Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

2.4.3 Die Subtraktion in Q

5. Berechne:

a) $(27+(-15))+(-8)+(-9)$ **b)** $(-109)+(85+13+(-45))$

c) $((-3{,}14)+2{,}38)+(-0{,}167)+1{,}427$

d) $(4\frac{1}{7}+(-10{,}5))+(8\frac{2}{3}+(-2\frac{3}{4}))$

6. Berechne:

a) $(-7)+|-7|$ **b)** $|-2{,}5|+|2{,}5|$ **c)** $3{,}2+|-3{,}2|$

d) $|3+(-4)|$ **e)** $|3|+|-4|$ **f)** $|(-3)+4|$

g) $|(-1{,}16)+(-2{,}39)|$ **h)** $|-1{,}16|+|-2{,}39|$ **i)** $\left|(-5\frac{1}{6})+|-2\frac{1}{9}|\right|$

•7. Ist x positiv, null oder negativ, wenn folgende Gleichung gilt? (Hinweis: Beachte Satz 49.1.)

a) $|7+x|=7+|x|$ **b)** $|(-7)+x|=7+|x|$

c) $|x+2|=2-|x|$ **d)** $|x+2|=|x|-2$

e) Welche Angabe über $|x|$ läßt sich im Fall **c)** bzw. im Fall **d)** machen?

•8. Was kann man über die Vorzeichen von $x \neq 0$ und $y \neq 0$ sagen, wenn gilt

a) $|x+y|=|x|+|y|$ **b)** $|x+y|=|x|-|y|$

c) $|x+(-y)|=|x|+|y|$ **d)** $|(-x)+(-y)|=|x|-|y|$?

2.4.3 Die Subtraktion in $\mathbb{Q}$

Beim Addieren besteht die Aufgabe darin, aus den gegebenen Summanden die Summe zu berechnen. Oft kommt es aber auch vor, daß von einer Summe der Wert schon bekannt ist und einer der Summanden gesucht wird. Um diesen zu berechnen, muß man bekanntlich eine **Subtraktion** ausführen. Man bezeichnet wegen dieses Zusammenhangs die Subtraktion als **Umkehrung der Addition**.

Beispiel:

Auf einer Straßenkarte ist die Entfernung München–Nürnberg mit 162 km und die Teilstrecke München–Ingolstadt mit 73 km angegeben. Wie lang ist dann die Strecke von Ingolstadt nach Nürnberg?
Bezeichnet man sie mit x km, so ist x die Lösung der Gleichung $73+x=162$, also $x=162-73=89$.
Die Strecke Ingolstadt–Nürnberg ist somit 89 km lang.

Das Beispiel zeigt deutlich den Zusammenhang zwischen der Differenz $162-73$ und der Gleichung $73+x=162$: die *Differenz* ist die *Lösung der Gleichung*. Ganz allgemein legt man fest:

> **Definition 54.1:** Unter der Differenz $b-a$ versteht man die Lösung der Gleichung $a+x=b$.

$b-a$ ist also diejenige Zahl, die man zu a addieren muß, um b zu erhalten.

Nach dieser Definition hat eine Differenz $b - a$ nur dann einen Sinn, wenn die entsprechende Gleichung $a + x = b$ genau eine Lösung besitzt. In der Zahlenmenge $\mathbb{Q}_0^+$ war dies nur unter der Voraussetzung $a \leqq b$ der Fall. Für $a > b$ war die Gleichung unlösbar, somit die Subtraktion $b - a$ nicht ausführbar. Hat sich daran durch die Einführung der negativen Zahlen etwas geändert? Ist in der Zahlenmenge $\mathbb{Q}$ die Subtraktion immer durchführbar?
Um diese wichtige Frage zu klären, betrachten wir als Beispiel zunächst eine Gleichung, die in $\mathbb{Q}_0^+$ keine Lösung hat:

Beispiel:

$7 + x = 3$

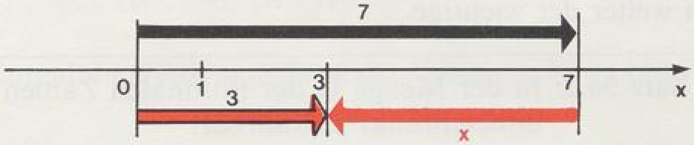

Abb. 55.1 Zur Gleichung $7 + x = 3$

Die Pfeildarstellung zeigt, daß es genau eine Zahl x gibt, die man zu 7 addieren muß, um 3 zu erhalten. Sie wird durch den von 7 nach 3 zeigenden Pfeil dargestellt. Man erkennt leicht, daß es die Zahl -4 ist.
Es gilt also: $7 + x = 3$ hat die Lösung $x = 3 - 7 = -4$.

Das in diesem Beispiel angewandte Verfahren läßt sich auf jede Gleichung der Form $a + x = b$ übertragen: Man stellt a und b durch vom Nullpunkt der Zahlengeraden ausgehende Pfeile dar. Dann gibt es genau einen Pfeil x, der von der Spitze des Pfeils a zur Spitze des Pfeils b führt; er stellt die einzige Lösung der Gleichung dar. Die Abbildung 55.2 zeigt einige typische Fälle.

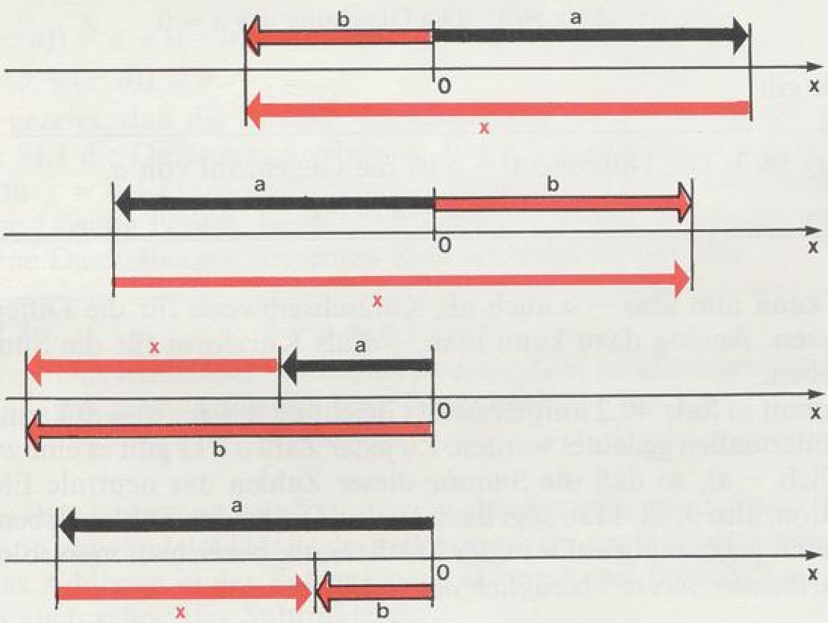

Abb. 55.2 Zur Gleichung $a + x = b$

Damit gilt folgender

Satz 56.1: Die Gleichung $a + x = b$ hat in der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen stets genau eine Lösung.

Da man die Lösung der Gleichung $a + x = b$ durch die Differenz $b - a$ ausdrückt (siehe Definition 54.1) und diese also für beliebige $a, b \in \mathbb{Q}$ definiert ist, gilt weiter der wichtige

Satz 56.2: In der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist die Subtraktion unbeschränkt ausführbar.

Durch die Einführung der negativen Zahlen ist es uns also gelungen, die früher bei der Subtraktion notwendigen Beschränkungen aufzuheben!

Ein wichtiger **Sonderfall** der Gleichung $a + x = b$ ergibt sich für $b = 0$. In diesem Fall, also für die Gleichung $a + x = 0$, lautet die Lösung: $x = 0 - a$. Bei dieser Differenz handelt es sich aber, wie Abbildung 56.1 zeigt, um die uns schon bekannte Gegenzahl von a, also $x = -a$.

Abb. 56.1 Die Gleichung $a + x = 0$

Damit gilt

Satz 56.3: Die Differenz $0 - a$ ist die Gegenzahl von a.

$$\mathbf{0 - a = -a}$$

Man kann nun also $-a$ auch als Kurzschreibweise für die Differenz $0 - a$ auffassen. Analog dazu kann man $+a$ als Kurzform für die Summe $0 + a$ verstehen.

Die schon in Satz 49.2 aufgetretene Gleichung $a + (-a) = 0$ kann nun auch folgendermaßen gedeutet werden: Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{Q}$ gibt es eine zweite Zahl (nämlich $-a$), so daß die Summe dieser Zahlen das neutrale Element der Addition, also 0, ist. Man sagt dazu auch: »Die beiden Zahlen heben sich beim Addieren gegenseitig auf.« In der Mathematik bezeichnet man solche Zahlen als *zueinander invers* bezüglich der Addition.*

* inversus (lat.) = umgekehrt

Satz 57.1: Zu jeder rationalen Zahl a gibt es genau eine Inverse bezüglich der Addition, nämlich die Gegenzahl $-a$.

Dieser Satz stellt ein weiteres Rechengesetz der Addition dar, das als »Existenz des Inversen« bezeichnet wird. Wir verwenden dafür die Abkürzung (I). Damit haben wir für die Addition in $\mathbb{Q}$ fünf Rechengesetze:

$$(E), (K), (A), (N), (I).$$

Wir betrachten noch einmal die Pfeildarstellung der Differenz $b-a$ (Abbildung 57.1).

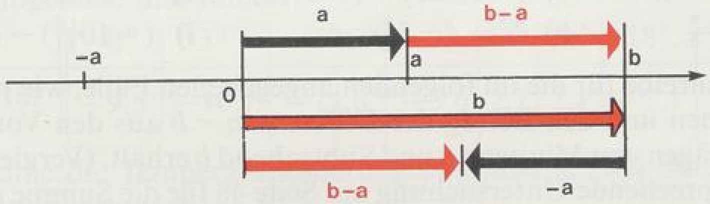

Abb. 57.1 Pfeildarstellung der Differenz

Offensichtlich erhält man den Pfeil $b-a$ auch dadurch, daß man an den Pfeil b den Pfeil $-a$ ansetzt, also die **Pfeilsumme** $b+(-a)$ bildet! Ob das allgemeingültig ist, können wir durch Rechnen überprüfen. Da $b-a$ die Lösung der Gleichung $a+x=b$ ist, rechnen wir nach, ob auch $b+(-a)$ diese Gleichung erfüllt:

$$a+(b+(-a)) \overset{K}{=} a+((-a)+b) \overset{A}{=} (a+(-a))+b = 0+b = b,$$

also $\quad a+(b+(-a)) = b$.

Damit ist gezeigt, daß die Lösung der Gleichung $a+x=b$, für die wir in Definition 54.1 die Differenzschreibweise $x=b-a$ vereinbart haben, auch in der Form $x=b+(-a)$ geschrieben werden kann. Da die Gleichung nur eine einzige Lösung besitzt, kann es sich bei $b-a$ und $b+(-a)$ nur um verschiedene Darstellungen derselben Zahl handeln! Es gilt also:

Satz 57.2: $\quad \boldsymbol{b-a=b+(-a)}$

Das heißt: Das Subtrahieren einer Zahl ist gleichbedeutend mit dem Addieren ihrer Gegenzahl.

Mit diesem Satz kann man jede Differenz in eine Summe, jede Subtraktion in eine Addition umwandeln! Das ist deshalb von großer praktischer Bedeutung, weil wir das Addieren in der Zahlenmenge $\mathbb{Q}$ bereits gut beherrschen – und damit nun auch schon das Subtrahieren.

Beispiele:

1) $5-11=5+(-11)=-(11-5)=-6.$

2) $(-2{,}17)-8{,}05=(-2{,}17)+(-8{,}05)=-(2{,}17+8{,}05)=-10{,}22.$

3) $(-6\frac{4}{15})-(-9\frac{7}{20})=(-6\frac{4}{15})+(-(-9\frac{7}{20}))=(-6\frac{4}{15})+9\frac{7}{20}=$
$=+(9\frac{7}{20}-6\frac{4}{15})=3\frac{5}{60}=3\frac{1}{12}.$

Aufgaben

1. Berechne folgende Differenzen:

a) $99-1000$ **b)** $(-99)-1000$ **c)** $(-99)-(-1000)$
d) $5{,}2-7{,}9$ **e)** $(-16{,}45)-(-17{,}5)$ **f)** $(-0{,}625)-0{,}625$
g) $\frac{51}{60}-\frac{7}{8}$ **h)** $2\frac{3}{7}-(-5\frac{2}{3})$ **i)** $(-10\frac{10}{11})-(-7{,}2)$

2. a) Beschreibe für die im folgenden angegebenen Fälle, wie man das Vorzeichen und den Betrag der Differenz $a-b$ aus den Vorzeichen und Beträgen von Minuend a und Subtrahend b erhält. (Vergleiche dazu die entsprechende Untersuchung auf Seite 48 für die Summe $a+b$.) Fertige jeweils eine Pfeilskizze an.
1. Fall: a positiv und b negativ
2. Fall: a negativ und b positiv
3. Fall: a und b positiv und $|a|>|b|$
4. Fall: a und b positiv und $|a|<|b|$
5. Fall: a und b negativ und $|a|>|b|$
6. Fall: a und b negativ und $|a|<|b|$

b) Formuliere nun einen dem Satz 49.1 entsprechenden Satz für die Subtraktion.

3. Schreibe nach Definition 54.1 die Lösung der Gleichung als Differenz und berechne sie.

a) $3+x=1$ **b)** $-3+x=1$ **c)** $3+x=-1$
d) $-3+x=-1$ **e)** $x+2{,}7=1{,}5$ **f)** $x+(-2{,}7)=1{,}5$
g) $x+2{,}7=-1{,}5$ **h)** $x+(-2{,}7)=-1{,}5$ **i)** $5\frac{1}{3}=x+8\frac{1}{2}$
k) $2\frac{1}{3}-4\frac{1}{12}=9\frac{1}{2}+x$ **l)** $231{,}77+378{,}29=-167{,}71+x$

4. Berechne:

a) $21-(17+14)$ **b)** $(-123)-(213-321)$
c) $(-76)-(18+58)$ **d)** $(-51{,}6)+(34{,}9-(-17{,}7))$
e) $((-15\frac{13}{24})+81\frac{5}{9})-100$ **f)** $13{,}25-(2\frac{3}{4}-(-1\frac{2}{3}))$

5. Berechne:

a) $(365-640)+(575-700)$
b) $(62{,}8-20{,}25)-(32{,}08+10{,}47)$
c) $((-0{,}216)+0{,}173)-(17{,}3-21{,}6)$
d) $(16-12\frac{4}{15})-(8{,}75+(-3\frac{7}{9}))$

• **6.** Bestimme die Lösung einer Gleichung vom Typ $x - a = b$, indem du $x - a$ als Summe schreibst und Definition 54.1 anwendest.

a) $x - 5 = -3$ **b)** $x - 22 = 29{,}3$

c) $x - 2\frac{1}{9} = 3\frac{1}{3} - 6\frac{1}{5}$ **d)** $5\frac{1}{6} - 14\frac{1}{2} = x - 8\frac{1}{3}$

e) $33 - (17 + 48) = x - 25$ **f)** $x - (3\frac{1}{12} + 8\frac{1}{36}) = 4\frac{1}{18} - 9\frac{1}{9}$

⁞ **7.** Bestimme die Lösung einer Gleichung vom Typ $a - x = b$, indem du $a - x$ als Summe schreibst und nach Definition 54.1 zuerst $-x$ berechnest.

a) $10 - x = 20$ **b)** $3\frac{1}{4} - x = 5\frac{1}{8}$

c) $6{,}92 - x = 2{,}17 - (0{,}25 - 4{,}5)$ **d)** $4\frac{1}{6} + 3\frac{1}{6} = 7\frac{1}{3} - x$

8. Während eines Wintertages wurde im Abstand von je 3 Stunden die Temperatur abgelesen und notiert:

Uhrzeit	0^h	3^h	6^h	9^h	12^h	15^h	18^h	21^h	24^h
Temperatur in °C	$-9{,}5$	$-10{,}7$	$-11{,}8$	$-5{,}6$	$2{,}7$	$2{,}1$	$-2{,}1$	$-5{,}8$	$-7{,}3$

a) Berechne die Temperaturänderung zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Ablesungen.

b) In welchem dieser Zeitabschnitte war die Temperaturabnahme, in welchem die Temperaturzunahme am größten?

9. Gase werden bei sehr tiefen Temperaturen flüssig, z. B. Sauerstoff bei $-183\,°C$ und Helium bei $-269\,°C$. Um wieviel Grad muß man Helium, das mit flüssigem Sauerstoff vorgekühlt wurde, noch weiter abkühlen, um es zu verflüssigen?

10. Wenn man Quecksilber abkühlt, erstarrt es bei einer Temperatur von $-59\,°C$. Um wieviel Grad muß sich Quecksilber, das die Temperatur von flüssigem Sauerstoff ($-183\,°C$) hat, erwärmen, damit es wieder flüssig wird?

11. Auf das Bankkonto des Herrn Knapp wurde am Monatsersten sein Gehalt in Höhe von 3275 DM überwiesen. Am gleichen Tag wurden 840 DM als Monatsmiete abgebucht. Danach betrug sein Guthaben 2361,42 DM. Wie hoch war der Kontostand vor den beiden Buchungen?

12. Auf einer Reise durch den Westen der USA übernachtet Familie Brown im berühmten Death Valley (California). Am nächsten Tag fahren sie weiter nach NW in die Sierra Nevada und erreichen dabei am Tioga-Paß (Meereshöhe 3031) den höchsten Punkt. Herr Brown stellt fest, daß sie damit an diesem Tag einen Höhenunterschied von 3116 m überwunden haben. Auf welcher Meereshöhe liegt demnach der tiefste Punkt des Death Valley (= tiefster Punkt in den USA!)?