Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

Aufgaben

urn:nbn:de:hbz:466:1-83493

Wie Abbildung 61.1 zeigt, gilt mit $a < b$ stets auch $a + c < b + c$, und zwar unabhängig davon, ob $c > 0$ oder $c < 0$ oder $c = 0$ gewählt wird. Die Addition von c verschiebt jeden der Punkte a und b auf der Zahlengeraden um den Pfeil c. Dabei bleibt ihre Reihenfolge und sogar ihre Entfernung erhalten. Daß umgekehrt aus $a + c < b + c$ auch wieder die Ungleichung $a < b$ folgt, erkennt man, indem man auf beiden Seiten $-c$ addiert. Damit gilt

Satz 62.1: Monotoniegesetz der Addition

Addiert man auf beiden Seiten einer Ungleichung dieselbe Zahl, so bleibt das Ungleichheitszeichen erhalten; kurz:

$$a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$$

Ein entsprechendes Monotoniegesetz gilt auch für die Subtraktion, denn man kann ja nach Satz 57.2 jede Differenz auch als Summe schreiben. Durchführung in Aufgabe 63/3.

Das Monotoniegesetz der Addition wendet man gerne an, um festzustellen, ob eine Ungleichung zutrifft oder nicht.

Beispiele:

1) $-36 < -6 \Leftrightarrow -36 + 6 < -6 + 6 \Leftrightarrow -30 < 0$
2) $-36 < -6 \Leftrightarrow -36 + 36 < -6 + 36 \Leftrightarrow 0 < 30$
3) $-36 < -6 \Leftrightarrow -36 + 21 < -6 + 21 \Leftrightarrow -15 < 15$
4) $2{,}25 > \frac{47}{20} \Leftrightarrow 2{,}25 - \frac{7}{20} > \frac{47}{20} - \frac{7}{20} \Leftrightarrow 2{,}25 - 0{,}35 > \frac{40}{20} \Leftrightarrow 1{,}9 > 2\,(!)$
5) $2{,}25 > \frac{47}{20} \Leftrightarrow 2{,}25 - 2{,}25 > \frac{47}{20} - 2{,}25 \Leftrightarrow 0 > 2{,}35 - 2{,}25 \Leftrightarrow 0 > 0{,}1\,(!)$

Die Beispiele 1, 2 und 5 zeigen, wie man durch Anwendung des Monotoniegesetzes der Addition bzw. Subtraktion eine Ungleichung auf »Nullform« bringen, d. h. auf einer Seite der Ungleichung die Zahl 0 herstellen kann. An einer solchen Nullform erkennt man besonders leicht, ob die Ungleichung wahr oder falsch ist.

Aufgaben

1. Stelle aus den Zahlen der folgenden Paare mit einem der Zeichen $=, <, >$ eine richtige Gleichung bzw. Ungleichung her.

a) $0;\ 0{,}1$ **b)** $3;\ -1$ **c)** $-5{,}6;\ -6{,}5$ **d)** $-\frac{7}{20};\ -0{,}35$
e) $-25;\ 0$ **f)** $-0{,}99;\ 0{,}01$ **g)** $-\frac{0}{40};\ \frac{0}{24}$ **h)** $-\frac{19}{24};\ -\frac{33}{40}$
i) $-3;\ -1$ **k)** $-1{,}4;\ \frac{7}{5}$ **l)** $10;\ -100$ **m)** $-57;\ -75$

2. Unter den folgenden Ungleichungen sind einige falsch! Welche?

a) $1{,}65 < 2$ **b)** $-1{,}65 < -2$
c) $\frac{14}{25} > 0{,}56$ **d)** $-\frac{14}{25} < -0{,}56$
e) $1 - 2{,}75 > -2{,}25$ **f)** $-1{,}3 - 2{,}45 < -4 + 0{,}75$
g) $3{,}5 - (2\frac{7}{8} + 0{,}625) \neq (1\frac{3}{8} - \frac{1}{2}) - 0{,}875$
h) $0{,}5 - (\frac{2}{7} + \frac{1}{5}) \neq 1{,}2 - \frac{17}{14}$

3. Zum **Monotoniegesetz der Subtraktion**

a) Fasse folgenden Satz in Worte und begründe ihn:
Für alle $a, b, c \in \mathbb{Q}$ gilt: $a < b \Rightarrow a - c < b - c$.

b) Begründe: Für alle $a, b, d \in \mathbb{Q}$ gilt: $a - d < b - d \Rightarrow a < b$.

4. Stelle bei den folgenden Ungleichungen ihre beiden Nullformen her und entscheide, ob die Ungleichungen wahr oder falsch sind.

a) $9{,}99 < 9{,}999$ **b)** $-1{,}001 < -1{,}01$

c) $1{,}85 > \frac{13}{7}$ **d)** $-\frac{17}{24} > -\frac{18}{25}$

e) $1{,}5 - \frac{4}{15} < 1\frac{11}{50}$ **f)** $16{,}1 - \frac{17}{18} > 18\frac{1}{3} - 3\frac{2}{11}$

5. Auch für Ungleichungen der Form $a \neq b$ gilt das Monotoniegesetz der Addition: $a \neq b \Leftrightarrow a + c \neq b + c$.

a) Gib zu diesem Monotoniegesetz drei Beispiele an.

b) Begründe dieses Monotoniegesetz.

6. Wenn man bei zwei Ungleichungen $a < b$ und $c < d$ die Zahlen links vom Ungleichheitszeichen sowie die Zahlen rechts davon addiert und das Ungleichheitszeichen beibehält, so entsteht wieder eine richtige Ungleichung. Kurz:

$$\left.\begin{array}{l} \text{aus } a < b \\ \text{und } c < d \end{array}\right\} \text{ folgt } a + c < b + d.$$

a) Prüfe diese Behauptung an drei Zahlenbeispielen.

(!) •**b)** Beweise die obige Behauptung, indem du bei $a < b$ auf beiden Seiten c und bei $c < d$ auf beiden Seiten b addierst und die erhaltenen Ungleichungen miteinander vergleichst. Mache dir die Zusammenhänge auch an der Zahlengeraden klar.

•**c)** An der Ungleichung $3 + 97 < 1 + 100$ erkennt man, daß der in **b)** bewiesene Satz nicht umkehrbar ist. Begründe dies und gib ein weiteres Gegenbeispiel an.

2.6 Multiplikation und Division von rationalen Zahlen

2.6.1 Definition der Multiplikation in $\mathbb{Q}$

In der Menge der rationalen Zahlen beherrschen wir bis jetzt erst das Addieren und das Subtrahieren. Zwar wissen wir auch, wie Zahlen aus der Menge $\mathbb{Q}_0^+$ miteinander multipliziert werden, aber wir kennen noch keine Produkte mit negativen Faktoren. Was soll z.B. $3 \cdot (-4)$ oder $(-2{,}4) \cdot \frac{2}{3}$ oder gar $(-3{,}4) \cdot (-5{,}1)$ bedeuten?
Zunächst eine Bemerkung zur Schreibweise: Auch bei Produkten ist es sehr wichtig, zwischen Vorzeichen und Rechenzeichen genau zu unterscheiden. Ein Faktor mit Vorzeichen muß, wie die Beispiele zeigen, in Klammern gesetzt werden.