Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

2.5.2 Monotoniegesetz der Addition

Auf Grund der Anordnung auf der Zahlengeraden bestehen zwischen den negativen Zahlen, der Zahl null und den positiven Zahlen die folgenden Beziehungen:

> **Satz 61.1:** 1. Jede positive Zahl ist größer als 0.
> 2. Jede negative Zahl ist kleiner als 0.
> 3. Jede negative Zahl ist kleiner als jede positive.

Wegen Teil 1 und 2 dieses Satzes können wir die Aussagen »a ist positiv« bzw. »a ist negativ« kürzer durch die Ungleichungen $a > 0$ bzw. $a < 0$ beschreiben.

Wie die Abbildung 60.1 zeigt, ist im Fall $a < b$ der Pfeil von a nach b stets rechtsgerichtet; er stellt also eine positive Zahl p dar. p ist diejenige Zahl, die man zu a addieren muß, um b zu erhalten, also die Differenz $b - a$. Da umgekehrt für eine Zahl $p > 0$ zur Summe $a + p$ immer ein rechts von a liegender Punkt der Zahlengeraden gehört, gilt

> **Satz 61.2:** $a < b$ gilt genau dann, wenn es eine positive Zahl p gibt, so daß $a + p = b$.

Beispiele:

1) $-20 < -1$; denn $-20 + 19 = -1$.
2) $-500 < 0$; denn $-500 + 500 = 0$.
3) $-2 < 0{,}2$; denn $-2 + 2{,}2 = 0{,}2$.
4) $\frac{4}{5} < \frac{5}{6}$; denn $\frac{4}{5} + \frac{1}{30} = \frac{5}{6}$.

2.5.2 Monotoniegesetz der Addition

Wir wissen: Wenn man zwei gleiche Zahlen a und b hat und zu jeder dieselbe Zahl c addiert, erhält man auch gleiche Summen. Das heißt, aus $a = b$ folgt stets $a + c = b + c$.

Beispiel*: $2 + 3 = 5 \Rightarrow (2 + 3) + 8 = 5 + 8$

Welche Beziehung besteht aber zwischen $a + c$ und $b + c$, wenn a und b verschiedene Zahlen sind, wenn z.B. $a < b$ gilt?

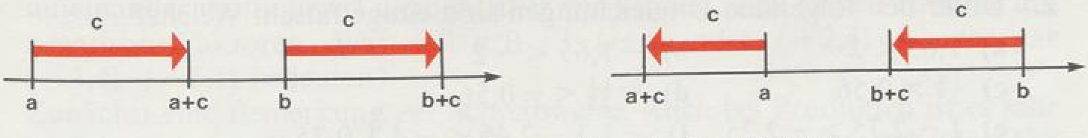

Abb. 61.1 Zum Monotoniegesetz der Addition

* Den Folgepfeil $\Rightarrow$ liest man *daraus folgt*.

Wie Abbildung 61.1 zeigt, gilt mit $a < b$ stets auch $a + c < b + c$, und zwar unabhängig davon, ob $c > 0$ oder $c < 0$ oder $c = 0$ gewählt wird. Die Addition von c verschiebt jeden der Punkte a und b auf der Zahlengeraden um den Pfeil c. Dabei bleibt ihre Reihenfolge und sogar ihre Entfernung erhalten. Daß umgekehrt aus $a + c < b + c$ auch wieder die Ungleichung $a < b$ folgt, erkennt man, indem man auf beiden Seiten $-c$ addiert. Damit gilt

Satz 62.1: Monotoniegesetz der Addition
Addiert man auf beiden Seiten einer Ungleichung dieselbe Zahl, so bleibt das Ungleichheitszeichen erhalten; kurz:

$$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$$

Ein entsprechendes Monotoniegesetz gilt auch für die Subtraktion, denn man kann ja nach Satz 57.2 jede Differenz auch als Summe schreiben. Durchführung in Aufgabe 63/3.
Das Monotoniegesetz der Addition wendet man gerne an, um festzustellen, ob eine Ungleichung zutrifft oder nicht.

Beispiele:

1) $-36 < -6 \Leftrightarrow -36 + 6 < -6 + 6 \Leftrightarrow -30 < 0$
2) $-36 < -6 \Leftrightarrow -36 + 36 < -6 + 36 \Leftrightarrow 0 < 30$
3) $-36 < -6 \Leftrightarrow -36 + 21 < -6 + 21 \Leftrightarrow -15 < 15$
4) $2{,}25 > \frac{47}{20} \Leftrightarrow 2{,}25 - \frac{7}{20} > \frac{47}{20} - \frac{7}{20} \Leftrightarrow 2{,}25 - 0{,}35 > \frac{40}{20} \Leftrightarrow 1{,}9 > 2\,(!)$
5) $2{,}25 > \frac{47}{20} \Leftrightarrow 2{,}25 - 2{,}25 > \frac{47}{20} - 2{,}25 \Leftrightarrow 0 > 2{,}35 - 2{,}25 \Leftrightarrow 0 > 0{,}1\,(!)$

Die Beispiele 1, 2 und 5 zeigen, wie man durch Anwendung des Monotoniegesetzes der Addition bzw. Subtraktion eine Ungleichung auf »Nullform« bringen, d.h. auf einer Seite der Ungleichung die Zahl 0 herstellen kann. An einer solchen Nullform erkennt man besonders leicht, ob die Ungleichung wahr oder falsch ist.

Aufgaben

1. Stelle aus den Zahlen der folgenden Paare mit einem der Zeichen $=, <, >$ eine richtige Gleichung bzw. Ungleichung her.

a) $0;\ 0{,}1$	**b)** $3;\ -1$	**c)** $-5{,}6;\ -6{,}5$	**d)** $-\frac{7}{20};\ -0{,}35$
e) $-25;\ 0$	**f)** $-0{,}99;\ 0{,}01$	**g)** $-\frac{0}{40};\ \frac{0}{24}$	**h)** $-\frac{19}{24};\ -\frac{33}{40}$
i) $-3;\ -1$	**k)** $-1{,}4;\ \frac{7}{5}$	**l)** $10;\ -100$	**m)** $-57;\ -75$

2. Unter den folgenden Ungleichungen sind einige falsch! Welche?

a) $1{,}65 < 2$	**b)** $-1{,}65 < -2$
c) $\frac{14}{25} > 0{,}56$	**d)** $-\frac{14}{25} < -0{,}56$
e) $1 - 2{,}75 > -2{,}25$	**f)** $-1{,}3 - 2{,}45 < -4 + 0{,}75$

g) $3{,}5 - (2\frac{7}{8} + 0{,}625) \neq (1\frac{3}{8} - \frac{1}{2}) - 0{,}875$
h) $0{,}5 - (\frac{2}{7} + \frac{1}{5}) \neq 1{,}2 - \frac{17}{14}$