Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

2.5.1 Definition der Anordnung in Q

2.5 Anordnung der rationalen Zahlen

2.5.1 Definition der Anordnung in $\mathbb{Q}$

Für je zwei Zahlen p und q aus der Menge $\mathbb{Q}_0^+$ ist die folgende Aussage richtig:

Entweder gilt $p = q$, gelesen »p ist gleich q«,
oder es gilt $p < q$, gelesen »p ist kleiner als q«,
oder es gilt $p > q$, gelesen »p ist größer als q«.

Man sagt deshalb: »Die Zahlenmenge $\mathbb{Q}_0^+$ ist angeordnet.« Die Aussagen $p < q$ oder $p > q$ nannte 1838 der Gymnasialdirektor Johann Heinrich Traugott MÜLLER (1797–1862) in seinem *Lehrbuch der Mathematik für Gymnasien und Realschulen* **Ungleichungen**.

Das Zeichen = wurde von dem Engländer Robert RECORD(E) (1510(?)–1558) erfunden. In seinem *The whetstone of witte* (Der Schleifstein des Denkens) schreibt er 1557: »And to avoid the tedious repetition of these words ›is equal to‹ I will set [...] a pair of parallels, or twin lines of one length, thus: ═, because no 2 things can be more equal.« – *Zeichen der Gleichheit* nannte es 1791 Johann Heinrich VOIGT (1751–1823). Die Zeichen < und > erscheinen zum ersten Mal in der postum 1631 gedruckten *Artis analyticae praxis ad aequationes algebraicas resolvendas* des Engländers Thomas HARRIOT (1560–1621). Der Herausgeber, Walter WARNER, gab HARRIOTS handschriftlichen Zeichen ⋖ bzw. ⋗ diese einfache Form.

Wir wollen nun versuchen, die Anordnung in $\mathbb{Q}_0^+$ auf die größere Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen auszudehnen. Dazu müssen wir auch für die neu hinzugekommenen negativen Zahlen die Verwendung der Zeichen < und > sinnvoll festlegen. Da in $\mathbb{Q}_0^+$ die Ungleichung $p < q$ bedeutet, daß auf dem *Zahlenstrahl* der Punkt p links vom Punkt q liegt, bietet es sich an, zu vereinbaren, daß auch für zwei Zahlen a und b aus $\mathbb{Q}$ die Beziehung $a < b$ genau dann gelten soll, wenn auf der *Zahlengeraden* der Punkt a links vom Punkt b liegt (Abbildung 60.1). Damit müßte z.B. $-20 < -1$ oder $-500 < 0$ oder $-2 < 0{,}2$ gelten! Deutet man die Zahlen etwa als Angaben über Temperaturen oder Kontostände, so erkennt man, daß solche Ungleichungen durchaus sinnvoll sind.

Definition 60.1: Für zwei rationale Zahlen a und b gilt $a < b$ genau dann, wenn auf der Zahlengeraden der Punkt a links vom Punkt b liegt.
Statt $a < b$ schreibt man auch $b > a$.

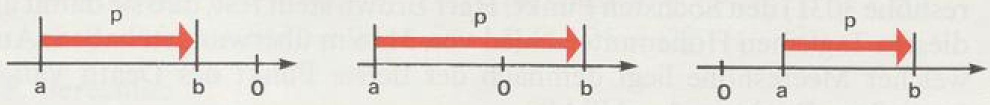

Abb. 60.1 Veranschaulichung von $a < b$

Aus Definition 60.1 folgt, daß nun auch in der Menge $\mathbb{Q}$ für je zwei Zahlen a, b die Aussage zutrifft:

Es gilt entweder $a = b$ oder $a < b$ oder $a > b$.

Auf Grund der Anordnung auf der Zahlengeraden bestehen zwischen den negativen Zahlen, der Zahl null und den positiven Zahlen die folgenden Beziehungen:

Satz 61.1: 1. Jede positive Zahl ist größer als 0.
2. Jede negative Zahl ist kleiner als 0.
3. Jede negative Zahl ist kleiner als jede positive.

Wegen Teil 1 und 2 dieses Satzes können wir die Aussagen »a ist positiv« bzw. »a ist negativ« kürzer durch die Ungleichungen $a > 0$ bzw. $a < 0$ beschreiben.

Wie die Abbildung 60.1 zeigt, ist im Fall $a < b$ der Pfeil von a nach b stets rechtsgerichtet; er stellt also eine positive Zahl p dar. p ist diejenige Zahl, die man zu a addieren muß, um b zu erhalten, also die Differenz $b - a$. Da umgekehrt für eine Zahl $p > 0$ zur Summe $a + p$ immer ein rechts von a liegender Punkt der Zahlengeraden gehört, gilt

Satz 61.2: $a < b$ gilt genau dann, wenn es eine positive Zahl p gibt, so daß $a + p = b$.

Beispiele:

1) $-20 < -1$; denn $-20 + 19 = -1$.
2) $-500 < 0$; denn $-500 + 500 = 0$.
3) $-2 < 0{,}2$; denn $-2 + 2{,}2 = 0{,}2$.
4) $\frac{4}{5} < \frac{5}{6}$; denn $\frac{4}{5} + \frac{1}{30} = \frac{5}{6}$.

2.5.2 Monotoniegesetz der Addition

Wir wissen: Wenn man zwei gleiche Zahlen a und b hat und zu jeder dieselbe Zahl c addiert, erhält man auch gleiche Summen. Das heißt, aus $a = b$ folgt stets $a + c = b + c$.

Beispiel*: $2 + 3 = 5 \Rightarrow (2 + 3) + 8 = 5 + 8$

Welche Beziehung besteht aber zwischen $a + c$ und $b + c$, wenn a und b verschiedene Zahlen sind, wenn z. B. $a < b$ gilt?

Abb. 61.1 Zum Monotoniegesetz der Addition

* Den Folgepfeil $\Rightarrow$ liest man *daraus folgt*.