der Addition rationaler Zahlen* so beschaffen sein, daß sie für nicht-negative Summanden (Beispiele 1 und 2) mit der altbekannten Addition übereinstimmt.
Bei der Suche nach einer geeigneten Definition erinnern wir uns an die graphische Darstellung der Addition bei positiven Zahlen (Abbildung 46.1):

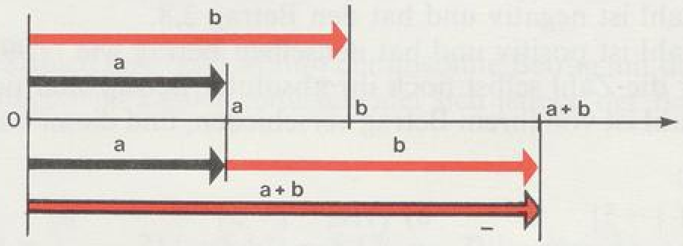

Abb. 46.1 Veranschaulichung der Addition in $\mathbb{Q}^+$

Man erhält, wie Abbildung 46.1 zeigt, den Pfeil für die Summe $a + b$, indem man an die Spitze des Pfeils a den Pfeil b ansetzt. Der Summenpfeil läuft dann vom Anfangspunkt des ersten zur Spitze des zweiten Summandenpfeils. Wir wollen dieses geometrische Verfahren im folgenden kurz als **Pfeiladdition** bezeichnen.
Es liegt nun nahe, diese Pfeiladdition versuchsweise auch auf Summen mit negativen Summanden zu übertragen. Für die obigen Beispiele 3, 4 und 5 ergeben sich dabei folgende Abbildungen:

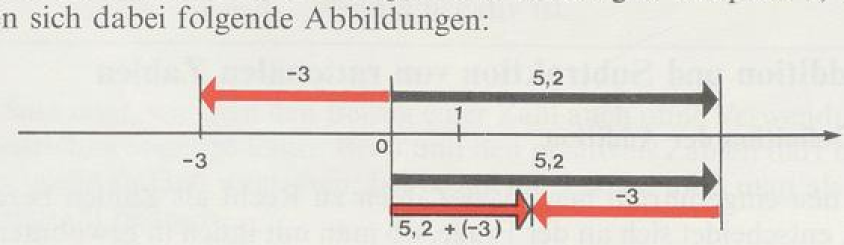

Abb. 46.2 $5{,}2 + (-3)$

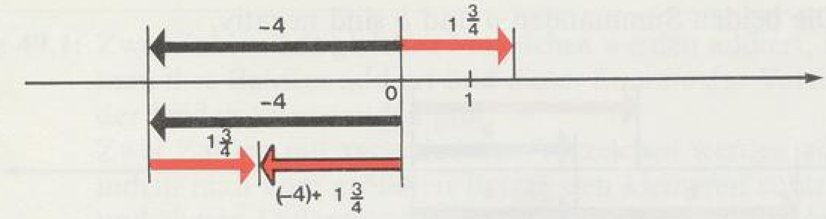

Abb. 47.1 $(-4)+1\frac{3}{4}$

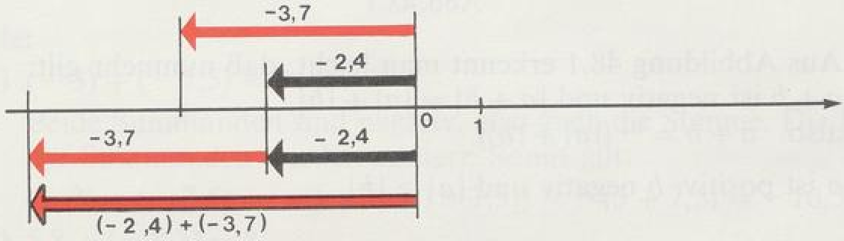

Abb. 47.2 $(-2{,}4)+(-3{,}7)$

Aus der jeweils leicht errechenbaren Länge und der Richtung des Summenpfeils erkennt man, daß dieses Additionsverfahren folgende Ergebnisse liefert:
$5{,}2+(-3)=2{,}2$; $(-4)+1\frac{3}{4}=-2\frac{1}{4}$; $(-2{,}4)+(-3{,}7)=-6{,}1$.
Deutet man z. B. positive Zahlen als Guthaben, negative als Schulden, so erkennt man, daß diese Ergebnisse durchaus sinnvoll sind. Wir wollen daher das in diesen Beispielen angewandte Verfahren zur Definition der Addition beliebiger rationaler Zahlen verwenden.

Definition 47.1: Unter der Summe $a+b$ zweier rationaler Zahlen a und b verstehen wir diejenige Zahl, deren Pfeil sich durch Anwendung der Pfeiladdition auf die Pfeile a und b ergibt.

Mit dieser Definition ist es uns tatsächlich möglich, zwei beliebige Zahlen aus $\mathbb{Q}$ zu addieren. Wie man an den vorausgehenden Beispielen erkennt, sind dabei jeweils zwei Überlegungen notwendig, nämlich:
1. Welche Richtung hat der Summenpfeil (falls seine Länge nicht 0 ist)?
2. Wie lang ist der Summenpfeil?

Die Antwort auf die erste Frage liefert das Vorzeichen der zu bestimmenden Summe, die Antwort auf die zweite ihren Absolutbetrag. Wie man vorgehen muß, um jeweils die richtigen Antworten zu finden, hängt von Betrag und Vorzeichen der beiden Summanden ab.
Wir untersuchen dazu verschiedene typische Fälle:

Fall 1: Die beiden Summanden a und b sind positiv.
Für diesen längst bekannten Fall gilt (vgl. Abbildung 46.1):
$a+b$ ist positiv und $|a+b|=|a|+|b|$,
also $a+b=|a|+|b|$.

Fall 2: Die beiden Summanden a und b sind negativ.

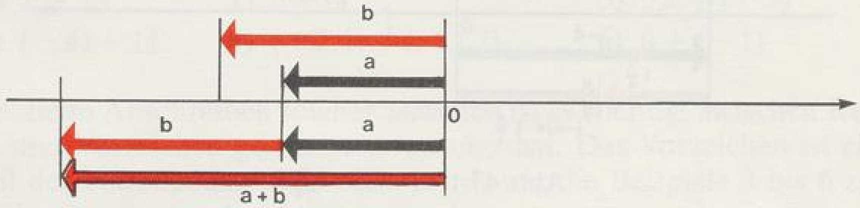

Abb. 48.1

Aus Abbildung 48.1 erkennt man leicht, daß nunmehr gilt:
$a+b$ ist negativ und $|a+b| = |a| + |b|$,
also $\quad a+b = -(|a| + |b|)$.

Fall 3: a ist positiv, b negativ und $|a| > |b|$.

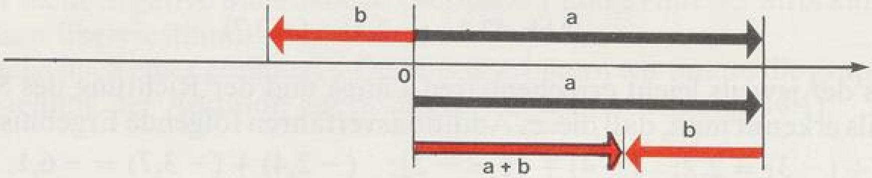

Abb. 48.2

Nach Abbildung 48.2 gilt:
$a+b$ ist positiv und $|a+b| = |a| - |b|$,
also $\quad a+b = |a| - |b|$.

Fall 4: a ist positiv, b negativ und $|a| < |b|$.

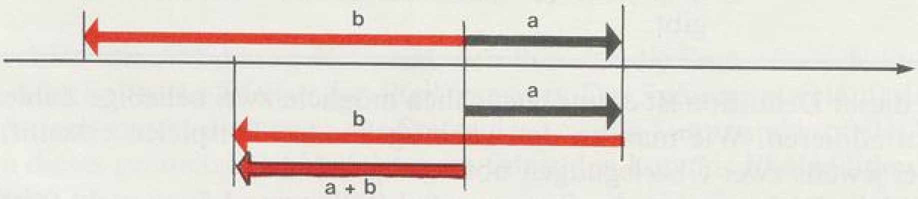

Abb. 48.3

Abbildung 48.3 zeigt:
$a+b$ ist negativ und $|a+b| = |b| - |a|$,
also $\quad a+b = -(|b| - |a|)$.

Ganz entsprechend wie die Fälle 3 und 4 lassen sich die Fälle »a negativ, b positiv und $|a| > |b|$« bzw. »a negativ, b positiv und $|a| < |b|$« behandeln. Zeige dies z. B. anhand der Aufgaben **1.b)** und **1.e)** auf Seite 53.

Die Ergebnisse dieser Untersuchungen lassen sich so beschreiben:

> **Satz 49.1:** Zwei Zahlen mit **gleichen Vorzeichen** werden addiert, indem man ihre Beträge addiert und dieser Summe das Vorzeichen der beiden Summanden gibt.
> Zwei Zahlen mit **verschiedenen Vorzeichen** werden addiert, indem man vom größeren Betrag den kleineren subtrahiert und dieser Differenz das Vorzeichen des Summanden mit dem größeren Betrag gibt.

Beispiele:

1) $(-3) + (-7{,}5) = ?$

Beide Summanden sind negativ, also auch die Summe. Die Beträge der Summanden werden addiert. Somit gilt:

$(-3) + (-7{,}5) = -(|-3| + |-7{,}5|) = -(3 + 7{,}5) = -10{,}5.$

2) $5{,}8 + (-8{,}3) = ?$

Die Summanden haben verschiedene Vorzeichen. Der Summand mit dem größeren Betrag, also $-8{,}3$, ist negativ; daher wird auch die Summe negativ. Die Beträge der Summanden werden voneinander subtrahiert. Somit gilt:

$5{,}8 + (-8{,}3) = -(|-8{,}3| - |5{,}8|) = -(8{,}3 - 5{,}8) = -2{,}5.$

3) $(-3\frac{1}{3}) + 4\frac{1}{6} = ?$

Die Summanden haben verschiedene Vorzeichen. Der Summand mit dem größeren Betrag ist positiv, also auch die Summe. Die Beträge der Summanden werden voneinander subtrahiert. Somit gilt:

$(-3\frac{1}{3}) + 4\frac{1}{6} = +(|4\frac{1}{6}| - |-3\frac{1}{3}|) = +(4\frac{1}{6} - 3\frac{1}{3}) = +\frac{5}{6} = \frac{5}{6}.$

Von besonderem Interesse sind noch die zwei folgenden Fälle:

Fall 5: $|a| = |b|$ und a und b haben verschiedene Vorzeichen. In diesem Fall ist b die Gegenzahl von a, also $b = -a$.

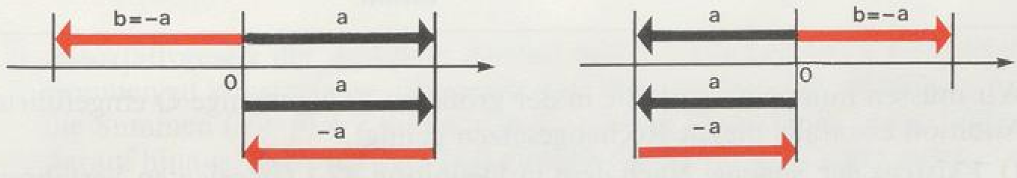

Abb. 49.1

Aus Abbildung 49.1 erkennt man: $a + (-a) = 0$.

> **Satz 49.2:** Die Summe aus einer Zahl und ihrer Gegenzahl ist 0.
> $\boldsymbol{a + (-a) = 0}$ für jedes $a \in \mathbb{Q}$

Fall 6: Ein Summand ist 0.
Da der Pfeil für die Zahl 0 die Länge 0 hat, ergibt sich unmittelbar aus Definition 47.1:

> **Satz 50.1:** Für jede rationale Zahl a gilt
> $$a + 0 = 0 + a = a.$$

Dieser Satz besagt, daß die Zahl 0 auch in der Zahlenmenge $\mathbb{Q}$ das *neutrale Element der Addition* ist.

2.4.2 Eigenschaften der Addition in $\mathbb{Q}$

Von der im Abschnitt **2.4.1** eingeführten Addition rationaler Zahlen wissen wir noch nicht, ob sie wirklich alle erwünschten Eigenschaften besitzt. Es geht hier vor allem um die Frage, ob für sie die Rechengesetze gültig bleiben, die uns von der Addition in $\mathbb{Q}_0^+$ her schon bekannt sind. Zur Wiederholung wollen wir diese Rechengesetze hier zusammenstellen:

Rechengesetze der Addition in $\mathbb{Q}_0^+$

Für alle Zahlen a, b, c aus $\mathbb{Q}_0^+$ gilt:

(E)	**$a + b$ ist wieder eine Zahl aus $\mathbb{Q}_0^+$**	**eindeutige Existenz der Summe**
(K)	**$a + b = b + a$**	**Kommutativgesetz* der Addition**
(A)	**$(a + b) + c = a + (b + c)$**	**Assoziativgesetz** der Addition**
(N)	**$a + 0 = a$**	**0 ist neutrales Element der Addition**

Wir müssen nun prüfen, ob die in der größeren Zahlenmenge $\mathbb{Q}$ eingeführte Addition ebenfalls diesen Rechengesetzen genügt.

1) **Existenz der Summe:** Nach dem in Definition 47.1 festgelegten Verfahren kann man zwei rationale Zahlen stets addieren; die Summe ist wieder eine Zahl aus $\mathbb{Q}$. Damit bleibt (E) in $\mathbb{Q}$ gültig.

* commutare (lat.) = verändern, vertauschen. – Der Ausdruck *kommutativ* wurde 1814 von François Joseph Servois (1767–1847) in seinem *Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul différentiel* in die Mathematik eingeführt.

** associare (lat.) = vereinigen, anschließen, verbinden. – Der Ausdruck *assoziativ* wurde 1843 von dem berühmten irischen Mathematiker und Astronomen William Rowan Hamilton (1805–1865) bei der Erfindung ganz besonderer »Zahlen«, der sog. Quaternionen, in die Mathematik eingeführt. – Abb. 90.1

2) Kommutativgesetz der Addition: Wir konstruieren und vergleichen die Pfeilsummen $a + b$ und $b + a$ für die verschiedenen Vorzeichenzusammenstellungen:

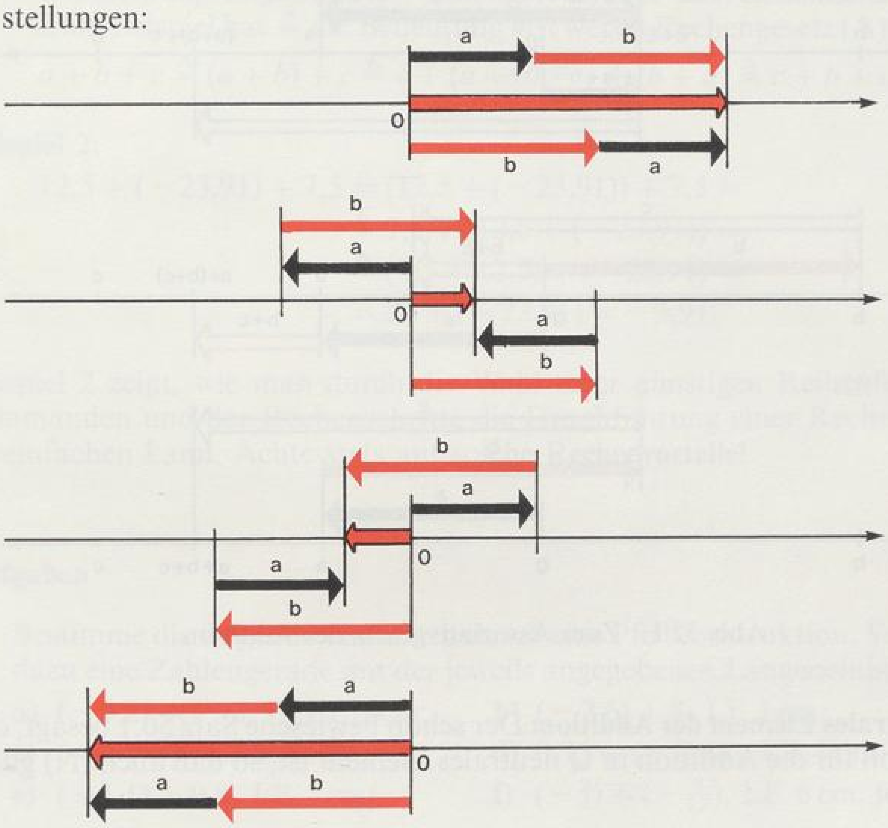

Abb. 51.1 Zum Nachweis des Kommutativgesetzes

Abbildung 51.1 zeigt, daß in allen diesen Fällen $a + b = b + a$ gilt. Wenn ein Summand 0 ist, gilt nach Satz 50.1 ebenfalls $a + 0 = 0 + a$. Also bleibt (K) in $\mathbb{Q}$ gültig.

3) Assoziativgesetz der Addition: Anstatt hier für alle typischen Fälle Pfeilsummen zu konstruieren, überlegen wir: Wenn man aus drei Pfeilen a, b, c die Summen $(a + b) + c$ und $a + (b + c)$ bildet, läuft das in beiden Fällen darauf hinaus, daß man die Pfeile einfach der Reihe nach aneinandersetzt. Das Ergebnis ist unabhängig davon, ob a und b oder b und c zu einer Zwischensumme zusammengefaßt werden. Damit gilt wieder $(a + b) + c = a + (b + c)$, d.h., (A) bleibt auch für die Addition in $\mathbb{Q}$ gültig.

Ein Beispiel zeigt Abbildung 52.1. In den ersten beiden Zeichnungen wird jeweils oberhalb der Zahlengeraden die Zwischensumme $a + b$ bzw. $b + c$ konstruiert, die dann darunter zur Ermittlung der ganzen Summe $(a + b) + c$ bzw. $a + (b + c)$ verwendet wird. Der letzte Teil der Abbildung zeigt zum Vergleich die drei der Reihe nach aneinandergesetzten Pfeile.

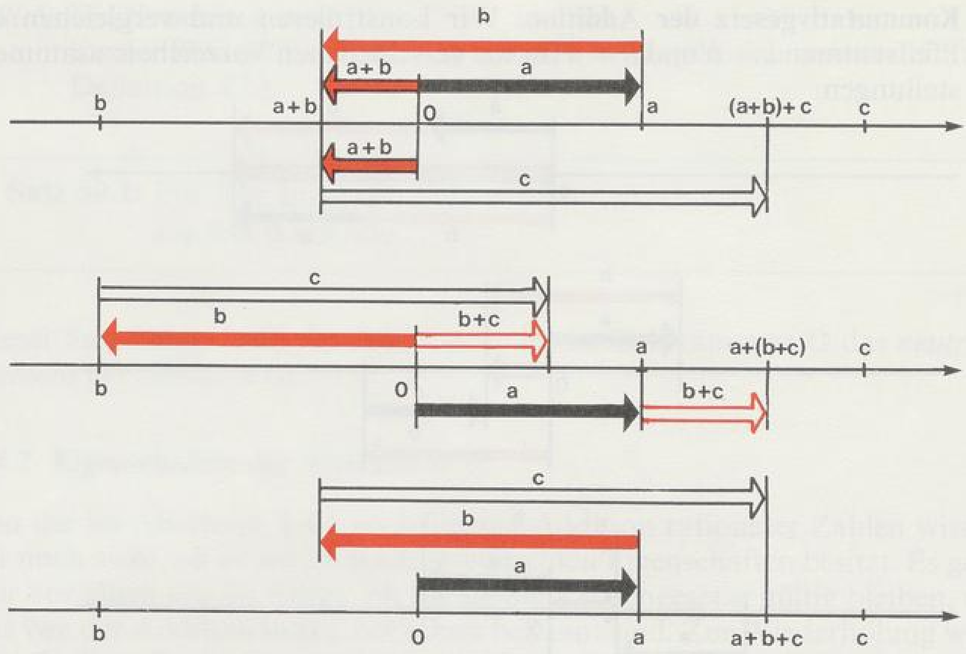

Abb. 52.1 Zum Assoziativgesetz der Addition

4) **Neutrales Element der Addition:** Der schon bewiesene Satz 50.1 besagt, daß 0 auch für die Addition in $\mathbb{Q}$ neutrales Element ist, so daß auch (N) gültig bleibt.

Damit gilt

Satz 52.1:	Für die Addition in der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen gelten wieder die auf Seite 50 zusammengestellten Rechengesetze (E), (K), (A), (N).

Für die Rechenpraxis sind insbesondere die Gesetze (A) und (K) von großer Bedeutung. Aus (A) folgt bekanntlich, daß man bei dreigliedrigen Summen darauf verzichten kann, die Reihenfolge der beiden Additionen durch Klammern festzulegen. Da es nach dem Assoziativgesetz gleichgültig ist, ob man $(a+b)+c$ oder $a+(b+c)$ berechnet, genügt es auch, einfach $a+b+c$ zu schreiben. Nimmt man noch das Kommutativgesetz hinzu, so zeigt sich, daß auch die Reihenfolge der Summanden beliebig verändert werden kann. Dasselbe gilt, wie man zeigen kann, auch für Summen mit mehr als drei Summanden.

Beispiel 1:

Behauptung: $a+b+c=c+b+a$

Beweis: Der Einfachheit halber schreiben wir im folgenden das bei einer Umformung angewandte Rechengesetz über das Gleichheitszeichen. Zum Beispiel hat $\stackrel{A}{=}$ die Bedeutung »ist wegen Rechengesetz (A) gleich«.

$$a+b+c \stackrel{A}{=} (a+b)+c \stackrel{K}{=} c+(a+b) \stackrel{K}{=} c+(b+a) \stackrel{A}{=} c+b+a.$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} 12{,}5+(-23{,}91)+7{,}5 &\stackrel{A}{=} (12{,}5+(-23{,}91))+7{,}5 = \\ &\stackrel{K}{=} 7{,}5+(12{,}5+(-23{,}91)) = \\ &\stackrel{A}{=} (7{,}5+12{,}5)+(-23{,}91) = \\ &= 20+(-23{,}91) = -3{,}91. \end{aligned}$$

Beispiel 2 zeigt, wie man durch die Wahl einer günstigen Reihenfolge der Summanden und der Rechenschritte die Durchführung einer Rechnung oft vereinfachen kann. Achte stets auf solche **Rechenvorteile**!

Aufgaben

1. Bestimme die folgenden Summen durch eine Pfeilkonstruktion. Verwende dazu eine Zahlengerade mit der jeweils angegebenen Längeneinheit (LE).
 a) $(-3{,}2)+(-1{,}5)$, LE 1 cm; **b)** $(-2{,}6)+8$, LE 1 cm;
 c) $64+(-97)$, LE 1 mm; **d)** $0{,}75+(-0{,}48)$, LE 1 dm;
 e) $(-1{,}1)+0{,}8$, LE 5 cm; **f)** $(-\frac{3}{4})+(-\frac{7}{12})$, LE 6 cm.

2. Berechne die folgenden Summen. Überlege jeweils zuerst, welches Vorzeichen das Ergebnis erhält und wie man seinen Betrag berechnet.
 a) $(-10)+12$ **b)** $10+(-12)$ **c)** $(-9{,}1)+(-1{,}9)$
 d) $1{,}5+4\frac{1}{3}$ **e)** $(-7{,}45)+7\frac{1}{4}$ **f)** $0{,}865+(-1{,}39)$
 g) $(-\frac{7}{9})+(-\frac{11}{15})$ **h)** $\frac{16}{7}+(-2\frac{3}{14})$ **i)** $(-0{,}196)+\frac{49}{250}$

3. Konstruiere für die folgenden Zahlenbeispiele zur Überprüfung des Assoziativgesetzes der Addition die Pfeilsummen $(a+b)+c$ und $a+(b+c)$. Kennzeichne dabei die zuerst gebildeten Zwischensummen durch zweifarbige Pfeile (vgl. Abbildung 52.1).
 a) $a=4$; $b=-3$; $c=-3{,}5$; LE 1 cm
 b) $a=-2{,}4$; $b=7{,}3$; $c=-3{,}2$; LE 1 cm
 c) $a=-0{,}6$; $b=-\frac{3}{4}$; $c=\frac{7}{8}$; LE 4 cm

4. Berechne die folgenden Summen. Achte dabei auf eventuelle Rechenvorteile.
 a) $15+27+(-32)$ **b)** $(-243)+(-102)+45$
 c) $1010+(-2000)+990$ **d)** $(-123)+(-68)+(-132)$
 e) $(-0{,}93)+1{,}13+(-0{,}63)$ **f)** $(-2{,}25)+(-4{,}75)+7{,}25$
 g) $2\frac{3}{4}+(-1\frac{2}{3})+(1\frac{1}{12})$ **h)** $15{,}8+(-20\frac{1}{3})+4\frac{1}{2}$

5. Berechne:

a) $(27+(-15))+(-8)+(-9)$ **b)** $(-109)+(85+13+(-45))$

c) $((-3{,}14)+2{,}38)+(-0{,}167)+1{,}427$

d) $(4\frac{1}{7}+(-10{,}5))+(8\frac{2}{3}+(-2\frac{3}{4}))$

6. Berechne:

a) $(-7)+|-7|$ **b)** $|-2{,}5|+|2{,}5|$ **c)** $3{,}2+|-3{,}2|$

d) $|3+(-4)|$ **e)** $|3|+|-4|$ **f)** $|(-3)+4|$

g) $|(-1{,}16)+(-2{,}39)|$ **h)** $|-1{,}16|+|-2{,}39|$ **i)** $\left|(-5\frac{1}{6})+|-2\frac{1}{9}|\right|$

7. Ist x positiv, null oder negativ, wenn folgende Gleichung gilt? (Hinweis: Beachte Satz 49.1.)

a) $|7+x|=7+|x|$ **b)** $|(-7)+x|=7+|x|$

c) $|x+2|=2-|x|$ **d)** $|x+2|=|x|-2$

e) Welche Angabe über $|x|$ läßt sich im Fall **c)** bzw. im Fall **d)** machen?

8. Was kann man über die Vorzeichen von $x \neq 0$ und $y \neq 0$ sagen, wenn gilt

a) $|x+y|=|x|+|y|$ **b)** $|x+y|=|x|-|y|$

c) $|x+(-y)|=|x|+|y|$ **d)** $|(-x)+(-y)|=|x|-|y|$?

2.4.3 Die Subtraktion in $\mathbb{Q}$

Beim Addieren besteht die Aufgabe darin, aus den gegebenen Summanden die Summe zu berechnen. Oft kommt es aber auch vor, daß von einer Summe der Wert schon bekannt ist und einer der Summanden gesucht wird. Um diesen zu berechnen, muß man bekanntlich eine **Subtraktion** ausführen. Man bezeichnet wegen dieses Zusammenhangs die Subtraktion als **Umkehrung der Addition**.

Beispiel:

Auf einer Straßenkarte ist die Entfernung München–Nürnberg mit 162 km und die Teilstrecke München–Ingolstadt mit 73 km angegeben. Wie lang ist dann die Strecke von Ingolstadt nach Nürnberg?
Bezeichnet man sie mit x km, so ist x die Lösung der Gleichung $73+x=162$, also $x=162-73=89$.
Die Strecke Ingolstadt–Nürnberg ist somit 89 km lang.

Das Beispiel zeigt deutlich den Zusammenhang zwischen der Differenz $162-73$ und der Gleichung $73+x=162$: die *Differenz* ist die *Lösung der Gleichung*. Ganz allgemein legt man fest:

Definition 54.1: Unter der Differenz $b-a$ versteht man die Lösung der Gleichung $a+x=b$.

$b-a$ ist also diejenige Zahl, die man zu a addieren muß, um b zu erhalten.

Nach dieser Definition hat eine Differenz $b - a$ nur dann einen Sinn, wenn die entsprechende Gleichung $a + x = b$ genau eine Lösung besitzt. In der Zahlenmenge $\mathbb{Q}_0^+$ war dies nur unter der Voraussetzung $a \leqq b$ der Fall. Für $a > b$ war die Gleichung unlösbar, somit die Subtraktion $b - a$ nicht ausführbar. Hat sich daran durch die Einführung der negativen Zahlen etwas geändert? Ist in der Zahlenmenge $\mathbb{Q}$ die Subtraktion immer durchführbar?
Um diese wichtige Frage zu klären, betrachten wir als Beispiel zunächst eine Gleichung, die in $\mathbb{Q}_0^+$ keine Lösung hat:

Beispiel:

$7 + x = 3$

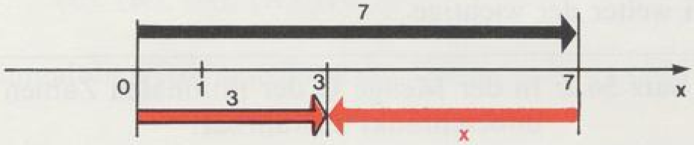

Abb. 55.1 Zur Gleichung $7 + x = 3$

Die Pfeildarstellung zeigt, daß es genau eine Zahl x gibt, die man zu 7 addieren muß, um 3 zu erhalten. Sie wird durch den von 7 nach 3 zeigenden Pfeil dargestellt. Man erkennt leicht, daß es die Zahl -4 ist.
Es gilt also: $7 + x = 3$ hat die Lösung $x = 3 - 7 = -4$.

Das in diesem Beispiel angewandte Verfahren läßt sich auf jede Gleichung der Form $a + x = b$ übertragen: Man stellt a und b durch vom Nullpunkt der Zahlengeraden ausgehende Pfeile dar. Dann gibt es genau einen Pfeil x, der von der Spitze des Pfeils a zur Spitze des Pfeils b führt; er stellt die einzige Lösung der Gleichung dar. Die Abbildung 55.2 zeigt einige typische Fälle.

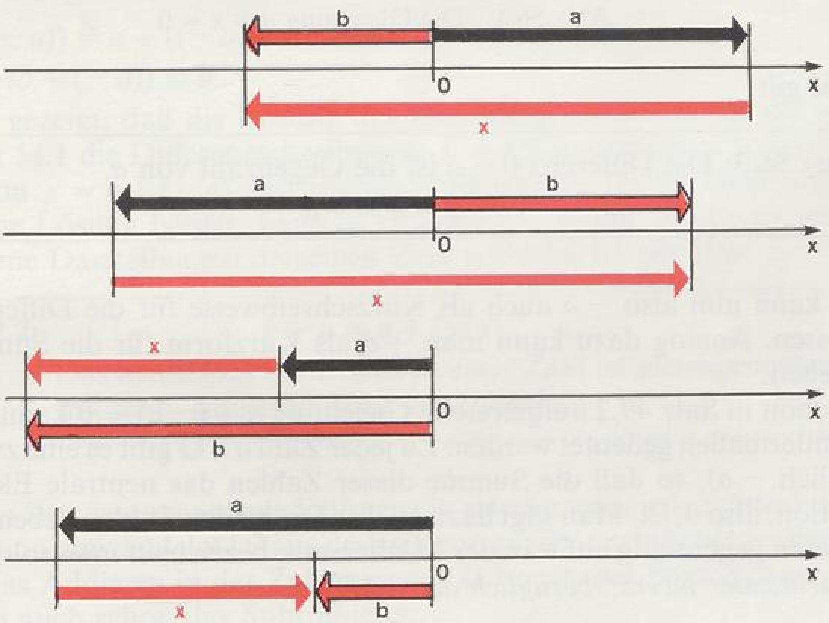

Abb. 55.2 Zur Gleichung $a + x = b$

Damit gilt folgender

> **Satz 56.1:** Die Gleichung $a + x = b$ hat in der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen stets genau eine Lösung.

Da man die Lösung der Gleichung $a + x = b$ durch die Differenz $b - a$ ausdrückt (siehe Definition 54.1) und diese also für beliebige $a, b \in \mathbb{Q}$ definiert ist, gilt weiter der wichtige

> **Satz 56.2:** In der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist die Subtraktion unbeschränkt ausführbar.

Durch die Einführung der negativen Zahlen ist es uns also gelungen, die früher bei der Subtraktion notwendigen Beschränkungen aufzuheben!

Ein wichtiger **Sonderfall** der Gleichung $a + x = b$ ergibt sich für $b = 0$. In diesem Fall, also für die Gleichung $a + x = 0$, lautet die Lösung: $x = 0 - a$. Bei dieser Differenz handelt es sich aber, wie Abbildung 56.1 zeigt, um die uns schon bekannte Gegenzahl von a, also $x = -a$.

Abb. 56.1 Die Gleichung $a + x = 0$

Damit gilt

> **Satz 56.3:** Die Differenz $0 - a$ ist die Gegenzahl von a.
> $$\mathbf{0 - a = -a}$$

Man kann nun also $-a$ auch als Kurzschreibweise für die Differenz $0 - a$ auffassen. Analog dazu kann man $+a$ als Kurzform für die Summe $0 + a$ verstehen.
Die schon in Satz 49.2 aufgetretene Gleichung $a + (-a) = 0$ kann nun auch folgendermaßen gedeutet werden: Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{Q}$ gibt es eine zweite Zahl (nämlich $-a$), so daß die Summe dieser Zahlen das neutrale Element der Addition, also 0, ist. Man sagt dazu auch: »Die beiden Zahlen heben sich beim Addieren gegenseitig auf.« In der Mathematik bezeichnet man solche Zahlen als *zueinander invers* bezüglich der Addition.*

* inversus (lat.) = umgekehrt

Satz 57.1: Zu jeder rationalen Zahl a gibt es genau eine Inverse bezüglich der Addition, nämlich die Gegenzahl $-a$.

Dieser Satz stellt ein weiteres Rechengesetz der Addition dar, das als »Existenz des Inversen« bezeichnet wird. Wir verwenden dafür die Abkürzung (I). Damit haben wir für die Addition in $\mathbb{Q}$ fünf Rechengesetze:

(E), (K), (A), (N), (I).

Wir betrachten noch einmal die Pfeildarstellung der Differenz $b-a$ (Abbildung 57.1).

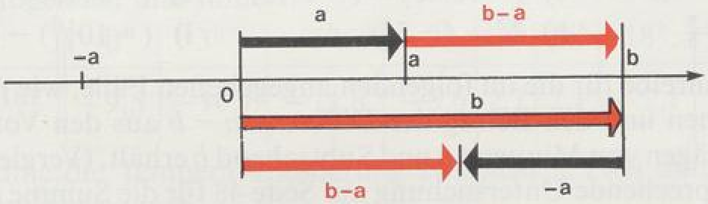

Abb. 57.1 Pfeildarstellung der Differenz

Offensichtlich erhält man den Pfeil $b-a$ auch dadurch, daß man an den Pfeil b den Pfeil $-a$ ansetzt, also die **Pfeilsumme** $b+(-a)$ bildet! Ob das allgemeingültig ist, können wir durch Rechnen überprüfen. Da $b-a$ die Lösung der Gleichung $a+x=b$ ist, rechnen wir nach, ob auch $b+(-a)$ diese Gleichung erfüllt:

$a+(b+(-a)) \overset{K}{=} a+((-a)+b) \overset{A}{=} (a+(-a))+b = 0+b = b,$

also $a+(b+(-a)) = b$.

Damit ist gezeigt, daß die Lösung der Gleichung $a+x=b$, für die wir in Definition 54.1 die Differenzschreibweise $x=b-a$ vereinbart haben, auch in der Form $x=b+(-a)$ geschrieben werden kann. Da die Gleichung nur eine einzige Lösung besitzt, kann es sich bei $b-a$ und $b+(-a)$ nur um verschiedene Darstellungen derselben Zahl handeln! Es gilt also:

Satz 57.2: $\boldsymbol{b-a=b+(-a)}$

Das heißt: Das Subtrahieren einer Zahl ist gleichbedeutend mit dem Addieren ihrer Gegenzahl.

Mit diesem Satz kann man jede Differenz in eine Summe, jede Subtraktion in eine Addition umwandeln! Das ist deshalb von großer praktischer Bedeutung, weil wir das Addieren in der Zahlenmenge $\mathbb{Q}$ bereits gut beherrschen – und damit nun auch schon das Subtrahieren.

Beispiele:

1) $5-11=5+(-11)=-(11-5)=-6.$

2) $(-2{,}17)-8{,}05=(-2{,}17)+(-8{,}05)=-(2{,}17+8{,}05)=-10{,}22.$

3) $(-6\tfrac{4}{15})-(-9\tfrac{7}{20})=(-6\tfrac{4}{15})+(-(-9\tfrac{7}{20}))=(-6\tfrac{4}{15})+9\tfrac{7}{20}=$
$=+(9\tfrac{7}{20}-6\tfrac{4}{15})=3\tfrac{5}{60}=3\tfrac{1}{12}.$

Aufgaben

1. Berechne folgende Differenzen:

a) $99-1000$ **b)** $(-99)-1000$ **c)** $(-99)-(-1000)$
d) $5{,}2-7{,}9$ **e)** $(-16{,}45)-(-17{,}5)$ **f)** $(-0{,}625)-0{,}625$
g) $\frac{51}{60}-\frac{7}{8}$ **h)** $2\frac{3}{7}-(-5\frac{2}{3})$ **i)** $(-10\frac{10}{11})-(-7{,}2)$

2. a) Beschreibe für die im folgenden angegebenen Fälle, wie man das Vorzeichen und den Betrag der Differenz $a-b$ aus den Vorzeichen und Beträgen von Minuend a und Subtrahend b erhält. (Vergleiche dazu die entsprechende Untersuchung auf Seite 48 für die Summe $a+b$.) Fertige jeweils eine Pfeilskizze an.
1. Fall: a positiv und b negativ
2. Fall: a negativ und b positiv
3. Fall: a und b positiv und $|a|>|b|$
4. Fall: a und b positiv und $|a|<|b|$
5. Fall: a und b negativ und $|a|>|b|$
6. Fall: a und b negativ und $|a|<|b|$

b) Formuliere nun einen dem Satz 49.1 entsprechenden Satz für die Subtraktion.

3. Schreibe nach Definition 54.1 die Lösung der Gleichung als Differenz und berechne sie.

a) $3+x=1$ **b)** $-3+x=1$ **c)** $3+x=-1$
d) $-3+x=-1$ **e)** $x+2{,}7=1{,}5$ **f)** $x+(-2{,}7)=1{,}5$
g) $x+2{,}7=-1{,}5$ **h)** $x+(-2{,}7)=-1{,}5$ **i)** $5\frac{1}{3}=x+8\frac{1}{2}$
k) $2\frac{1}{3}-4\frac{1}{12}=9\frac{1}{2}+x$ **l)** $231{,}77+378{,}29=-167{,}71+x$

4. Berechne:

a) $21-(17+14)$ **b)** $(-123)-(213-321)$
c) $(-76)-(18+58)$ **d)** $(-51{,}6)+(34{,}9-(-17{,}7))$
e) $((-15\frac{13}{24})+81\frac{5}{9})-100$ **f)** $13{,}25-(2\frac{3}{4}-(-1\frac{2}{3}))$

5. Berechne:

a) $(365-640)+(575-700)$
b) $(62{,}8-20{,}25)-(32{,}08+10{,}47)$
c) $((-0{,}216)+0{,}173)-(17{,}3-21{,}6)$
d) $(16-12\frac{4}{15})-(8{,}75+(-3\frac{7}{9}))$

• **6.** Bestimme die Lösung einer Gleichung vom Typ $x - a = b$, indem du $x - a$ als Summe schreibst und Definition 54.1 anwendest.

a) $x - 5 = -3$ **b)** $x - 22 = 29{,}3$

c) $x - 2\frac{1}{9} = 3\frac{1}{3} - 6\frac{1}{5}$ **d)** $5\frac{1}{6} - 14\frac{1}{2} = x - 8\frac{1}{3}$

e) $33 - (17 + 48) = x - 25$ **f)** $x - (3\frac{1}{12} + 8\frac{1}{36}) = 4\frac{1}{18} - 9\frac{1}{9}$

7. Bestimme die Lösung einer Gleichung vom Typ $a - x = b$, indem du $a - x$ als Summe schreibst und nach Definition 54.1 zuerst $-x$ berechnest.

a) $10 - x = 20$ **b)** $3\frac{1}{4} - x = 5\frac{1}{8}$

c) $6{,}92 - x = 2{,}17 - (0{,}25 - 4{,}5)$ **d)** $4\frac{1}{6} + 3\frac{1}{6} = 7\frac{1}{3} - x$

8. Während eines Wintertages wurde im Abstand von je 3 Stunden die Temperatur abgelesen und notiert:

Uhrzeit	0^h	3^h	6^h	9^h	12^h	15^h	18^h	21^h	24^h
Temperatur in °C	$-9{,}5$	$-10{,}7$	$-11{,}8$	$-5{,}6$	2,7	2,1	$-2{,}1$	$-5{,}8$	$-7{,}3$

a) Berechne die Temperaturänderung zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Ablesungen.

b) In welchem dieser Zeitabschnitte war die Temperaturabnahme, in welchem die Temperaturzunahme am größten?

9. Gase werden bei sehr tiefen Temperaturen flüssig, z. B. Sauerstoff bei $-183\,°C$ und Helium bei $-269\,°C$. Um wieviel Grad muß man Helium, das mit flüssigem Sauerstoff vorgekühlt wurde, noch weiter abkühlen, um es zu verflüssigen?

10. Wenn man Quecksilber abkühlt, erstarrt es bei einer Temperatur von $-59\,°C$. Um wieviel Grad muß sich Quecksilber, das die Temperatur von flüssigem Sauerstoff ($-183\,°C$) hat, erwärmen, damit es wieder flüssig wird?

11. Auf das Bankkonto des Herrn Knapp wurde am Monatsersten sein Gehalt in Höhe von 3275 DM überwiesen. Am gleichen Tag wurden 840 DM als Monatsmiete abgebucht. Danach betrug sein Guthaben 2361,42 DM. Wie hoch war der Kontostand vor den beiden Buchungen?

12. Auf einer Reise durch den Westen der USA übernachtet Familie Brown im berühmten Death Valley (California). Am nächsten Tag fahren sie weiter nach NW in die Sierra Nevada und erreichen dabei am Tioga-Paß (Meereshöhe 3031) den höchsten Punkt. Herr Brown stellt fest, daß sie damit an diesem Tag einen Höhenunterschied von 3116 m überwunden haben. Auf welcher Meereshöhe liegt demnach der tiefste Punkt des Death Valley (= tiefster Punkt in den USA!)?