Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 2000

7.2 Volumen

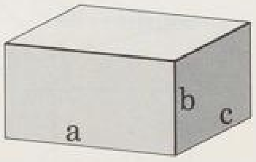
urn:nbn:de:hbz:466:1-83477

7.2 Volumen

Bei der Raummessung macht man's wie bei der Flächenmessung. Als Raumeinheit dient ein Würfel mit der Seitenlänge 1: der Einheitswürfel. Will man den Rauminhalt (das Volumen) eines Körpers messen, so muss man feststellen, wie oft der Einheitswürfel im Körper enthalten ist. Passt er zum Beispiel genau $3 \cdot 4 \cdot 6$mal in einen Quader, dann sagt man: Der Quader hat das Volumen 72 ($= 3 \cdot 4 \cdot 6$). 72 ist die Maßzahl bezüglich der gewählten Raumeinheit. Gewöhnlich bezeichnet man das Volumen mit V. Für einen Quader mit den Kantenlängen a, b und c gilt – wie wir schon wissen

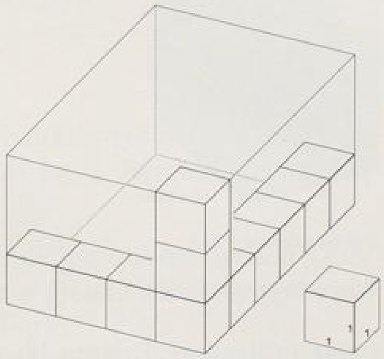
Volumen des Quaders

$V = abc$



Quadervolumen:

$4 \cdot 3 \cdot 6 = 72$



Einheitswürfel

In der Geometrie sind Volumina reine Zahlen. In der Wirklichkeit gibt man den Raumeinheiten Namen, die man von den Längeneinheiten ableitet: Zum Beispiel ist 1 Kubikmeter = 1 m^3 das Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge 1 m. Entsprechend sind in Gebrauch 1 dm^3, 1 cm^3 und 1 mm^3.

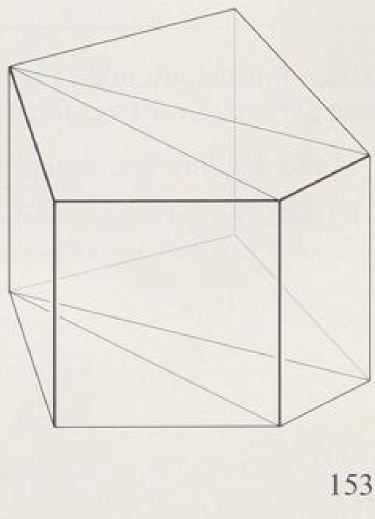
Achte auf die Umrechnungszahl 1 000: $1\,m^3 = 1\,000\,dm^3$ ($= 1\,000\,l$)

$$1\,dm^3 = 1\,000\,cm^3$$
$$1\,cm^3 = 1\,000\,mm^3$$

Bei komplizierteren Körpern ist es schwieriger, das Volumen zu berechnen. Eine naheliegende Eigenschaft des Rauminhalts hilft uns dann weiter:

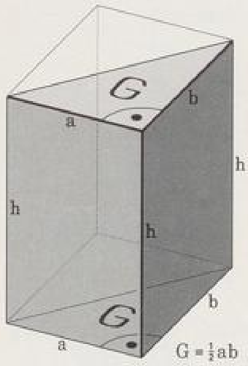
Zerlegt man einen Körper in Teilkörper, so ist sein Volumen gleich der Summe der Volumina der Teilkörper.

Zerlegung in dreiseitige Prismen



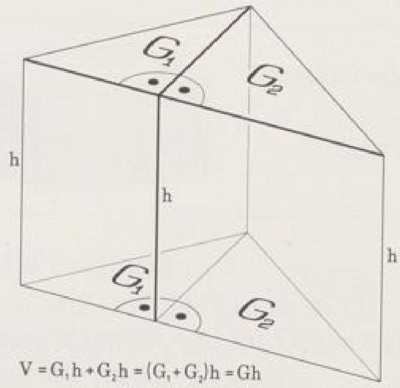
Volumen des geraden Prismas

Jedes Prisma lässt sich in dreiseitige Prismen zerlegen. Deshalb suchen wir eine Formel fürs Volumen dreiseitiger Prismen. Sie ist recht einfach, wenn die Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck ist. Ein solches Prisma kann als halber Quader aufgefasst werden, sein Volumen ist $V = \frac{1}{2}$ abh. Kürzt man mit G den Inhalt $\frac{1}{2}$ ab der Prismengrundfläche ab, so ist $V = Gh$.



Quadervolumen: abh

Prismavolumen: $\frac{1}{2}abh = Gh$



$V = G_1h + G_2h = (G_1 + G_2)h = Gh$

Jedes dreiseitige Prisma lässt sich in zwei dreiseitige Prismen zerlegen, die rechtwinklige Dreiecke als Grundflächen haben, siehe Bild.
Ist ein gerades Prisma in n dreiseitige Prismen zerlegt, so gilt:

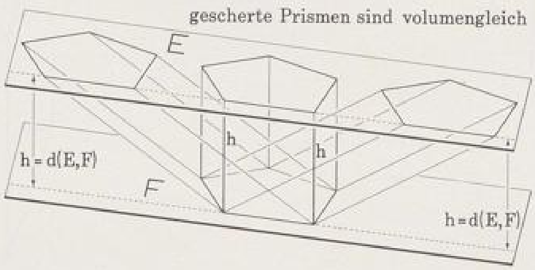
$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 + \ldots + V_n \\ &= G_1h + G_2h + \ldots + G_nh \\ &= (G_1 + G_2 + \ldots + G_n)h = Gh. \end{aligned}$$

Wir merken uns

Volumen des Prismas

$V = Gh$

Diese Formel gilt auch fürs schiefe Prisma. Dabei ist h der Abstand der Ebenen, in denen Grund- und Deckfläche liegen.



Aufgaben

1. Berechne die fehlenden Stücke eines geraden Prismas

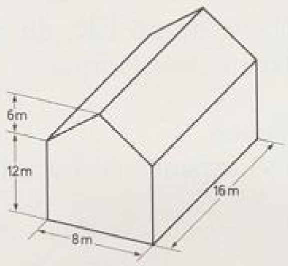
	Inhalt G der Grundfläche	Umfang u der Grundfläche	Höhe h	Volumen V	Inhalt S der Oberfläche
a)	2,5	12,5	8		
b)	18	36		90	
c)	0,24	2,4			6
d)			0,7	0,077	1,27
e)	0,3		0,7		6,27

2. Ein gerades Prisma hat als Grundfläche ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit einer Kathetenlänge 4. Die Höhe des Prismas ist 6. Berechne das Volumen.

3. Bei der Herstellung einer Steinsäule wird von der zunächst quadratischen Querschnittsfläche (Seitenlänge $a = 20$ cm) an jeder Ecke ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck (Kathetenlänge $b = 4$ cm) weggeschliffen.
Berechne das Volumen der entstehenden achtkantigen Säule mit der Höhe $h = 80$ cm.

4. Das Profil eines 50 km langen Kanals ist ein gleichschenkliges Trapez, die Grundseiten sind 6 m und 8 m lang, die Höhe ist 2 m.
a) Wie viel Kubikmeter Wasser enthält der volle Kanal?
b) Wie viel Wasser fließt in einer Minute an einem Fischer vorbei, wenn die Strömungsgeschwindigkeit 0,5 m/s beträgt?

5. HAUS



Berechne das Dachvolumen und das Volumen des gesamten umbauten Raums.

6. Ein dreiseitiges Glasprisma hat als Grundfläche ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck. Die Höhe und die Katheten sind 8 cm lang. Die Dichte von Glas ist 2,21 g/cm^3.
Berechne die Masse.

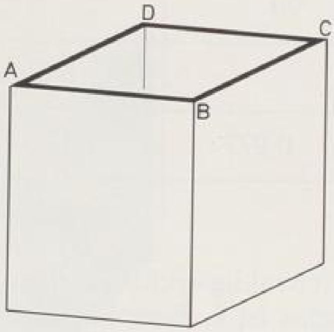
•7. VASE

Eine Tonvase hat als Grundfläche eine Raute, die Diagonalen haben die Längen $\overline{AC} = 20$ cm und $\overline{BD} = 10$ cm. Die Diagonalen der inneren Rauten sind 17 cm und 8 cm lang.

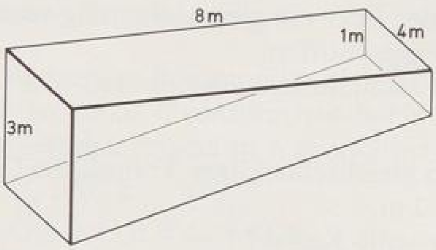
Der Boden ist 2 cm dick und die Vase ist 15 cm hoch.

a) Wie viel cm^3 Wasser sind in der Vase, wenn sie bis 2 cm unter den Rand gefüllt ist?

b) Wie viel cm^3 Ton waren zur Herstellung nötig?



8. SCHWIMMBECKEN



Ein Schwimmbecken hat die Gestalt eines vierseitigen Prismas. Wie viel Kubikmeter fasst es, wenn es randvoll ist?

9. Der Quader ABCDEFGH hat die Kantenlänge $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 4$ und $\overline{AE} = 7$.

Der Punkt K liegt so auf [BF], dass $\overline{BK} = 4$ ist. Eine Ebene durch EK, die senkrecht auf dem Rechteck ABFE steht, zerlegt den Quader in zwei Körper.

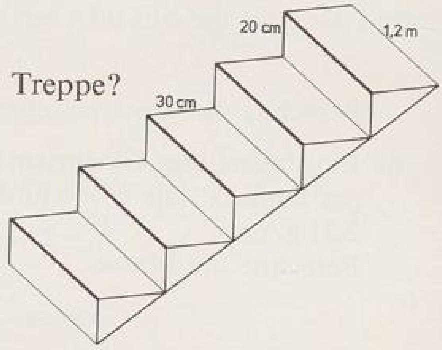
a) Fertige eine Skizze an.

b) Berechne die Volumina der beiden entstehenden Prismen.

c) Berechne die Inhalte der Oberflächen von Quader und Prismen (verwende näherungsweise $\overline{EK} = 5{,}8$).

10. TREPPE

Wie viel m^3 Beton braucht man zum Gießen der Treppe?



11. Im Quader von Aufgabe **9.** liegt L so auf [AE], dass $\overline{LE} = 2{,}5$ ist. M ist der Mittelpunkt von [BF]. Eine Ebene durch LM, die senkrecht auf dem Rechteck ABFE steht, zerlegt den Quader in zwei Körper.

a) Fertige eine Skizze an.

b) Berechne die Inhalte der beiden Prismenoberflächen (verwende näherungsweise $\overline{LM} = 5{,}1$).

c) Berechne das Verhältnis der Volumina der beiden Prismen.

d) Wohin müsste der Punkt M auf [BF] verlegt werden, damit beide Prismen denselben Rauminhalt haben?

• 12. Ein dreiseitiges Prisma hat als Grundfläche ein Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 5. Es soll durch drei geradlinige Schnitte in sechs volumengleiche dreiseitige Prismen zerlegt werden, jeder Schnitt geht durch eine Ecke.
Wie muss man schneiden? Begründung!