Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

2.4.2 Eigenschaften der Addition in Q

urn:nbn:de:hbz:466:1-83493

Fall 6: Ein Summand ist 0.
Da der Pfeil für die Zahl 0 die Länge 0 hat, ergibt sich unmittelbar aus Definition 47.1:

Satz 50.1: Für jede rationale Zahl a gilt
$$a + 0 = 0 + a = a.$$

Dieser Satz besagt, daß die Zahl 0 auch in der Zahlenmenge $\mathbb{Q}$ das *neutrale Element der Addition* ist.

2.4.2 Eigenschaften der Addition in $\mathbb{Q}$

Von der im Abschnitt **2.4.1** eingeführten Addition rationaler Zahlen wissen wir noch nicht, ob sie wirklich alle erwünschten Eigenschaften besitzt. Es geht hier vor allem um die Frage, ob für sie die Rechengesetze gültig bleiben, die uns von der Addition in $\mathbb{Q}_0^+$ her schon bekannt sind. Zur Wiederholung wollen wir diese Rechengesetze hier zusammenstellen:

Rechengesetze der Addition in $\mathbb{Q}_0^+$

Für alle Zahlen a, b, c aus $\mathbb{Q}_0^+$ gilt:

(E)	$a + b$ **ist wieder eine Zahl aus** $\mathbb{Q}_0^+$	**eindeutige Existenz der Summe**
(K)	$a + b = b + a$	**Kommutativgesetz* der Addition**
(A)	$(a + b) + c = a + (b + c)$	**Assoziativgesetz** der Addition**
(N)	$a + 0 = a$	**0 ist neutrales Element der Addition**

Wir müssen nun prüfen, ob die in der größeren Zahlenmenge $\mathbb{Q}$ eingeführte Addition ebenfalls diesen Rechengesetzen genügt.

1) **Existenz der Summe:** Nach dem in Definition 47.1 festgelegten Verfahren kann man zwei rationale Zahlen stets addieren; die Summe ist wieder eine Zahl aus $\mathbb{Q}$. Damit bleibt (E) in $\mathbb{Q}$ gültig.

* commutare (lat.) = verändern, vertauschen. – Der Ausdruck *kommutativ* wurde 1814 von François Joseph Servois (1767–1847) in seinem *Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul différentiel* in die Mathematik eingeführt.

** associare (lat.) = vereinigen, anschließen, verbinden. – Der Ausdruck *assoziativ* wurde 1843 von dem berühmten irischen Mathematiker und Astronomen William Rowan Hamilton (1805–1865) bei der Erfindung ganz besonderer »Zahlen«, der sog. Quaternionen, in die Mathematik eingeführt. – Abb. 90.1

2) **Kommutativgesetz der Addition:** Wir konstruieren und vergleichen die Pfeilsummen $a+b$ und $b+a$ für die verschiedenen Vorzeichenzusammenstellungen:

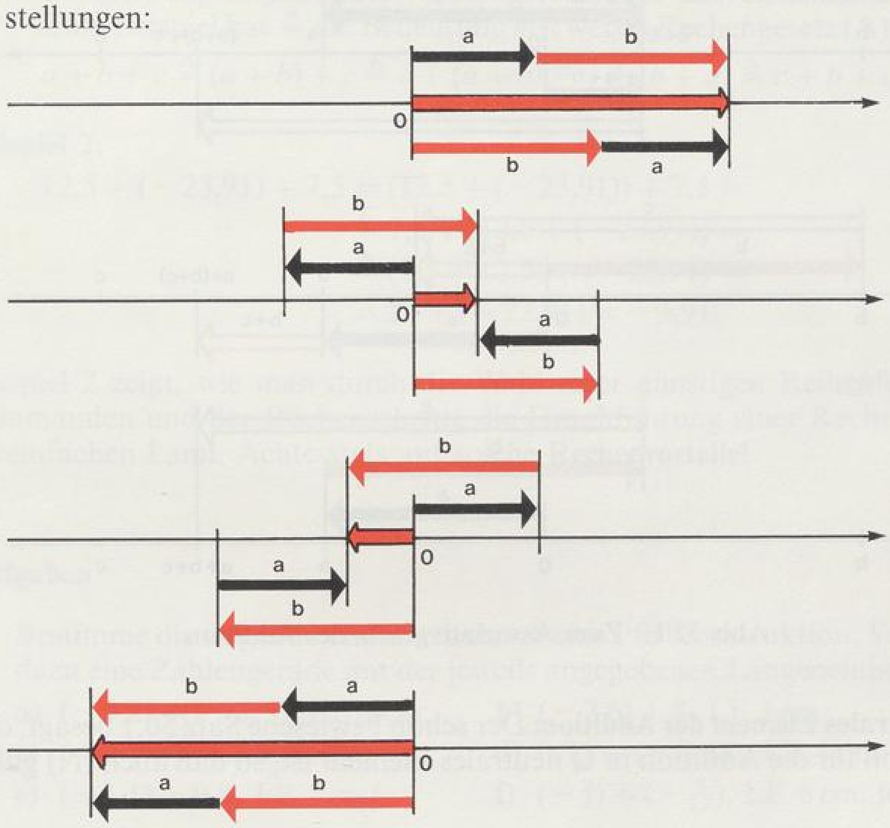

Abb. 51.1 Zum Nachweis des Kommutativgesetzes

Abbildung 51.1 zeigt, daß in allen diesen Fällen $a+b=b+a$ gilt. Wenn ein Summand 0 ist, gilt nach Satz 50.1 ebenfalls $a+0=0+a$. Also bleibt (K) in $\mathbb{Q}$ gültig.

3) **Assoziativgesetz der Addition:** Anstatt hier für alle typischen Fälle Pfeilsummen zu konstruieren, überlegen wir: Wenn man aus drei Pfeilen a, b, c die Summen $(a+b)+c$ und $a+(b+c)$ bildet, läuft das in beiden Fällen darauf hinaus, daß man die Pfeile einfach der Reihe nach aneinandersetzt. Das Ergebnis ist unabhängig davon, ob a und b oder b und c zu einer Zwischensumme zusammengefaßt werden. Damit gilt wieder $(a+b)+c=a+(b+c)$, d.h., (A) bleibt auch für die Addition in $\mathbb{Q}$ gültig.

Ein Beispiel zeigt Abbildung 52.1. In den ersten beiden Zeichnungen wird jeweils oberhalb der Zahlengeraden die Zwischensumme $a+b$ bzw. $b+c$ konstruiert, die dann darunter zur Ermittlung der ganzen Summe $(a+b)+c$ bzw. $a+(b+c)$ verwendet wird. Der letzte Teil der Abbildung zeigt zum Vergleich die drei der Reihe nach aneinandergesetzten Pfeile.

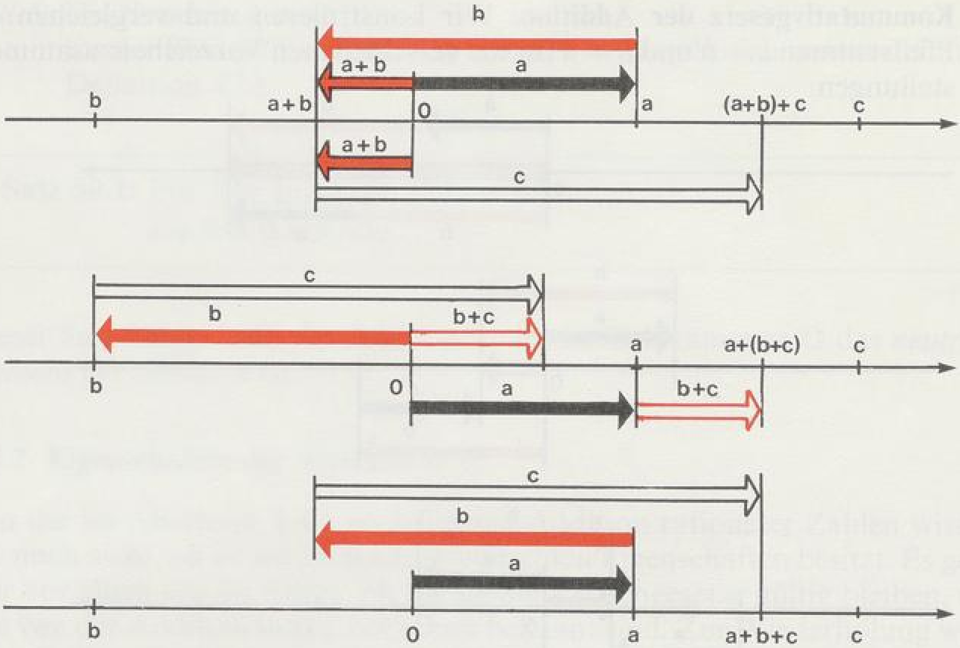

Abb. 52.1 Zum Assoziativgesetz der Addition

4) **Neutrales Element der Addition:** Der schon bewiesene Satz 50.1 besagt, daß 0 auch für die Addition in $\mathbb{Q}$ neutrales Element ist, so daß auch (N) gültig bleibt.

Damit gilt

Satz 52.1: Für die Addition in der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen gelten wieder die auf Seite 50 zusammengestellten Rechengesetze (E), (K), (A), (N).

Für die Rechenpraxis sind insbesondere die Gesetze (A) und (K) von großer Bedeutung. Aus (A) folgt bekanntlich, daß man bei dreigliedrigen Summen darauf verzichten kann, die Reihenfolge der beiden Additionen durch Klammern festzulegen. Da es nach dem Assoziativgesetz gleichgültig ist, ob man $(a+b)+c$ oder $a+(b+c)$ berechnet, genügt es auch, einfach $a+b+c$ zu schreiben. Nimmt man noch das Kommutativgesetz hinzu, so zeigt sich, daß auch die Reihenfolge der Summanden beliebig verändert werden kann. Dasselbe gilt, wie man zeigen kann, auch für Summen mit mehr als drei Summanden.

Beispiel 1:

Behauptung: $a+b+c=c+b+a$

Beweis: Der Einfachheit halber schreiben wir im folgenden das bei einer Umformung angewandte Rechengesetz über das Gleichheitszeichen. Zum Beispiel hat $\stackrel{A}{=}$ die Bedeutung »ist wegen Rechengesetz (A) gleich«.

$$a+b+c \stackrel{A}{=} (a+b)+c \stackrel{K}{=} c+(a+b) \stackrel{K}{=} c+(b+a) \stackrel{A}{=} c+b+a.$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} 12{,}5+(-23{,}91)+7{,}5 &\stackrel{A}{=} (12{,}5+(-23{,}91))+7{,}5 = \\ &\stackrel{K}{=} 7{,}5+(12{,}5+(-23{,}91)) = \\ &\stackrel{A}{=} (7{,}5+12{,}5)+(-23{,}91) = \\ &= 20+(-23{,}91) = -3{,}91. \end{aligned}$$

Beispiel 2 zeigt, wie man durch die Wahl einer günstigen Reihenfolge der Summanden und der Rechenschritte die Durchführung einer Rechnung oft vereinfachen kann. Achte stets auf solche **Rechenvorteile**!

Aufgaben

1. Bestimme die folgenden Summen durch eine Pfeilkonstruktion. Verwende dazu eine Zahlengerade mit der jeweils angegebenen Längeneinheit (LE).
   a) $(-3{,}2)+(-1{,}5)$, LE 1 cm; **b)** $(-2{,}6)+8$, LE 1 cm;
   c) $64+(-97)$, LE 1 mm; **d)** $0{,}75+(-0{,}48)$, LE 1 dm;
   e) $(-1{,}1)+0{,}8$, LE 5 cm; **f)** $(-\frac{3}{4})+(-\frac{7}{12})$, LE 6 cm.
2. Berechne die folgenden Summen. Überlege jeweils zuerst, welches Vorzeichen das Ergebnis erhält und wie man seinen Betrag berechnet.
   a) $(-10)+12$ **b)** $10+(-12)$ **c)** $(-9{,}1)+(-1{,}9)$
   d) $1{,}5+4\frac{1}{3}$ **e)** $(-7{,}45)+7\frac{1}{4}$ **f)** $0{,}865+(-1{,}39)$
   g) $(-\frac{7}{9})+(-\frac{11}{15})$ **h)** $\frac{16}{7}+(-2\frac{3}{14})$ **i)** $(-0{,}196)+\frac{49}{250}$
3. Konstruiere für die folgenden Zahlenbeispiele zur Überprüfung des Assoziativgesetzes der Addition die Pfeilsummen $(a+b)+c$ und $a+(b+c)$. Kennzeichne dabei die zuerst gebildeten Zwischensummen durch zweifarbige Pfeile (vgl. Abbildung 52.1).
   a) $a=4$; $b=-3$; $c=-3{,}5$; LE 1 cm
   b) $a=-2{,}4$; $b=7{,}3$; $c=-3{,}2$; LE 1 cm
   c) $a=-0{,}6$; $b=-\frac{3}{4}$; $c=\frac{7}{8}$; LE 4 cm
4. Berechne die folgenden Summen. Achte dabei auf eventuelle Rechenvorteile.
   a) $15+27+(-32)$ **b)** $(-243)+(-102)+45$
   c) $1010+(-2000)+990$ **d)** $(-123)+(-68)+(-132)$
   e) $(-0{,}93)+1{,}13+(-0{,}63)$ **f)** $(-2{,}25)+(-4{,}75)+7{,}25$
   g) $2\frac{3}{4}+(-1\frac{2}{3})+(1\frac{1}{12})$ **h)** $15{,}8+(-20\frac{1}{3})+4\frac{1}{2}$

5. Berechne:

a) $(27+(-15))+(-8)+(-9)$ **b)** $(-109)+(85+13+(-45))$

c) $((-3{,}14)+2{,}38)+(-0{,}167)+1{,}427$

d) $(4\frac{1}{7}+(-10{,}5))+(8\frac{2}{3}+(-2\frac{3}{4}))$

6. Berechne:

a) $(-7)+|-7|$ **b)** $|-2{,}5|+|2{,}5|$ **c)** $3{,}2+|-3{,}2|$

d) $|3+(-4)|$ **e)** $|3|+|-4|$ **f)** $|(-3)+4|$

g) $|(-1{,}16)+(-2{,}39)|$ **h)** $|-1{,}16|+|-2{,}39|$ **i)** $\left|(-5\frac{1}{6})+|-2\frac{1}{9}|\right|$

7. Ist x positiv, null oder negativ, wenn folgende Gleichung gilt? (Hinweis: Beachte Satz 49.1.)

a) $|7+x|=7+|x|$ **b)** $|(-7)+x|=7+|x|$

c) $|x+2|=2-|x|$ **d)** $|x+2|=|x|-2$

e) Welche Angabe über $|x|$ läßt sich im Fall **c)** bzw. im Fall **d)** machen?

8. Was kann man über die Vorzeichen von $x \neq 0$ und $y \neq 0$ sagen, wenn gilt

a) $|x+y|=|x|+|y|$ **b)** $|x+y|=|x|-|y|$

c) $|x+(-y)|=|x|+|y|$ **d)** $|(-x)+(-y)|=|x|-|y|$?

2.4.3 Die Subtraktion in $\mathbb{Q}$

Beim Addieren besteht die Aufgabe darin, aus den gegebenen Summanden die Summe zu berechnen. Oft kommt es aber auch vor, daß von einer Summe der Wert schon bekannt ist und einer der Summanden gesucht wird. Um diesen zu berechnen, muß man bekanntlich eine **Subtraktion** ausführen. Man bezeichnet wegen dieses Zusammenhangs die Subtraktion als **Umkehrung der Addition**.

Beispiel:

Auf einer Straßenkarte ist die Entfernung München–Nürnberg mit 162 km und die Teilstrecke München–Ingolstadt mit 73 km angegeben. Wie lang ist dann die Strecke von Ingolstadt nach Nürnberg?
Bezeichnet man sie mit x km, so ist x die Lösung der Gleichung $73+x=162$, also $x=162-73=89$.
Die Strecke Ingolstadt–Nürnberg ist somit 89 km lang.

Das Beispiel zeigt deutlich den Zusammenhang zwischen der Differenz $162-73$ und der Gleichung $73+x=162$: die *Differenz* ist die *Lösung der Gleichung*. Ganz allgemein legt man fest:

> **Definition 54.1:** Unter der Differenz $b-a$ versteht man die Lösung der Gleichung $a+x=b$.

$b-a$ ist also diejenige Zahl, die man zu a addieren muß, um b zu erhalten.