Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

2.4.1 Definition der Addition

urn:nbn:de:hbz:466:1-83493

Aufgaben

1. Wie heißt die Gegenzahl von
a) 167 **b)** $-3{,}14$ **c)** $2\frac{10}{11}$ **d)** $-0{,}001$?

2. Vereinfache die Schreibweise der folgenden Zahlen:
a) $-(-2)$ **b)** $-(-0{,}34)$ **c)** $-(-(-1))$ **d)** $-(-(-(-0{,}6)))$
e) $+49$ **f)** $-(+7{,}3)$ **g)** $-(+(-4))$ **h)** $+(-(+5))$

3. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Berichtige die falschen Aussagen.
a) Die Gegenzahl einer positiven Zahl ist nicht positiv.
b) Die Gegenzahl einer rationalen Zahl ist negativ.
c) Die Gegenzahl einer nichtnegativen Zahl ist negativ.
d) Die Gegenzahl einer natürlichen Zahl ist eine ganze Zahl.
e) Wenn man zu den Elementen von $\mathbb{N}$ alle ihre Gegenzahlen hinzufügt, erhält man die Menge $\mathbb{Z}$.

4. Bestimme $|x|$ für $x \in \{-1000; -111; -0{,}1; 0; 0{,}12; 63; 10^6\}$.

5. Bestimme alle Zahlen mit folgender Eigenschaft:
a) Der absolute Betrag ist 7,5.
b) Die Zahl ist negativ und hat den Betrag 2,8.
c) Die Zahl ist positiv und hat denselben Betrag wie -99.
d) Weder die Zahl selbst noch ihr absoluter Betrag sind positiv.
e) Die Zahl ist von ihrem Betrag verschieden, und dieser hat den Wert 7.

6. Berechne:
a) $|7{,}9|+|-5|$ **b)** $|7{,}9|-|-5|$
c) $|-81|+|-19|$ **d)** $|-81|-|19|$
e) $|-\frac{17}{20}|-|-0{,}85|$ **f)** $|-1|-|\frac{1}{2}|-|-\frac{1}{4}|$.

7. Bestimme die Lösungsmengen:
a) $|x|=0{,}5$ **b)** $|x|=7$ **c)** $|x|=0$
d) $|x|=-1$ **e)** $|x|\geqq 0$ **f)** $|x|>0$.

8. Welche Zahlen $z \in \mathbb{Z}$ erfüllen folgende Bedingung?
a) $|z|\leqq 0$ **b)** $|z|<1$ **c)** $|z|\leqq 3$
d) $|z|>0$ **e)** $|z|\geqq 2$ **f)** $1<|z|<4$.

2.4 Addition und Subtraktion von rationalen Zahlen

2.4.1 Definition der Addition

Ob die neu eingeführten negativen Zahlen zu Recht als Zahlen bezeichnet werden, entscheidet sich an der Frage, ob man mit ihnen in gewohnter Weise rechnen kann. Wir wollen dies zunächst für die Addition untersuchen. Dazu betrachten wir einige Beispiele von Summen aus rationalen Zahlen:

Beispiele:

1) $2 + 3{,}7$ **2)** $5 + 0$ **3)** $5{,}2 + (-3)$

4) $(-4) + 1\frac{3}{4}$ **5)** $(-2{,}4) + (-3{,}7)$ **6)** $0 + (-1)$

Beachte: Beim Anschreiben solcher Summen ist es wichtig, zwischen Rechenzeichen und Vorzeichen genau zu unterscheiden. Das Vorzeichen ist ein Bestandteil der betreffenden Zahl! Dies wird, wie die Beispiele 3 bis 6 zeigen, durch Klammern zum Ausdruck gebracht.

Die Summen in den Beispielen 1 und 2 sind von bekannter Art. Dagegen stellen uns die übrigen Beispiele vor neue Situationen: Wir wissen ja noch nicht, wie Summen mit negativen Summanden zu berechnen sind! Man muß erst einmal definieren, welche Bedeutung solche Summen haben sollen. Natürlich soll diese *Definition der Addition rationaler Zahlen* so beschaffen sein, daß sie für nicht-negative Summanden (Beispiele 1 und 2) mit der altbekannten Addition übereinstimmt.
Bei der Suche nach einer geeigneten Definition erinnern wir uns an die graphische Darstellung der Addition bei positiven Zahlen (Abbildung 46.1):

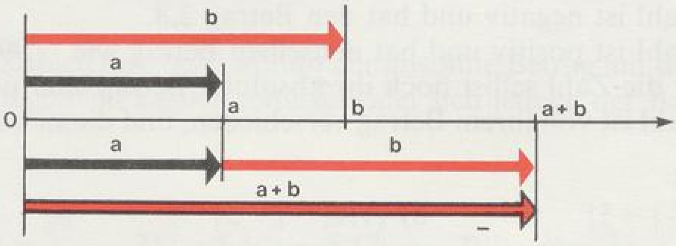

Abb. 46.1 Veranschaulichung der Addition in $\mathbb{Q}^+$

Man erhält, wie Abbildung 46.1 zeigt, den Pfeil für die Summe $a + b$, indem man an die Spitze des Pfeils a den Pfeil b ansetzt. Der Summenpfeil läuft dann vom Anfangspunkt des ersten zur Spitze des zweiten Summandenpfeils. Wir wollen dieses geometrische Verfahren im folgenden kurz als **Pfeiladdition** bezeichnen.
Es liegt nun nahe, diese Pfeiladdition versuchsweise auch auf Summen mit negativen Summanden zu übertragen. Für die obigen Beispiele 3, 4 und 5 ergeben sich dabei folgende Abbildungen:

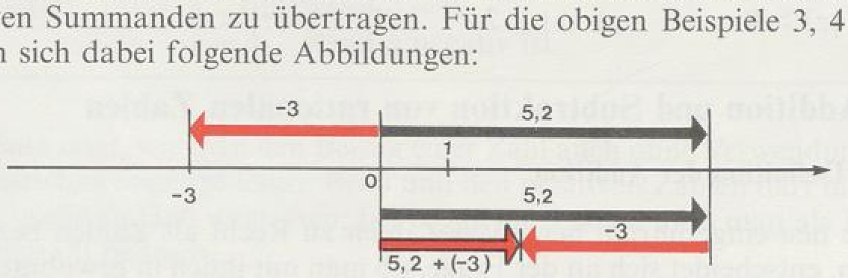

Abb. 46.2 $5{,}2 + (-3)$

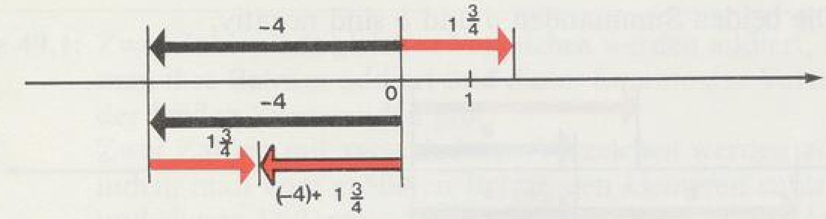

Abb. 47.1 $(-4)+1\frac{3}{4}$

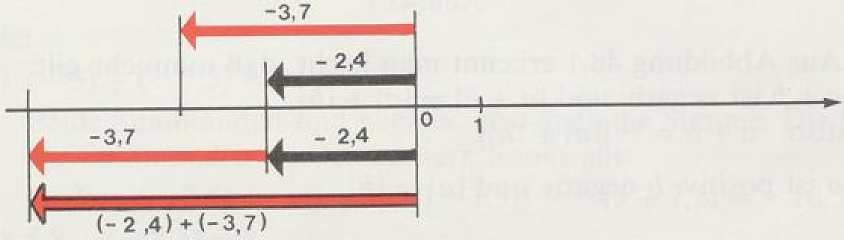

Abb. 47.2 $(-2{,}4)+(-3{,}7)$

Aus der jeweils leicht errechenbaren Länge und der Richtung des Summenpfeils erkennt man, daß dieses Additionsverfahren folgende Ergebnisse liefert: $5{,}2+(-3)=2{,}2$; $(-4)+1\frac{3}{4}=-2\frac{1}{4}$; $(-2{,}4)+(-3{,}7)=-6{,}1$.

Deutet man z. B. positive Zahlen als Guthaben, negative als Schulden, so erkennt man, daß diese Ergebnisse durchaus sinnvoll sind. Wir wollen daher das in diesen Beispielen angewandte Verfahren zur Definition der Addition beliebiger rationaler Zahlen verwenden.

Definition 47.1: Unter der Summe $a+b$ zweier rationaler Zahlen a und b verstehen wir diejenige Zahl, deren Pfeil sich durch Anwendung der Pfeiladdition auf die Pfeile a und b ergibt.

Mit dieser Definition ist es uns tatsächlich möglich, zwei beliebige Zahlen aus $\mathbb{Q}$ zu addieren. Wie man an den vorausgehenden Beispielen erkennt, sind dabei jeweils zwei Überlegungen notwendig, nämlich:

1. Welche Richtung hat der Summenpfeil (falls seine Länge nicht 0 ist)?
2. Wie lang ist der Summenpfeil?

Die Antwort auf die erste Frage liefert das Vorzeichen der zu bestimmenden Summe, die Antwort auf die zweite ihren Absolutbetrag. Wie man vorgehen muß, um jeweils die richtigen Antworten zu finden, hängt von Betrag und Vorzeichen der beiden Summanden ab.
Wir untersuchen dazu verschiedene typische Fälle:

Fall 1: Die beiden Summanden a und b sind positiv.
Für diesen längst bekannten Fall gilt (vgl. Abbildung 46.1):
$a+b$ ist positiv und $|a+b|=|a|+|b|$,
also $a+b=|a|+|b|$.

Fall 2: Die beiden Summanden a und b sind negativ.

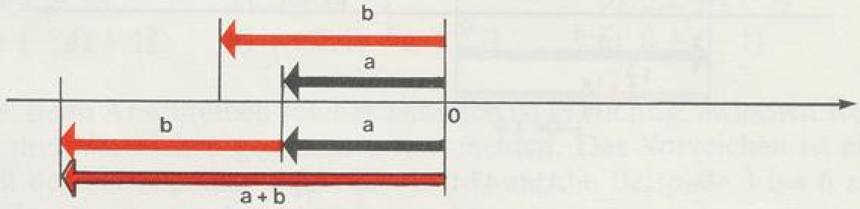

Abb. 48.1

Aus Abbildung 48.1 erkennt man leicht, daß nunmehr gilt:
$a+b$ ist negativ und $|a+b| = |a| + |b|$,
also $a+b = -(|a| + |b|)$.

Fall 3: a ist positiv, b negativ und $|a| > |b|$.

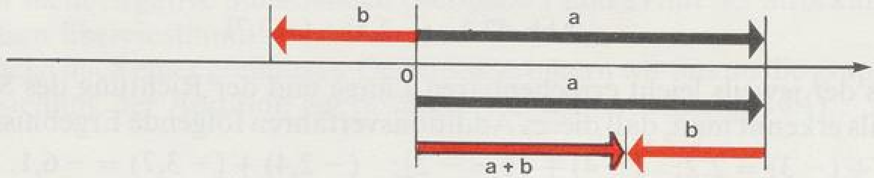

Abb. 48.2

Nach Abbildung 48.2 gilt:
$a+b$ ist positiv und $|a+b| = |a| - |b|$,
also $a+b = |a| - |b|$.

Fall 4: a ist positiv, b negativ und $|a| < |b|$.

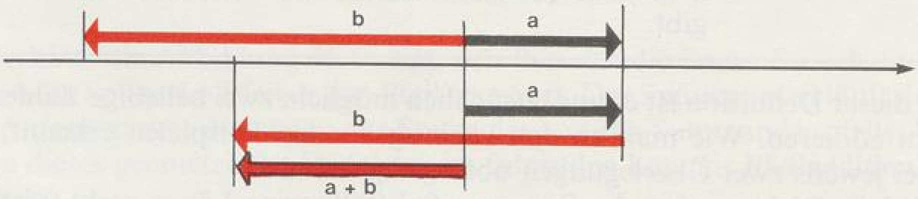

Abb. 48.3

Abbildung 48.3 zeigt:
$a+b$ ist negativ und $|a+b| = |b| - |a|$,
also $a+b = -(|b| - |a|)$.

Ganz entsprechend wie die Fälle 3 und 4 lassen sich die Fälle »a negativ, b positiv und $|a| > |b|$« bzw. »a negativ, b positiv und $|a| < |b|$« behandeln. Zeige dies z. B. anhand der Aufgaben **1.b)** und **1.e)** auf Seite 53.

Die Ergebnisse dieser Untersuchungen lassen sich so beschreiben:

Satz 49.1: Zwei Zahlen mit **gleichen Vorzeichen** werden addiert, indem man ihre Beträge addiert und dieser Summe das Vorzeichen der beiden Summanden gibt.
Zwei Zahlen mit **verschiedenen Vorzeichen** werden addiert, indem man vom größeren Betrag den kleineren subtrahiert und dieser Differenz das Vorzeichen des Summanden mit dem größeren Betrag gibt.

Beispiele:

1) $(-3)+(-7{,}5)=?$

Beide Summanden sind negativ, also auch die Summe. Die Beträge der Summanden werden addiert. Somit gilt:

$(-3)+(-7{,}5)=-(|-3|+|-7{,}5|)=-(3+7{,}5)=-10{,}5.$

2) $5{,}8+(-8{,}3)=?$

Die Summanden haben verschiedene Vorzeichen. Der Summand mit dem größeren Betrag, also $-8{,}3$, ist negativ; daher wird auch die Summe negativ. Die Beträge der Summanden werden voneinander subtrahiert. Somit gilt:

$5{,}8+(-8{,}3)=-(|-8{,}3|-|5{,}8|)=-(8{,}3-5{,}8)=-2{,}5.$

3) $(-3\tfrac{1}{3})+4\tfrac{1}{6}=?$

Die Summanden haben verschiedene Vorzeichen. Der Summand mit dem größeren Betrag ist positiv, also auch die Summe. Die Beträge der Summanden werden voneinander subtrahiert. Somit gilt:

$(-3\tfrac{1}{3})+4\tfrac{1}{6}=+(|4\tfrac{1}{6}|-|-3\tfrac{1}{3}|)=+(4\tfrac{1}{6}-3\tfrac{1}{3})=+\tfrac{5}{6}=\tfrac{5}{6}.$

Von besonderem Interesse sind noch die zwei folgenden Fälle:

Fall 5: $|a|=|b|$ und a und b haben verschiedene Vorzeichen. In diesem Fall ist b die Gegenzahl von a, also $b=-a$.

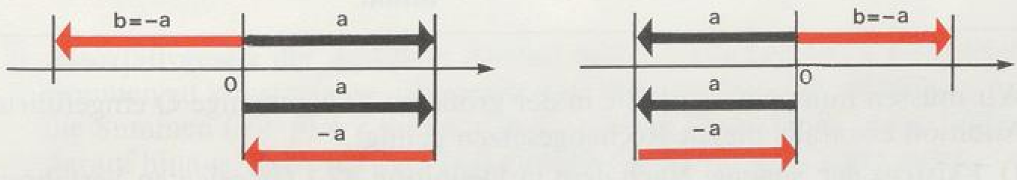

Abb. 49.1

Aus Abbildung 49.1 erkennt man: $a+(-a)=0$.

Satz 49.2: Die Summe aus einer Zahl und ihrer Gegenzahl ist 0.
$\mathbf{a+(-a)=0}$ für jedes $a\in\mathbb{Q}$

Fall 6: Ein Summand ist 0.
Da der Pfeil für die Zahl 0 die Länge 0 hat, ergibt sich unmittelbar aus Definition 47.1:

> **Satz 50.1:** Für jede rationale Zahl a gilt
> $$a + 0 = 0 + a = a.$$

Dieser Satz besagt, daß die Zahl 0 auch in der Zahlenmenge $\mathbb{Q}$ das *neutrale Element der Addition* ist.

2.4.2 Eigenschaften der Addition in $\mathbb{Q}$

Von der im Abschnitt **2.4.1** eingeführten Addition rationaler Zahlen wissen wir noch nicht, ob sie wirklich alle erwünschten Eigenschaften besitzt. Es geht hier vor allem um die Frage, ob für sie die Rechengesetze gültig bleiben, die uns von der Addition in $\mathbb{Q}_0^+$ her schon bekannt sind. Zur Wiederholung wollen wir diese Rechengesetze hier zusammenstellen:

Rechengesetze der Addition in $\mathbb{Q}_0^+$

Für alle Zahlen a, b, c aus $\mathbb{Q}_0^+$ gilt:

(E)	**$a + b$ ist wieder eine Zahl aus $\mathbb{Q}_0^+$**	**eindeutige Existenz der Summe**
(K)	**$a + b = b + a$**	**Kommutativgesetz* der Addition**
(A)	**$(a + b) + c = a + (b + c)$**	**Assoziativgesetz** der Addition**
(N)	**$a + 0 = a$**	**0 ist neutrales Element der Addition**

Wir müssen nun prüfen, ob die in der größeren Zahlenmenge $\mathbb{Q}$ eingeführte Addition ebenfalls diesen Rechengesetzen genügt.

1) **Existenz der Summe:** Nach dem in Definition 47.1 festgelegten Verfahren kann man zwei rationale Zahlen stets addieren; die Summe ist wieder eine Zahl aus $\mathbb{Q}$. Damit bleibt (E) in $\mathbb{Q}$ gültig.

* commutare (lat.) = verändern, vertauschen. – Der Ausdruck *kommutativ* wurde 1814 von François Joseph SERVOIS (1767–1847) in seinem *Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul différentiel* in die Mathematik eingeführt.

** associare (lat.) = vereinigen, anschließen, verbinden. – Der Ausdruck *assoziativ* wurde 1843 von dem berühmten irischen Mathematiker und Astronomen William Rowan HAMILTON (1805–1865) bei der Erfindung ganz besonderer »Zahlen«, der sog. Quaternionen, in die Mathematik eingeführt. – Abb. 90.1