Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

Aufgaben

Beweis: Der Einfachheit halber schreiben wir im folgenden das bei einer Umformung angewandte Rechengesetz über das Gleichheitszeichen. Zum Beispiel hat $\overset{\text{A}}{=}$ die Bedeutung »ist wegen Rechengesetz (A) gleich«.

$$a+b+c \overset{\text{A}}{=} (a+b)+c \overset{\text{K}}{=} c+(a+b) \overset{\text{K}}{=} c+(b+a) \overset{\text{A}}{=} c+b+a.$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} 12{,}5+(-23{,}91)+7{,}5 &\overset{\text{A}}{=} (12{,}5+(-23{,}91))+7{,}5 = \\ &\overset{\text{K}}{=} 7{,}5+(12{,}5+(-23{,}91)) = \\ &\overset{\text{A}}{=} (7{,}5+12{,}5)+(-23{,}91) = \\ &= 20+(-23{,}91) = -3{,}91. \end{aligned}$$

Beispiel 2 zeigt, wie man durch die Wahl einer günstigen Reihenfolge der Summanden und der Rechenschritte die Durchführung einer Rechnung oft vereinfachen kann. Achte stets auf solche **Rechenvorteile**!

Aufgaben

1. Bestimme die folgenden Summen durch eine Pfeilkonstruktion. Verwende dazu eine Zahlengerade mit der jeweils angegebenen Längeneinheit (LE).

a) $(-3{,}2)+(-1{,}5)$, LE 1 cm; **b)** $(-2{,}6)+8$, LE 1 cm;
c) $64+(-97)$, LE 1 mm; **d)** $0{,}75+(-0{,}48)$, LE 1 dm;
e) $(-1{,}1)+0{,}8$, LE 5 cm; **f)** $(-\frac{3}{4})+(-\frac{7}{12})$, LE 6 cm.

2. Berechne die folgenden Summen. Überlege jeweils zuerst, welches Vorzeichen das Ergebnis erhält und wie man seinen Betrag berechnet.

a) $(-10)+12$ **b)** $10+(-12)$ **c)** $(-9{,}1)+(-1{,}9)$
d) $1{,}5+4\frac{1}{3}$ **e)** $(-7{,}45)+7\frac{1}{4}$ **f)** $0{,}865+(-1{,}39)$
g) $(-\frac{7}{9})+(-\frac{11}{15})$ **h)** $\frac{16}{7}+(-2\frac{3}{14})$ **i)** $(-0{,}196)+\frac{49}{250}$

3. Konstruiere für die folgenden Zahlenbeispiele zur Überprüfung des Assoziativgesetzes der Addition die Pfeilsummen $(a+b)+c$ und $a+(b+c)$. Kennzeichne dabei die zuerst gebildeten Zwischensummen durch zweifarbige Pfeile (vgl. Abbildung 52.1).

a) $a=4$; $b=-3$; $c=-3{,}5$; LE 1 cm
b) $a=-2{,}4$; $b=7{,}3$; $c=-3{,}2$; LE 1 cm
c) $a=-0{,}6$; $b=-\frac{3}{4}$; $c=\frac{7}{8}$; LE 4 cm

4. Berechne die folgenden Summen. Achte dabei auf eventuelle Rechenvorteile.

a) $15+27+(-32)$ **b)** $(-243)+(-102)+45$
c) $1010+(-2000)+990$ **d)** $(-123)+(-68)+(-132)$
e) $(-0{,}93)+1{,}13+(-0{,}63)$ **f)** $(-2{,}25)+(-4{,}75)+7{,}25$
g) $2\frac{3}{4}+(-1\frac{2}{3})+(1\frac{1}{12})$ **h)** $15{,}8+(-20\frac{1}{3})+4\frac{1}{2}$

5. Berechne:

a) $(27+(-15))+(-8)+(-9)$ **b)** $(-109)+(85+13+(-45))$

c) $((-3{,}14)+2{,}38)+(-0{,}167)+1{,}427$

d) $(4\frac{1}{7}+(-10{,}5))+(8\frac{2}{3}+(-2\frac{3}{4}))$

6. Berechne:

a) $(-7)+|-7|$ **b)** $|-2{,}5|+|2{,}5|$ **c)** $3{,}2+|-3{,}2|$

d) $|3+(-4)|$ **e)** $|3|+|-4|$ **f)** $|(-3)+4|$

g) $|(-1{,}16)+(-2{,}39)|$ **h)** $|-1{,}16|+|-2{,}39|$ **i)** $\left|(-5\frac{1}{6})+|-2\frac{1}{9}|\right|$

7. Ist x positiv, null oder negativ, wenn folgende Gleichung gilt? (Hinweis: Beachte Satz 49.1.)

a) $|7+x|=7+|x|$ **b)** $|(-7)+x|=7+|x|$

c) $|x+2|=2-|x|$ **d)** $|x+2|=|x|-2$

e) Welche Angabe über $|x|$ läßt sich im Fall **c)** bzw. im Fall **d)** machen?

8. Was kann man über die Vorzeichen von $x \neq 0$ und $y \neq 0$ sagen, wenn gilt

a) $|x+y|=|x|+|y|$ **b)** $|x+y|=|x|-|y|$

c) $|x+(-y)|=|x|+|y|$ **d)** $|(-x)+(-y)|=|x|-|y|$?

2.4.3 Die Subtraktion in $\mathbb{Q}$

Beim Addieren besteht die Aufgabe darin, aus den gegebenen Summanden die Summe zu berechnen. Oft kommt es aber auch vor, daß von einer Summe der Wert schon bekannt ist und einer der Summanden gesucht wird. Um diesen zu berechnen, muß man bekanntlich eine **Subtraktion** ausführen. Man bezeichnet wegen dieses Zusammenhangs die Subtraktion als **Umkehrung der Addition**.

Beispiel:

Auf einer Straßenkarte ist die Entfernung München–Nürnberg mit 162 km und die Teilstrecke München–Ingolstadt mit 73 km angegeben. Wie lang ist dann die Strecke von Ingolstadt nach Nürnberg?
Bezeichnet man sie mit x km, so ist x die Lösung der Gleichung $73+x=162$, also $x=162-73=89$.
Die Strecke Ingolstadt–Nürnberg ist somit 89 km lang.

Das Beispiel zeigt deutlich den Zusammenhang zwischen der Differenz $162-73$ und der Gleichung $73+x=162$: die *Differenz* ist die *Lösung der Gleichung*. Ganz allgemein legt man fest:

> **Definition 54.1:** Unter der Differenz $b-a$ versteht man die Lösung der Gleichung $a+x=b$.

$b-a$ ist also diejenige Zahl, die man zu a addieren muß, um b zu erhalten.