UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

München, 2000

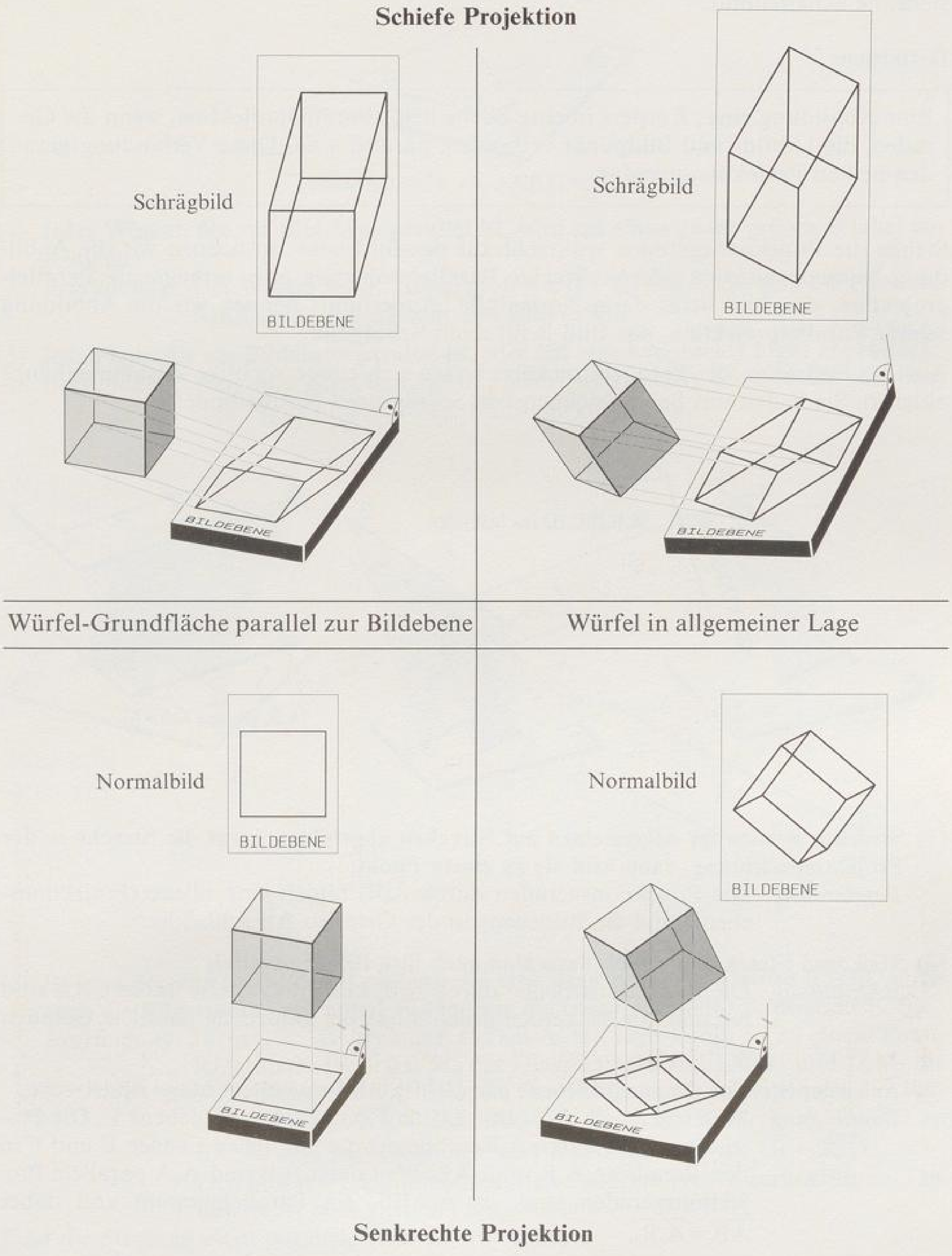
8.1 Parallelprojektion

urn:nbn:de:hbz:466:1-83477

Visual Library

8.1 Parallelprojektion

Parallelprojektion eines Würfels in eine waagrechte Ebene



UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

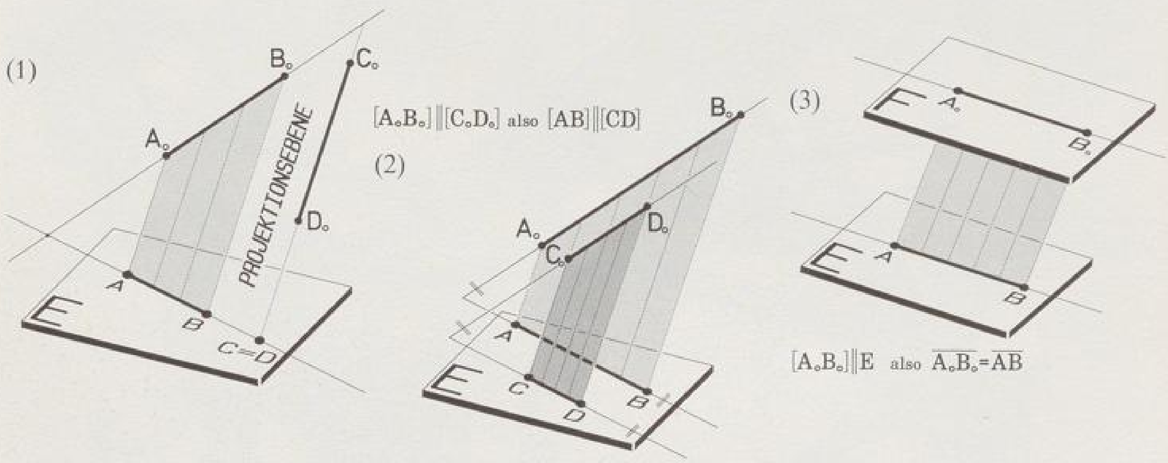
Beleuchtet man einen Körper mit parallelem Licht (zum Beispiel mit Sonnenlicht), so heißt der Schatten, der auf eine ebene Fläche (Bildebene) fällt, Parallelprojektion des Körpers. Dabei wird jeder Punkt des Körpers auf einen Schattenpunkt in der Ebene abgebildet. Mit Parallelprojektion bezeichnet man sowohl die Abbildung als auch das entstehende Schattenbild.

Definition:

> Eine Abbildung eines Körpers in eine Ebene heißt **Parallelprojektion,** wenn die Geraden, die Urbild- und Bildpunkt verbinden, parallel sind. Diese Verbindungsgeraden heißen **Projektionsgeraden.**

Stehen die Projektionsgeraden senkrecht auf der Bildebene, so nennen wir die Abbildung **Normalprojektion** oder **senkrechte Parallelprojektion** oder **orthogonale Parallelprojektion,** das Bild heißt dann **Normalbild.** Andernfalls nennen wir die Abbildung **schiefe Parallelprojektion,** das Bild heißt dann **Schrägbild.**

Aus der Definition der Parallelprojektion lassen sich einige wichtige Zusammenhänge ableiten. Sie helfen uns beim Zeichnen von Schräg- und Normalbildern.



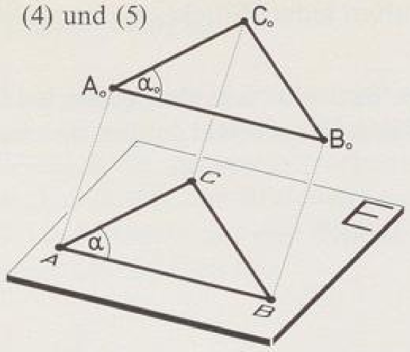
(1) **Strecken werden im Allgemeinen auf Strecken abgebildet. Liegt die Strecke in der Projektionsrichtung, dann wird sie zu einem Punkt.**
Begründung: Die Projektionsgeraden durch A_0B_0 bilden eine Ebene (Projektionsebene), die die Bildebene in der Geraden AB schneidet.

(2) **Sind zwei Strecken parallel, dann sind auch ihre Bilder parallel.**
Begründung: Die Projektionsebenen durch A_0B_0 beziehungsweise durch C_0D_0 sind parallel. Sie schneiden deshalb aus der Bildebene parallele Geraden aus.

(3) **Aus jeder Strecke, die zur Bildebene parallel ist, wird eine gleich lange Bildstrecke.**
Begründung: Man legt durch A_0B_0 eine Ebene F parallel zur Bildebene E. Die Projektionsebene durch A_0B_0 schneidet die parallelen Ebenen E und F in den Parallelen A_0B_0 und AB. Weil auch B_0B und A_0A parallele Projektionsgeraden sind, ist A_0ABB_0 ein Parallelogramm und daher $\overline{AB} = \overline{A_0B_0}$.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

(4) und (5)

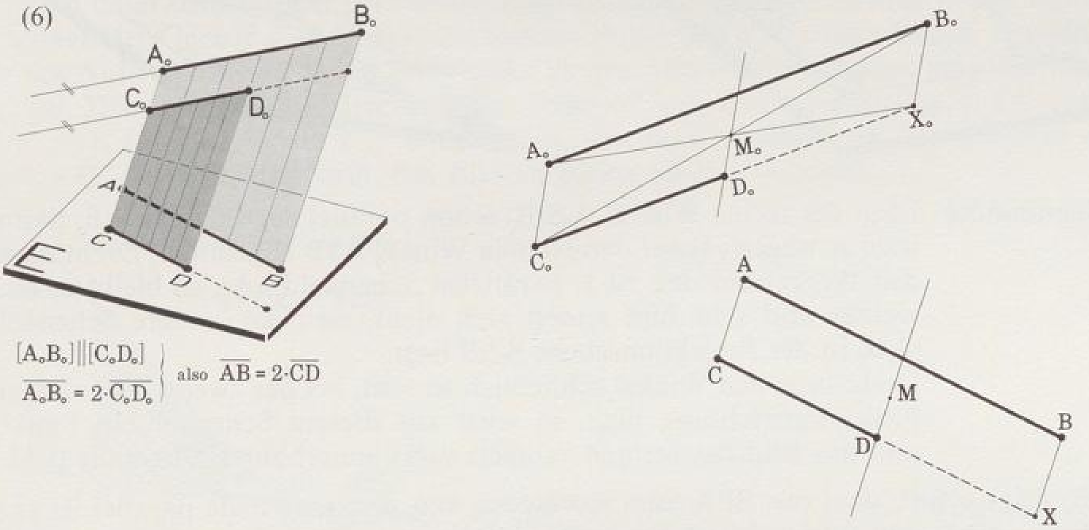


Ebene$(A_0B_0C_0) \parallel E$ also $\triangle A_0B_0C_0 \cong \triangle ABC$

(4) **Jeder Winkel, der zur Bildebene parallel ist, wird auf einen gleich großen Winkel abgebildet.**
Begründung: Der Winkel $B_0A_0C_0$ ist so groß wie der Winkel BAC, weil die Dreiecke $A_0B_0C_0$ und ABC kongruent sind (SSS).

(5) **Jede Figur, die zur Bildebene parallel ist, wird auf eine kongruente Figur abgebildet.**
Begründung: Weil alle Streckenlängen und Winkelgrößen unverändert bleiben, sind Figur und parallele Bildfigur kongruent.

(6)



$\left.\begin{array}{l}[A_0B_0] \parallel [C_0D_0] \\ \overline{A_0B_0} = 2 \cdot \overline{C_0D_0}\end{array}\right\}$ also $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{CD}$

(6) **Ist eine Strecke $[A_0B_0]$ n-mal so lang wie eine dazu parallele Strecke $[C_0D_0]$, so ist auch die Bildstrecke [AB] n-mal so lang wie die (dazu parallele) Bildstrecke [CD].**
Begründung: für $n = 2$: Wir ergänzen $C_0D_0B_0A_0$ mit dem Punkt X_0 zu einem Parallelogramm. Darin ist M_0 der Diagonalen-Schnittpunkt und D_0M_0 die Mittelparallele. Das Bild des Parallelogramms ist wegen (2) das Parallelogramm CXBA. Das Bild von D_0M_0 läuft durch M parallel zu BX, ist also Mittelparallele in CXBA. Deshalb ist $\overline{AB} = 2\overline{CD}$.
Den Fall $n \neq 2$ kann man auf den Sonderfall $n = 2$ zurückführen. Der Beweis ist aber ziemlich langwierig.

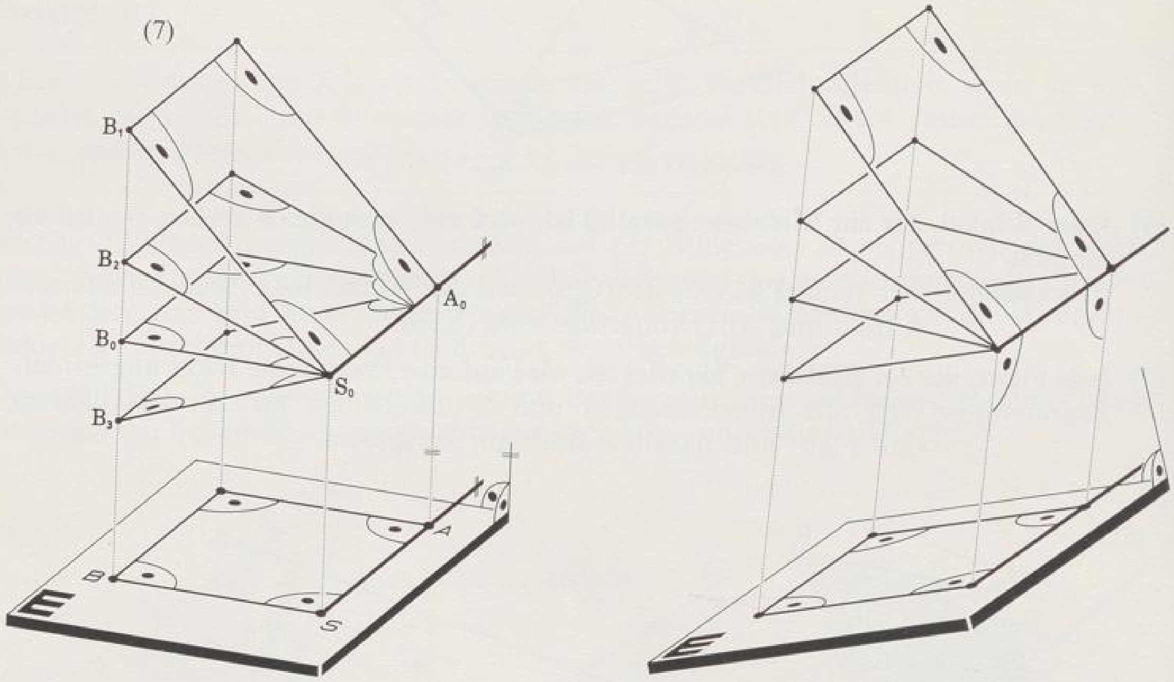
Sind die Strecken nicht parallel, dann gilt (6) nicht.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

(1) bis (6) sind die Eigenschaften jeder Projektion. Speziell für die senkrechte Projektion gilt:

(7) **Jeder rechte Winkel, von dem ein Schenkel (oder beide) parallel zur Bildebene ist, wird auf einen rechten Winkel abgebildet (außer der andere Schenkel liegt in Projektionsrichtung).**

(7)



Begründung: Liegt der rechte Winkel $A_0S_0B_0$ schon parallel zur Bildebene E, dann wird er wegen (4) auf den rechten Winkel ASB abgebildet. Dreht man den Winkel um den zu E parallelen Schenkel $[S_0A_0$, so bleibt er ein rechter und sein Bild ändert sich nicht, weil der andere Schenkel $[S_0B_0$ in der Projektionsebene S_0SB liegt.
Dreht man den Winkel schließlich so weit, bis der zweite Schenkel in Projektionsrichtung liegt, so wird aus diesem Schenkel ein Punkt und das Bild des rechten Winkels verkümmert zur Halbgerade [SA].

Aus (7) folgt sofort, dass das Bild eines Rechtecks, von dem eine Seite parallel ist zur Bildebene, wieder ein Rechteck (oder eine Strecke) ist.
Damit ein Rechteck mit einer zur Bildebene parallelen Seite als Rechteck abgebildet wird, muss die Projektionsrichtung nicht einmal senkrecht zur Bildebene sein, es genügt sogar, dass sie senkrecht zu dieser Seite ist.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN