Anschauliche Geometrie

Barth, Friedrich

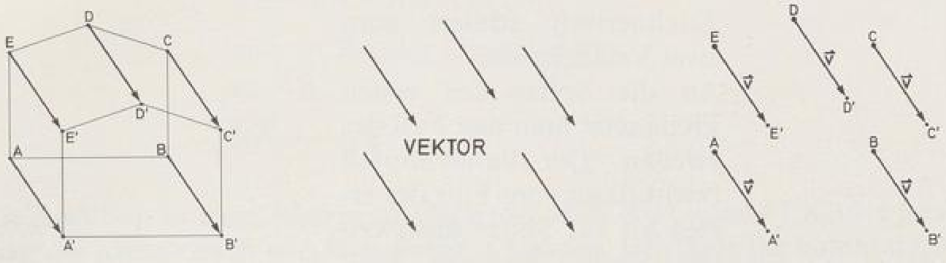
München, 2000

9. Kapitel: Vektoren

9. Kapitel

Vektoren

Verschiebt man eine Strecke [AB] parallel, dann bestimmen Strecke [AB] und Bildstrecke [A′B′] ein Parallelogramm.
Wenn man ein Fünfeck ABCDE verschiebt, dann bewegt sich jeder Punkt gleich weit in dieselbe Richtung. »gleich weit in dieselbe Richtung« lässt sich auch mit einem Pfeil festlegen: Die Pfeilrichtung sagt, wohin es geht, und die Pfeillänge sagt, wie weit es geht.



$$\vec{v} = \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{EE'}$$

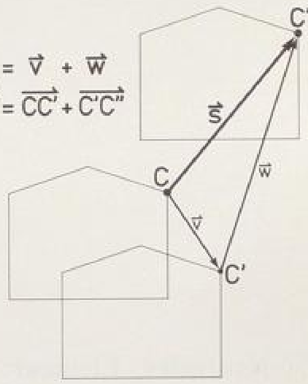
Alle Pfeile, die gleich lang sind, und in die gleiche Richtung zeigen, also gleichgerichtet sind, beschreiben dieselbe Verschiebung. Als Sammelbegriff für eine Menge aller gleich langen und gleich gerichteten Pfeile verwendet man die Bezeichnung **Vektor.** Jeder Pfeil der Menge heißt **Repräsentant** des Vektors. Oft nennt man auch die Pfeile kurz und bündig Vektoren. Das ist so ähnlich wie bei den Brüchen, wo zum Beispiel die Zahl mit dem Wert 0,5 durch unendlich viele Repräsentanten wie $\frac{1}{2}$ oder $\frac{2}{4}$ oder … dargestellt wird.

Bezeichnungen: Repräsentant und Vektor kennzeichnet man mit Anfangs- und Endpunkt und einem Pfeil darüber oder nur mit einem kleinen Buchstaben und einem Pfeil darüber.

Für Verschiebungen gilt der sofort einleuchtende

Satz:
Führt man zwei Verschiebungen $\vec{v}$ und $\vec{w}$ nacheinander aus, so gibt es eine Verschiebung $\vec{s}$, die dasselbe leistet.

$$\vec{s} = \vec{v} + \vec{w}$$
$$\overrightarrow{CC''} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'C''}$$



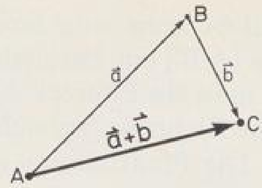
Auf den Beweis verzichten wir. Dieser Satz dient zur Definition der Summe zweier Vektoren:

Definition:

> Führt die Verschiebung $\vec{s}$ zum selben Ergebnis wie die Nacheinanderausführung der Verschiebungen $\vec{v}$ und $\vec{w}$, so nennt man $\vec{s}$ den **Summenvektor** von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ und schreibt: $\vec{s} = \vec{v} + \vec{w}$

Bei der Vektoraddition verwendet man dasselbe Pluszeichen wie bei der Zahlenaddition, weil beide dieselben Gesetzmäßigkeiten haben.

Ⓔ **Eindeutige Existenz:** Zu je zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gibt es immer einen eindeutigen Summenvektor $\vec{s}$.

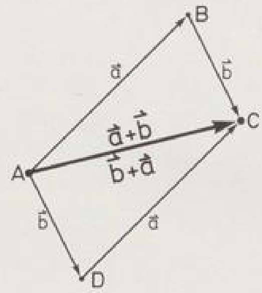


$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

Zeichnerisch addiert man zwei Vektoren so:
An die Spitze des ersten Pfeils setzt man den Fuß des zweiten. Der Summenpfeil reicht dann vom Fuß des ersten bis zur Spitze des zweiten Pfeils. Welchen Pfeil man zuerst nimmt, ist egal, denn es gilt das

Ⓚ **Kommutativ-Gesetz:** Die Reihenfolge spielt beim Addieren keine Rolle.

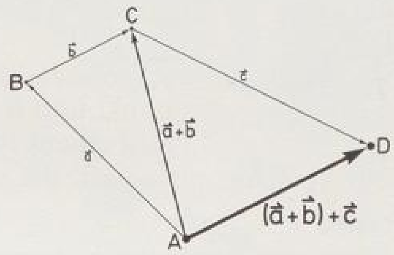


$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

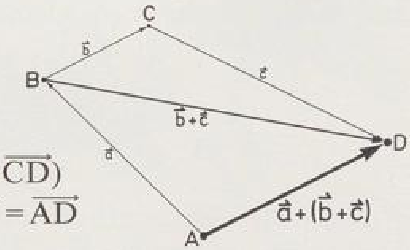
$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$

Ⓐ **Assoziativ-Gesetz:** Bei der Addition dreier Vektoren liefern beide Klammerungen dasselbe Ergebnis:



$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

deswegen kann man die Klammern auch weglassen. Man sieht das leicht ein, wenn man die Eigenschaft E ausnutzt:

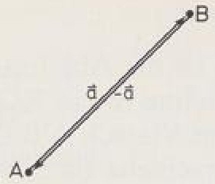


$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$$
$$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} \quad = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$$

Ⓝ **Neutrales Element:** Es gibt einen Vektor, der beim Addieren nichts bewirkt, den **Nullvektor $\vec{0}$;** bei ihm fallen Anfangs- und Endpunkt zusammen. Wegen seiner Länge null hat er keine Richtung.

$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$

① **Inverse:** Zu jedem Vektor $\vec{a}$ gibt es einen **Gegenvektor** $-\vec{a}$. $-\vec{a}$ macht die Verschiebung $\vec{a}$ rückgängig.



$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$,
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$,

also ist $\overrightarrow{BA}$ der Gegenvektor zu $\overrightarrow{AB}$:

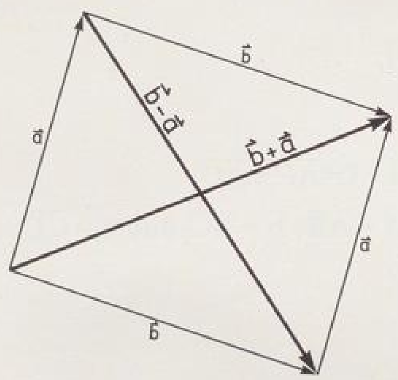
$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

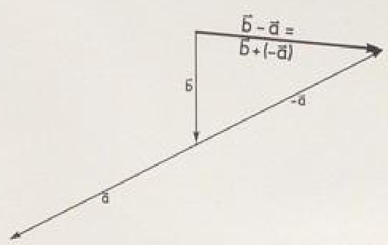
Wenn die Addition in einer Menge so erklärt ist, dass die Gesetze EKANI gelten, dann nennt man die Menge auch eine **kommutative Gruppe.** Beispiele für kommutative Gruppen sind
- Menge der Vektoren
- Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$
- Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$
- Menge der Drehwinkel.

Aus Bequemlichkeit führt man auch eine Vektorsubtraktion ein. Man erklärt sie mit der Addition: Unter $\vec{b} - \vec{a}$ versteht man die Summe von $\vec{b}$ und dem Gegenvektor von $\vec{a}$.

$\boxed{\vec{b} - \vec{a} = \vec{b} + (-\vec{a})}$

Zeichnerisch kann man aber auch so vorgehen:
Man zeichnet die Pfeile $\vec{a}$ und $\vec{b}$ vom gleichen Punkt aus. Der Differenzvektor $\vec{b} - \vec{a}$ reicht dann von der Spitze von $\vec{a}$ zur Spitze von $\vec{b}$.





Aufgaben

KOSY ist die Abkürzung von Koordinatensystem, O ist der Ursprung im KOSY.

1. Zeichne in ein KOSY das Viereck ABCD und verschiebe es mit $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ 7
zum Viereck A′B′C′D′. 1 0 11
Verschiebe dann mit $\vec{w} = \overrightarrow{CA}$ das Viereck A′B′C′D′ zum Viereck A″B″-C″D″. 3
Die Verschiebung $\vec{s} = \vec{v} + \vec{w}$ führt ABCD direkt in A″B″C″D″ über.
Bestimme die Koordinaten von X und Y, wenn gilt $\vec{s} = \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{XY}$.
a) A(1 | 1), B(4 | 1), C(3 | 4), D(0 | 3)
b) A(1 | 1), B(5 | 0), C(3 | 2), D(3 | 5)

2. Zeichne in ein KOSY die Punkte A(−1 | −2), B(3 | 0), C(2 | 2), D(0 | 1) und E(−2 | 3).
Bestimme die Punkte V, W, X, Y und Z so, dass gilt:
$\vec{v} = \overrightarrow{AV} = \overrightarrow{WB} = \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{DY} = \overrightarrow{ZE}$.
a) $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$ **b)** $\vec{v} = \overrightarrow{AO}$ **c)** $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$

3. Zeichne in ein KOSY A(1 | 0), B(4 | 2) und C(2 | 4).
Zeichne den Summenvektor.
a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ **b)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$ **c)** $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$
d $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$ **e)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$

4. Zeichne A(1 | 1), B(4 | 1), C(6 | 3) und D(3 | 4) in ein KOSY. Die Vektoren $\vec{a}$, 6
$\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind definiert durch $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$. 0 0 7
Drücke folgende Vektoren mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus: 0
a) $\overrightarrow{AC}$ **b)** $\overrightarrow{CA}$ **c)** $\overrightarrow{DA}$ **d)** $\overrightarrow{BD}$

5. Zeichne das Fünfeck ABCDE mit A(0 | 0), B(3 | 0), C(4 | 1), D(4 | 4) und E(1 | 3).
$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ sind festgelegt durch $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = 2\overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ und $\vec{d} = \overrightarrow{DE}$.
Drücke folgende Vektoren mit A, B, C, D und E aus:
a) $\vec{a} + \vec{b}$ **b)** $-\vec{b} - \vec{c}$ **c)** $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ **d)** $-(\vec{b} + c + \vec{d})$ **e)** $-\vec{b} - (\vec{a} + \vec{c})$

6. Vereinfache
a) $\overrightarrow{UV} + \overrightarrow{VW}$ **b)** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}$ **c)** $\overrightarrow{RS} - \overrightarrow{RT}$
d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{TA} + \overrightarrow{BT}$ **e)** $\overrightarrow{XY} - \overrightarrow{ZY} - \overrightarrow{XZ}$

7. Bestimme $\vec{x}$:
a) $\overrightarrow{AB} + \vec{x} = \vec{0}$ **b)** $\overrightarrow{AB} + \vec{x} = \overrightarrow{AC}$ **c)** $\overrightarrow{AB} - \vec{x} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$

8. ABCDEF ist ein regelmäßiges Sechseck mit $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$.
Drücke mit $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus:
a) $\overrightarrow{ED}$ **b)** $\overrightarrow{DE}$ **c)** $\overrightarrow{FD}$ **d)** $\overrightarrow{FC}$
e) $\overrightarrow{FB}$ **f)** $\overrightarrow{FA}$ **g)** $\overrightarrow{AD}$

Griechisches Alphabet

Α α	Α α	Alpha	Ν ν	Ν ν	Ny
Β β	Β β	Beta	Ξ ξ	Ξ ξ	Xi
Γ γ	Γ γ	Gamma	Ο ο	Ο ο	Omikron
Δ δ	Δ δ	Delta	Π π	Π π	Pi
Ε ε	Ε ε	Epsilon	Ρ ρ	Ρ ϱ	Rho
Ζ ζ	Ζ ζ	Zeta	Σ σ	Σ σ	Sigma
Η η	Η η	Eta	Τ τ	Τ τ	Tau
Θ ϑ	Θ ϑ	Theta	Υ υ	Υ υ	Ypsilon
Ι ι	Ι ι	Iota	Φ φ	Φ φ	Phi
Κ κ	Κ ϰ	Kappa	Χ χ	Χ χ	Chi
Λ λ	Λ λ	Lambda	Ψ ψ	Ψ ψ	Psi
Μ μ	Μ μ	My	Ω ω	Ω ω	Omega

Wortkunde: Griechisch

Stamm		enthalten in	wörtlich übersetzt	Bedeutung
ἀξίωμα axioma	Werschätzung, Forderung	**Axiom** (das)		Grundvoraussetzung
βάσις basis	Schritt, Fuß Grundlage	**Basis** **basieren** auf	Schritt	Grundlage, -linie, -fläche, -zahl beruhen auf, sich gründen auf
γῆ gä γέω- geo-	Erde, Feld Land, Grund (Vorsilbe)	**Geometrie**	Landmessung	Lehre von den ebenen und räumlichen Figuren
		Geografie	Erdbeschreibung	Erdkunde
		Geologie	Erdwissenschaft	Lehre von Entstehung und Bau der Erde
		geozentrisch	erdmittelpunktig	auf die Erde als Mittelpunkt bezogen
γράφειν grafein γράμμα gramma (γράφειν ist verwandt mit ›kerben‹)	(ein)ritzen, schreiben zeichnen Buchstabe, (In)Schrift Geschriebenes, Zeichnung	**Grafik**	Schreib-, Zeichenkunst	Sammelbegriff für Holzschnitt, Kupferstich, Lithografie und Handzeichnung
		Griffel		Schreib-, Zeichenstift
		Fotografie	Lichtzeichnung	Verfahren zur Herstellung von Bildern, die durch Licht erzeugt werden
		Geografie	Erdbeschreibung	Erdkunde
		Paragraf	Danebengeschriebenes	mit § numerierter kleiner Abschnitt
		Parallelogramm	Nebeneinandergeschriebenes	Viereck mit parallelen Seiten
		Programm	Vorhergeschriebenes	festgelegter Ablauf einer Veranstaltung, von Befehlen (Computer-Programmierung)
		Pentagramm	Fünfzeichnung	fünfzackiger Stern, Drudenfuß
		Diagramm		zeichnerische Veranschaulichung
		Telegraf, -gramm	Fernschreiber, -schreiben	Fernschreiber, Fernschreiben
γωνία gonia (γωνία ist verwandt mit ›Knie‹)	Winkel(maß), Ecke	**Gon**	Winkel	Gradmaß des Winkels: 100 Gon = 90°
		Goniometrie	Winkelmessung	Rechnung mit Winkelfunktionen
		Polygon (das)	Vieleck	Vieleck
		Diagonale	Durcheck	Strecke durch (nicht benachbarte) Ecken
		Pentagon (das)	Fünfeck	Fünfeck, amerikanisches Verteidigungsministerium (fünfeckiger Grundriss)
		Trigonometrie	Dreiecksmessung	Dreiecksberechnung, -messung
διά dia	durch, zwischen, auseinander	**Diagonale**	Durcheck	Strecke durch (nicht benachbarte) Ecken
		Diagramm		zeichnerische Veranschaulichung
		Diapositiv		durchsichtiges Positiv eines Fotos
κατά kata	(her)unter, nieder	**Katheten**	Herabhängende	Dreieckseiten, die einen rechten Winkel bilden
		Kathode	Ausgang, Heimkehr	negative Elektrode

Wortkunde: Griechisch

Stamm		enthalten in	wörtlich übersetzt	Bedeutung
κρίσις	(Unter-, Ent-)	**Krise**		Entscheidungssituation, Höhe-, Wendepunkt
krisis	Scheidung, Urteil			
κριτήριον	Kennzeichnen	**Kriterium**		entscheidendes Kennzeichen
kritarion		**Kritik**		Beurteilung, (oft) Tadel
		kritisch		streng prüfend, tadelnd, bedenklich
μέτρον	Maß	**Meter**	Maß	Längeneinheit
metron		**Geometrie**	Landmessung	Lehre von den ebenen und räumlichen Figuren
-μετρία	-messung	**Planimetrie**	Flachmessung	Lehre von den ebenen Figuren
-metria		**Stereometrie**	Raummessung	Lehre von den räumlichen Figuren
		Symmetrie	Ebenmaß	Ebenmaß, Spiegelungsgleichheit
παρά	(da)neben,	**parallel**	nebeneinander	gleich laufend
para	vorbei, gegen	**Parallelogramm**	Nebeneinandergeschriebenes	Viereck mit parallelen Seiten
		Parallelprojektion		durch parallele Strahlen verursachter Schatten
		Parabel	Danebenwurf	Wurflinie
		Paragraf	Danebengeschriebenes	mit § numerierter kleiner Abschnitt
		paradox	gegen die Meinung	scheinbar widersinnig
πολύ	viel	**Polygon**	Vieleck	Vieleck
poly		**Polyeder**	Vielfläche	Vielflach, Vielflächner
		Polynom	Vielausdruck	mehrgliedriger Rechenausdruck
		Polygamie	Vielheirat	Vielehe
ὑπό	unter, unterhalb	**Hypotenuse**	Daruntergespannte	Strecke ›unter‹, gegenüber dem rechten Winkel
hypo		**Hypothese**	Unterlage, Unterstellung	unbewiesene Annahme
τράπεζα	Tisch	**Trapez**	Tisch	Viereck mit zwei parallelen Seiten
trapeza				

Wortkunde: Latein

Stamm		enthalten in	wörtlich übersetzt	Bedeutung
cavea	Höhle, Käfig	**konkav**	hohl	nach innen gewölbt
circus	Kreis, Ring	**Zirkus** **zirka** **zirkulieren** **Zirkel** **Zirkelschluss**	Zirkus, Rennbahn ringsherum kreisen sich im Kreis drehender Beweis	Zirkus ungefähr im Umlauf sein Gerät zum Kreiszeichnen und Streckenabtragen Beweis, bei dem die Behauptung in der Voraussetzung steckt
congruens	übereinstimmend	**kongruent**	übereinstimmend	deckungsgleich
finis	Grenze, Ende	**Finale** **Finish** **definieren** **definitiv**	 abgrenzen	Schlusssatz, -teil, Endrunde letzter Schliff, Endkampf begrifflich bestimmen endgültig
linea (linea ist verwandt mit Leine)	Faden, Linie	**Linie** **Lineal** **linear**	Linie	Linie Gerät zum Zeichnen gerader Linien geradlinig
ordo	Reihenfolge (An)Ordnung Rang	**Orden** **ordnen** **Order** **ordinär** **Ordinalzahl** **Ordinate** **koordinieren** **Koordinaten**	 Entwicklung: ordentlich → gewöhnlich → niedrig → gemein → vulgär beiordnen	Ehrenzeichen ordnen Befehl, Auftrag Ordnungszahl: 1, 2, 3, usw. y-Wert eines Punkts im Koordinatensystem aufeinander abstimmen auf den Ursprung bezogene Zahlen
plenus	voll, vollständig	**Plenum** **komplett** **komplementär** **Komplementwinkel** **Supplement** **Supplementwinkel**	Volles voll machend	Vollversammlung des Parlaments vollständig ergänzend Winkel, die sich zu 90° ergänzen Ergänzungsband, -teil Winkel, die sich zu 180° ergänzen
postulare (das Stammwort ist poscere: fordern poscere ist verwandt mit forschen)	fordern	**Postulat** **postulieren**	Forderung fordern	logische und notwendige Annahme, die unbewiesen, aber glaubhaft ist ein Postulat aufstellen
quadrum	Viereck	**Quader** **Quadrat** **Quadrant**		Körper mit lauter rechteckigen Flächen rechtwinkliges Viereck mit gleich langen Seiten eines der vier Felder im Koordinatensystem

Wortkunde: Latein

Stamm	enthalten in	wörtlich übersetzt	Bedeutung
rota Rad, Scheibe (rota ist verwandt mit Rad)	**rotieren**	kreisförmig drehen	umlaufen, sich um eine Achse drehen
	Rotation		Drehung
	Rotor		sich drehender Teil einer elektrischen Maschine
scalae Treppe, Leiter	**Skala**		Maßeinteilung in Messgeräten
	eskalieren		sich stufenweise steigern
struere schichten, aufbauen (struere ist verwandt mit streuen)	**Struktur**	Gefüge, Bauwerk	Aufbau, innere Gliederung
	konstruieren	aufschichten, (er)bauen	eine Figur zeichnerisch darstellen, die Bauart einer Maschine, eines Gebäudes entwerfen
	konstruktiv		aufbauend
	instruieren	unterrichten, ausrüsten	in Kenntnis setzen, anleiten
	instruktiv		lehrreich
	Instrument		Gerät
transferre hinübertragen, verschieben	**Transfer**	Übertrag	Zahlung ins Ausland in fremder Währung
	Translation	Übertragung, Verschiebung	Verschiebung
vehere fahren, tragen	**Vehikel**	Fahrzeug	klappriges, altmodisches Fahrzeug
	vehement	auffahrend	stürmisch
	Vektor	Fahrer, Träger	gerichtete Größe
	konvex	zusammengetragen	nach außen gewölbt, erhaben

Register