Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

2.6 Multiplikation und Division von rationalen Zahlen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83493

3. Zum **Monotoniegesetz der Subtraktion**

a) Fasse folgenden Satz in Worte und begründe ihn:
Für alle $a, b, c \in \mathbb{Q}$ gilt: $a < b \Rightarrow a - c < b - c$.

b) Begründe: Für alle $a, b, d \in \mathbb{Q}$ gilt: $a - d < b - d \Rightarrow a < b$.

4. Stelle bei den folgenden Ungleichungen ihre beiden Nullformen her und entscheide, ob die Ungleichungen wahr oder falsch sind.

a) $9{,}99 < 9{,}999$ **b)** $-1{,}001 < -1{,}01$

c) $1{,}85 > \frac{13}{7}$ **d)** $-\frac{17}{24} > -\frac{18}{25}$

e) $1{,}5 - \frac{4}{15} < 1\frac{11}{50}$ **f)** $16{,}1 - \frac{17}{18} > 18\frac{1}{3} - 3\frac{2}{11}$

5. Auch für Ungleichungen der Form $a \neq b$ gilt das Monotoniegesetz der Addition: $a \neq b \Leftrightarrow a + c \neq b + c$.

a) Gib zu diesem Monotoniegesetz drei Beispiele an.

b) Begründe dieses Monotoniegesetz.

6. Wenn man bei zwei Ungleichungen $a < b$ und $c < d$ die Zahlen links vom Ungleichheitszeichen sowie die Zahlen rechts davon addiert und das Ungleichheitszeichen beibehält, so entsteht wieder eine richtige Ungleichung. Kurz:

$$\left.\begin{array}{l}\text{aus } a < b \\ \text{und } c < d\end{array}\right\} \text{ folgt } a + c < b + d.$$

a) Prüfe diese Behauptung an drei Zahlenbeispielen.

(!) •**b)** Beweise die obige Behauptung, indem du bei $a < b$ auf beiden Seiten c und bei $c < d$ auf beiden Seiten b addierst und die erhaltenen Ungleichungen miteinander vergleichst. Mache dir die Zusammenhänge auch an der Zahlengeraden klar.

•**c)** An der Ungleichung $3 + 97 < 1 + 100$ erkennt man, daß der in **b)** bewiesene Satz nicht umkehrbar ist. Begründe dies und gib ein weiteres Gegenbeispiel an.

2.6 Multiplikation und Division von rationalen Zahlen

2.6.1 Definition der Multiplikation in $\mathbb{Q}$

In der Menge der rationalen Zahlen beherrschen wir bis jetzt erst das Addieren und das Subtrahieren. Zwar wissen wir auch, wie Zahlen aus der Menge $\mathbb{Q}_0^+$ miteinander multipliziert werden, aber wir kennen noch keine Produkte mit negativen Faktoren. Was soll z.B. $3 \cdot (-4)$ oder $(-2{,}4) \cdot \frac{2}{3}$ oder gar $(-3{,}4) \cdot (-5{,}1)$ bedeuten?
Zunächst eine Bemerkung zur Schreibweise: Auch bei Produkten ist es sehr wichtig, zwischen Vorzeichen und Rechenzeichen genau zu unterscheiden. Ein Faktor mit Vorzeichen muß, wie die Beispiele zeigen, in Klammern gesetzt werden.

Produkte mit negativen Faktoren müssen wir also erst noch definieren. Natürlich versuchen wir wieder, es so einzurichten, daß für die Multiplikation in $\mathbb{Q}$ die Rechengesetze erhalten bleiben, die uns für die Multiplikation in $\mathbb{Q}_0^+$ geläufig sind (Permanenzprinzip, vgl. Seite 38). Zur Wiederholung stellen wir diese Rechengesetze hier zusammen:

Rechengesetze der Multiplikation in $\mathbb{Q}_0^+$

Für alle Zahlen a, b, c aus $\mathbb{Q}_0^+$ gilt:

(E)	**$a \cdot b$ ist wieder eine Zahl aus $\mathbb{Q}_0^+$**	**eindeutige Existenz des Produkts**
(K)	**$a \cdot b = b \cdot a$**	**Kommutativgesetz der Multiplikation**
(A)	**$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$**	**Assoziativgesetz der Multiplikation**
(N)	**$a \cdot 1 = a$**	**1 ist neutrales Element der Multiplikation**

Produkte traten erstmals beim Rechnen mit natürlichen Zahlen auf. Sie wurden dort als Kurzschreibweise für Summen mit gleichen Summanden eingeführt; z. B. gilt: $3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4$. Deshalb liegt es nahe, ein Produkt wie $3 \cdot (-4)$ ebenfalls als abgekürzte Schreibweise für eine Summe aufzufassen, nämlich als $3 \cdot (-4) = (-4) + (-4) + (-4)$. Die rechts vom Gleichheitszeichen stehende Summe können wir berechnen! Wir erhalten so $3 \cdot (-4) =$ $= -12$, wofür man wegen $12 = 3 \cdot 4$ auch schreiben kann:

$$\mathbf{3 \cdot (-4) = -(3 \cdot 4)}$$

Das sieht nach einer sehr einfachen Regel aus! Man kann sie offenbar immer dann anwenden, wenn der erste Faktor eine natürliche Zahl und größer als 1 ist.

Beispiele:

1) $5 \cdot (-0{,}7) = (-0{,}7) + (-0{,}7) + (-0{,}7) + (-0{,}7) + (-0{,}7) =$
$= -3{,}5 = -(5 \cdot 0{,}7)$

2) $2 \cdot (-3\tfrac{2}{9}) = (-3\tfrac{2}{9}) + (-3\tfrac{2}{9}) = -6\tfrac{4}{9} = -(2 \cdot 3\tfrac{2}{9})$

Ein Produkt wie $3{,}4 \cdot (-5{,}1)$, bei dem der erste Faktor zwar wieder positiv, jedoch nicht ganzzahlig ist, kann nicht mehr als Summe gedeutet werden. Wohl aber ist es auch hier möglich, den Term $-(3{,}4 \cdot 5{,}1)$ zu berechnen. Der Vergleich mit den obigen Beispielen legt nahe, zu vereinbaren, daß $3{,}4 \cdot (-5{,}1) = -(3{,}4 \cdot 5{,}1)$ gelten soll. Dieses Verfahren läßt sich auf alle Produkte mit positivem ersten und negativem zweiten Faktor anwenden. Wir erhalten so

Definition 65.1: Für das Produkt aus einer positiven Zahl p und einer negativen Zahl $-q$ soll gelten:

$$p \cdot (-q) = -(p \cdot q)$$

Beachte, daß in dieser Definition (und auch im folgenden) die Variablen p und q positive Zahlen vertreten!
Vertauscht man im Beispiel $3{,}4 \cdot (-5{,}1)$ die Reihenfolge der Faktoren, so erhält man ein Produkt, bei dem der erste Faktor negativ, der zweite positiv ist. Natürlich soll, da wir ja das Kommutativgesetz retten wollen, dieses Produkt denselben Wert wie $3{,}4 \cdot (-5{,}1)$ erhalten! Es soll also gelten: $(-5{,}1) \cdot 3{,}4 = 3{,}4 \cdot (-5{,}1) = -(3{,}4 \cdot 5{,}1)$ bzw., da man die positiven Faktoren in der letzten Klammer vertauschen darf:

$$(-5{,}1) \cdot 3{,}4 = -(5{,}1 \cdot 3{,}4)$$

Die Verallgemeinerung dieser Überlegung führt zu

Definition 65.2: Für das Produkt aus einer negativen Zahl $-p$ und einer positiven Zahl q soll gelten:

$$(-p) \cdot q = -(p \cdot q)$$

Die beiden in den Definitionen 65.1 und 65.2 enthaltenen Regeln lassen sich so zusammenfassen: Man erhält das Produkt aus einer positiven und einer negativen Zahl, indem man das Minuszeichen des negativen Faktors vor das Produkt der beiden Beträge setzt.
Wenn wir nun weiter überlegen, wie man ein Produkt aus zwei negativen Faktoren, z. B. $(-3{,}4) \cdot (-5{,}1)$, definieren soll, so liegt es nahe, die Regeln in den Definitionen 65.1 und 65.2 versuchsweise auch jetzt zu benützen, also das »Herausziehen des Minuszeichens« auch in diesem Fall anzuwenden (Permanenzprinzip!). Damit erhält man:

$(-3{,}4) \cdot (-5{,}1) = -((-3{,}4) \cdot 5{,}1) =$ (Anwendung von Def. 65.1 auch bei negativem 1. Faktor!)
$= -(-(3{,}4 \cdot 5{,}1)) =$ (nach Def. 65.2)
$= 3{,}4 \cdot 5{,}1$ (nach Satz 42.1)

Die Verallgemeinerung dieses Vorgehens würde also folgende Regel ergeben: $(-p) \cdot (-q) = p \cdot q$ für $p > 0$ und $q > 0$.
Demnach müßte das Produkt zweier negativer Zahlen positiv sein! Das mag auf den ersten Blick überraschen. Sinnvoll erscheint aber jedenfalls, daß, wie in den vorausgehenden Fällen, der Betrag des Produktes wieder den Wert $p \cdot q$ haben soll. Dann kann das Produkt selbst aber nur $p \cdot q$ oder $-(p \cdot q)$ sein. Der Produktwert $-(p \cdot q)$ ergab sich aber bereits in den Fällen $p \cdot (-q)$ und $(-p) \cdot q$, von denen sich $(-p) \cdot (-q)$ doch sicherlich unterscheiden sollte. Das spricht wieder für das Ergebnis $p \cdot q$, also für

Definition 66.1: Für das Produkt zweier negativer Zahlen $-p$ und $-q$ soll gelten:

$$(-p)\cdot(-q) = p \cdot q$$

Der jetzt noch verbleibende Fall, daß eine negative Zahl mit 0 multipliziert werden soll, bereitet uns wenig Mühe. Natürlich soll ein solches Produkt wieder den Wert 0 haben:

Definition 66.2: Für das Produkt einer negativen Zahl $-p$ mit der Zahl 0 soll gelten:

$$(-p)\cdot 0 = 0 \cdot(-p) = 0$$

Nunmehr sind wir in der Lage, das Produkt zweier beliebiger rationaler Zahlen zu berechnen. Die dafür geltenden Regeln kann man so zusammenfassen:

Satz 66.1: Zwei rationale Zahlen mit gleichen Vorzeichen werden multipliziert, indem man ihre Beträge multipliziert.
Zwei rationale Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen werden multipliziert, indem man das Produkt ihrer Beträge bildet und ihm das negative Vorzeichen gibt.
Ein Produkt mit dem Faktor 0 hat den Wert 0.

Beispiele:

1) $4\cdot(-5) = -(4\cdot 5) = -20$
2) $(-3)\cdot 17 = -(3\cdot 17) = -51$
3) $(-1)\cdot(-1) = 1\cdot 1 = 1$
4) $(-8)\cdot(-7{,}5) = 8\cdot 7{,}5 = 60$
5) $2{,}5\cdot(-3{,}7) = -(2{,}5\cdot 3{,}7) = -9{,}25$
6) $(-\frac{3}{4})\cdot 1\frac{1}{9} = -(\frac{3}{4}\cdot 1\frac{1}{9}) = -(\frac{3}{4}\cdot\frac{10}{9}) = -\frac{5}{6}$
7) $(-100\,000)\cdot 0 = 0$

Wichtige Sonderfälle von Produkten sind solche aus zwei gleichen Faktoren, also die **Quadrate*** rationaler Zahlen: $\boldsymbol{a\cdot a = a^2}$.

Beispiele:

1) $4^2 = 16$; **2)** $(-4)^2 = (-4)\cdot(-4) = 4\cdot 4 = 16$
3) $0^2 = 0$; **4)** $(-1{,}2)^2 = (-1{,}2)\cdot(-1{,}2) = 1{,}2\cdot 1{,}2 = 1{,}44$

* Das Produkt einer Zahl mit sich selbst nannten die Griechen – so belegt bei Euklid, 8. Buch der *Elemente* – τετράγωνος [ἀριθμός] (tetrágonos [arithmós]) = *viereckig[e Zahl]*, da sie den Inhalt des τετράγωνον [σχῆμα] (tetrágonon [s-chema]) = *viereckig[e Figur]* angab, falls diese Figur gleichseitig rechtwinklig ist. Über das lateinische *quadratus* = *viereckig* entstand das deutsche **Quadrat**.

Auf Grund dieser Beispiele vermuten wir die Gültigkeit von

> **Satz 67.1:** Das Quadrat einer von 0 verschiedenen rationalen Zahl ist positiv. Das Quadrat von 0 ist 0. Kurz:
> $$\boldsymbol{a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0 \quad \text{und} \quad 0^2 = 0}$$

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus Satz 66.1 (vgl. Aufgabe 69/**2**).

2.6.2 Eigenschaften der Multiplikation in $\mathbb{Q}$

Es war unser Ziel, die Multiplikation in $\mathbb{Q}$ so zu definieren, daß die auf Seite 64 zusammengestellten Rechengesetze gültig bleiben. Ob uns das gelungen ist, muß nun geprüft werden.

1) Existenz des Produkts: Mit Hilfe der Definitionen in **2.6.1** bzw. nach Satz 66.1 kann man zwei rationale Zahlen stets miteinander multiplizieren. Das Ergebnis ist wieder eine Zahl aus $\mathbb{Q}$. Damit bleibt (E) in $\mathbb{Q}$ gültig.

2) Kommutativgesetz der Multiplikation: Hier muß untersucht werden, ob die Gleichung $a \cdot b = b \cdot a$ für beliebige rationale Zahlen gilt. Bei den hierzu notwendigen **Fallunterscheidungen** verwenden wir wieder p und q als Zeichen für positive Zahlen.

1. Fall: $a > 0$ und $b > 0$

Dann gilt, wie schon bekannt, $a \cdot b = b \cdot a$ ((K) in $\mathbb{Q}_0^+$).

2. Fall: $a > 0$ und $b < 0$

Wir setzen $a = p$, $b = -q$; dann gilt

$$\begin{aligned} a \cdot b = p \cdot (-q) &= -(p \cdot q) = && \text{(Definition 65.1)} \\ &= -(q \cdot p) = && \text{((K) in } \mathbb{Q}_0^+) \\ &= (-q) \cdot p = && \text{(Definition 65.2)} \\ &= b \cdot a. \end{aligned}$$

3. Fall: $a < 0$ und $b > 0$

Wir setzen $a = -p$ und $b = q$; dann gilt

$$\begin{aligned} a \cdot b = (-p) \cdot q &= -(p \cdot q) = && \text{(Definition 65.2)} \\ &= -(q \cdot p) = && \text{((K) in } \mathbb{Q}_0^+) \\ &= q \cdot (-p) = && \text{(Definition 65.1)} \\ &= b \cdot a. \end{aligned}$$

4. Fall: $a < 0$ und $b < 0$

Wir setzen $a = -p$ und $b = -q$; dann gilt

$$\begin{aligned} a \cdot b = (-p) \cdot (-q) &= p \cdot q = && \text{(Definition 66.1)} \\ &= q \cdot p = && \text{((K) in } \mathbb{Q}_0^+) \\ &= (-q) \cdot (-p) = && \text{(Definition 66.1)} \\ &= b \cdot a. \end{aligned}$$

5. Fall: $a = 0$ oder $b = 0$

Dann gilt $a \cdot b = 0 = b \cdot a$ (Satz 66.1)

Damit ist nachgewiesen, daß in jedem Fall $a \cdot b = b \cdot a$ gilt. Also bleibt (K) für die Multiplikation in $\mathbb{Q}$ gültig.

3) **Assoziativgesetz der Multiplikation:** Gilt $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ für beliebige rationale Zahlen a, b, c?

1) Wenn mindestens einer der drei Faktoren 0 ist, gilt nach Satz 66.1: $(a \cdot b) \cdot c = 0 = a \cdot (b \cdot c)$.

2) Wenn keiner der drei Faktoren 0 ist, bestehen folgende acht Möglichkeiten:

	1. Fall	2. Fall	3. Fall	4. Fall	5. Fall	6. Fall	7. Fall	8. Fall
a	pos.	pos.	pos.	pos.	neg.	neg.	neg.	neg.
b	pos.	pos.	neg.	neg.	pos.	pos.	neg.	neg.
c	pos.	neg.	pos.	neg.	pos.	neg.	pos.	neg.

Im 1. Fall gehören alle drei Faktoren zur Menge $\mathbb{Q}^+$, in welcher (A) gilt. Als Muster für die Überprüfung der übrigen Fälle soll hier nur der 6. Fall untersucht werden:

6. Fall: $a < 0$, $b > 0$ und $c < 0$

Wir setzen $a = -p$, $b = q$ und $c = -r$, mit p, q, r aus $\mathbb{Q}^+$.

Dann gilt:

$$(a \cdot b) \cdot c = ((-p) \cdot q) \cdot (-r) = (-(pq)) \cdot (-r) = \quad \text{(Definition 65.2)}$$
$$= (pq)r. \quad \text{(Definition 66.1)}$$
$$a \cdot (b \cdot c) = (-p) \cdot (q \cdot (-r)) = (-p) \cdot (-(qr)) = \quad \text{(Definition 65.1)}$$
$$= p(qr). \quad \text{(Definition 66.1)}$$

Wegen der Gültigkeit von (A) in $\mathbb{Q}^+$ ist aber $(pq)r = p(qr)$, also gilt $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Nach derselben Methode kann man auch die übrigen Fälle untersuchen (vgl. Aufgabe 70/**4**). Dabei zeigt sich, daß (A) für die Multiplikation in $\mathbb{Q}$ gültig bleibt.

4) **Neutrales Element der Multiplikation:** Für $a < 0$, also $a = -p$, gilt:

$$a \cdot 1 = (-p) \cdot 1 = -(p \cdot 1) = \quad \text{(Definition 65.2)}$$
$$= -p = \quad ((\mathrm{N}) \text{ in } \mathbb{Q}^+)$$
$$= a.$$

Daraus folgt, daß 1 auch für die negativen und damit für alle rationalen Zahlen neutrales Element der Multiplikation ist.

Damit ist gezeigt:

> **Satz 69.1:** Für die Multiplikation in der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen gelten wieder die auf Seite 64 zusammengestellten Rechengesetze (E), (K), (A), (N).

Ebenso wie bei dreigliedrigen Summen kann man nun auch bei Produkten mit drei Faktoren wegen (A) auf Klammern verzichten:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c.$$

Mit Hilfe von (K) erkennt man, daß auch die Reihenfolge der Faktoren beliebig verändert werden darf:

Beispiel 1:

Behauptung: $abc = cba$

Beweis: $abc \overset{\mathrm{A}}{=} (ab)c \overset{\mathrm{K}}{=} c(ab) \overset{\mathrm{K}}{=} c(ba) \overset{\mathrm{A}}{=} cba.$

Ganz entsprechend läßt sich auch bei Produkten mit mehr als drei Faktoren zeigen, daß man auf Klammern verzichten kann und daß auch die Reihenfolge der Faktoren beliebig geändert werden darf.

Beispiel 2:

$$\begin{aligned}12{,}5 \cdot (-23{,}91) \cdot 8 &\overset{\mathrm{A}}{=} 12{,}5 \cdot ((-23{,}91) \cdot 8) = \\ &\overset{\mathrm{K}}{=} ((-23{,}91) \cdot 8) \cdot 12{,}5 = \\ &\overset{\mathrm{A}}{=} (-23{,}91) \cdot (8 \cdot 12{,}5) = \\ &= (-23{,}91) \cdot 100 = -2391.\end{aligned}$$

Beispiel 2 zeigt, wie man durch die Wahl einer günstigen Reihenfolge der Faktoren und der Rechenschritte die Berechnung eines Produktes oft vereinfachen kann. Achte also stets auf solche **Rechenvorteile**.

Aufgaben

1. **a)** $(-5) \cdot 24$ **b)** $16 \cdot (-30)$ **c)** $(-125) \cdot (-81)$
d) $(-2{,}5) \cdot 0{,}28$ **e)** $(-17{,}25) \cdot (-3{,}04)$ **f)** $0{,}064 \cdot (-6{,}25)$
g) $3\frac{4}{15} \cdot (-2\frac{1}{7})$ **h)** $(-\frac{7}{12}) \cdot (-\frac{3}{14})$ **i)** $(-8{,}45) \cdot 1\frac{1}{39}$

2. Beweise Satz 67.1. Unterscheide dabei die Fälle $a > 0$, $a = 0$ und $a < 0$.

3. **a)** $1{,}1^2$ **b)** $(-0{,}11)^2$ **c)** $(-32)^2$ **d)** $(-\frac{11}{12})^2$
e) $(0{,}375 - \frac{3}{8})^2$ **f)** $(\frac{3}{6} - \frac{4}{7})^2$ **g)** $(\frac{4}{7} - \frac{3}{6})^2$ **h)** $((-\frac{4}{7}) - \frac{3}{6})^2$

4. Überprüfe das Assoziativgesetz $(ab)c = a(bc)$ nach dem Muster des auf Seite 68 durchgeführten 6. Falles

a) für $a > 0,\ b > 0,\ c < 0$ (2. Fall),
b) für $a > 0,\ b < 0,\ c < 0$ (4. Fall),
c) für $a < 0,\ b < 0,\ c < 0$ (8. Fall).

5. Berechne die folgenden Produkte. Achte dabei auf Rechenvorteile.

a) $4 \cdot (-37) \cdot \frac{3}{4}$ **b)** $(-107) \cdot 8 \cdot (-25)$
c) $(-0{,}2) \cdot (-6{,}28) \cdot (-50)$ **d)** $(-300) \cdot 1\frac{2}{3} \cdot (-0{,}132)$
e) $(-\frac{17}{91}) \cdot 0 \cdot (-\frac{14}{31})$ **f)** $(-2\frac{2}{3})^2 \cdot (-\frac{21}{32}) \cdot \frac{3}{7}$

6. Begründe den **Satz**: Ein Produkt, in dem kein Faktor 0 ist, hat genau dann einen positiven Wert, wenn die Anzahl der negativen Faktoren gerade ist.

7. Setze zwischen die folgenden Zahlenterme eines der Zeichen $<, =, >$ so, daß eine wahre Aussage entsteht. In welchen Beispielen ist dies ohne Rechnung möglich?

a) $7 \cdot (-0{,}02)$ und 1 **b)** $(-12) \cdot (-13)$ und 150
c) -6 und $(-1) \cdot (-2) \cdot (-3)$ **d)** $(-\frac{3}{7}) \cdot (-\frac{14}{27}) \cdot (-9\frac{10}{11})$ und 0
e) $(-0{,}64)^2$ und $-0{,}64$ **f)** $(-\frac{13}{18}) \cdot 4{,}5$ und $5{,}4 \cdot (-0{,}6)$

8. a) $(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4)$ **b)** $1 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot (-4)$
c) $(-2{,}5) \cdot (-1{,}6) \cdot 3{,}25 \cdot (-0{,}5)$ **d)** $1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3} \cdot (-1\frac{1}{4}) \cdot 1\frac{1}{5}$

9. Achte bei der Berechnung der folgenden Summen und Differenzen auf die richtige Reihenfolge der Rechenschritte.

a) $(-1) + (-2) \cdot (-3)$ **b)** $(-1) \cdot (-2) - (-3) \cdot (-4)$
c) $250 \cdot (-0{,}25) - 25 \cdot (-0{,}250)$ **d)** $(-4{,}56) \cdot (-10{,}5) + 6{,}3 \cdot (-7{,}6)$
e) $(-8{,}1) \cdot \frac{25}{27} - (-0{,}98) \cdot (-\frac{5}{7})$ **f)** $(-\frac{1}{2}) \cdot \frac{3}{4} \cdot (-\frac{5}{6}) + 2 \cdot (-\frac{4}{3}) \cdot \frac{6}{5}$

10. a) $(263 - 298)(298 - 263)$ **b)** $(41{,}5 + (-67{,}75)) \cdot ((-2{,}1) - 1{,}9)$
c) $(1\frac{2}{7} - 2\frac{1}{7}) \cdot 3{,}5 \cdot ((-1\frac{2}{3}) - \frac{1}{6})$ **d)** $(1 - \frac{7}{2})(2 - \frac{7}{3})(3 - \frac{7}{4})$

11. Berechne folgende Absolutbeträge:

a) $|5(-2)|$ **b)** $|(-8) \cdot 9|$ **c)** $|(-17)(-3)|$ **d)** $|24 \cdot 25|$
e) $|0{,}75(-4)(-\frac{2}{3})|$ **f)** $|(-0{,}75) \cdot 4 \cdot \frac{2}{3}|$
g) $|(-0{,}75)(-4)(-\frac{2}{3})|$ **h)** $|9{,}81 \cdot (-\frac{7}{11}) \cdot 0 \cdot (-3\frac{1}{3})|$

12. Beweise den **Satz**: Der Betrag des Produktes zweier rationaler Zahlen a und b ist gleich dem Produkt der Beträge dieser Zahlen, d.h.
$|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|$.

13. Berechne den Wert der folgenden Terme für die angegebenen Einsetzungen:

a) $T(x) = x^2 + 4x + 1$ für $x = -5(-2{,}3;\ 0;\ 2)$
b) $T(a;b) = (a + 2b)(a - 2b)$ für $a = 3;\ b = -1{,}5$ und
für $a = -8{,}3;\ b = -3{,}8$

c) $T(x; y; z) = xyz - (x-y)(y-z)$ für $x = -12; y = 4; z = 18$ und für $x = 0{,}8; y = -1{,}25; z = -9{,}65$

d) $T(a; b; c) = |(a-b) - c| - (|a| - |b-c|)$ für $a = -22;\ b = -18;$ $c = 33$ und für $a = -14{,}3;\ b = -5{,}8;\ c = -6{,}7$

2.6.3 Division in $\mathbb{Q}$

Es kommt häufig vor, daß von einem Produkt der Wert bekannt ist und einer der Faktoren bestimmt werden muß. Dessen Berechnung führt auf eine **Division**. Man bezeichnet wegen dieses Zusammenhangs die Division als **Umkehrung der Multiplikation**.

Beispiel:

Die Klasse 7a mietet für einen Ausflug einen Bus. Sie muß dafür 350 DM bezahlen. Welchen Fahrpreis hat jeder der 28 Schüler zu entrichten?

Wenn wir den Fahrpreis pro Schüler mit x DM bezeichnen, muß gelten:

$$28 \cdot x = 350; \quad \text{also} \quad x = 350 : 28 = 12{,}5.$$

Jeder Schüler muß also 12,50 DM bezahlen.

Man erkennt an diesem mit Zahlen aus $\mathbb{Q}^+$ gebildeten Beispiel, daß der **Quotient** 350 : 28 die **Lösung der Gleichung** $28 \cdot x = 350$ darstellt. Genau diese Bedeutung wollen wir nun auch für Quotienten aus beliebigen rationalen Zahlen vereinbaren:

> **Definition 71.1:** Unter dem Quotienten $b : a$ der rationalen Zahlen b und $a \neq 0$ versteht man die Lösung der Gleichung $a \cdot x = b$.
>
> Statt $b : a$ schreibt man auch $\frac{b}{a}$.

$b : a$ ist also diejenige Zahl, mit der man a multiplizieren muß, um b zu erhalten.

Nach dieser Definition hat ein Quotient $b : a$ nur dann einen Sinn, wenn die entsprechende Gleichung $a \cdot x = b$ für $a \neq 0$ genau eine Lösung hat. Wir wissen schon, daß dies für $a \in \mathbb{Q}^+$ und $b \in \mathbb{Q}_0^+$ zutrifft. Gilt das aber auch, wenn a oder b negativ ist? Das läßt sich mit Hilfe einer Fallunterscheidung überprüfen:

1. Fall: $a > 0$ und $b < 0$

Wir setzen $a = p$ und $b = -q$ $(p > 0, q > 0)$; dann gilt:

$a \cdot x = b \Leftrightarrow p \cdot x = -q.$

Falls diese Gleichung eine Lösung x besitzt, muß sie negativ sein. Für sie gilt also: $x = -|x|$. Damit erhält man:
$p \cdot x = -q \Leftrightarrow p \cdot (-|x|) = -q \Leftrightarrow -(p \cdot |x|) = -q \Leftrightarrow p \cdot |x| = q$.
Dies ist nun eine Gleichung mit positiven Zahlen. Sie hat die Lösung $|x| = \frac{q}{p}$. Damit gilt: $x = -\frac{q}{p}$.

Ergebnis: Die Gleichung $p \cdot x = -q$ hat die Lösung $x = -\frac{q}{p}$.

Auf ganz entsprechende Weise kann man auch den 2. und 3. Fall untersuchen. Man findet dabei folgende Ergebnisse:

2. Fall: $a < 0$ und $b > 0$

Die Gleichung $(-p) \cdot x = q$ hat die Lösung $x = -\frac{q}{p}$.

3. Fall: $a < 0$ und $b < 0$

Die Gleichung $(-p) \cdot x = -q$ hat die Lösung $x = \frac{q}{p}$.

4. Fall: $a < 0$ und $b = 0$

Nach Satz 66.1 ist $x = 0$ eine Lösung der Gleichung $a \cdot x = 0$. Dies muß auch die einzige Lösung sein; denn für $x > 0$ wäre $a \cdot x < 0$, für $x < 0$ wäre $a \cdot x > 0$.

Damit ist nachgewiesen:

Satz 72.1: Die Gleichung $a \cdot x = b$ hat für $a \neq 0$ in der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen stets genau eine Lösung.

Für den Fall $a = 0$, d.h. für die Gleichung $0 \cdot x = b$, gelten in $\mathbb{Q}$ dieselben Feststellungen wie in $\mathbb{Q}_0^+$:
Wenn $b \neq 0$, hat die Gleichung $0 \cdot x = b$ **keine Lösung**,
wenn $b = 0$, ist **jede Zahl eine Lösung**.
Daher sind Quotienten mit dem Nenner 0 auch in $\mathbb{Q}$ sinnlos. Damit gilt

Satz 72.2: In der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen kann man jede Zahl durch jede **von 0 verschiedene** Zahl dividieren.
Aber: **Durch 0 kann man nicht dividieren.**

Aus den in den ersten drei Fällen berechneten Lösungen der Gleichung $a \cdot x = b$ und der Quotientendefinition 71.1 können wir weitere wichtige Folgerungen ableiten:

Die Gleichung $p \cdot x = -q$ (1. Fall) hat die Lösung $x = -\frac{q}{p}$. Für diese Lösung haben wir aber in Definition 71.1 die Schreibweise $\frac{-q}{p}$ vereinbart. Daher gilt: $\frac{-q}{p} = -\frac{q}{p}$.

Ganz entsprechend erhalten wir im 2. und 3. Fall:

$\frac{q}{-p} = -\frac{q}{p}$ und $\frac{-q}{-p} = \frac{q}{p}$. Damit haben wir **Vorzeichenregeln für Quotienten** gewonnen! Diese entsprechen ganz den Regeln für Produkte, die wir in den Definitionen 65.1, 65.2 und 66.1 aufgestellt haben.

> **Satz 73.1:** Für Quotienten rationaler Zahlen gelten mit $p > 0$ und $q > 0$ folgende Vorzeichenregeln:
>
> $$\frac{-q}{p} = -\frac{q}{p}, \quad \frac{q}{-p} = -\frac{q}{p}, \quad \frac{-q}{-p} = \frac{q}{p},$$
>
> bzw. $(-q):p = -(q:p), \quad q:(-p) = -(q:p),$
> $(-q):(-p) = q:p$

Beispiele:

1) $\frac{-24}{8} = -\frac{24}{8} = -3$; $\frac{-121}{-22} = \frac{121}{22} = \frac{11}{2} = 5{,}5$;

2) $6{,}25 : (-1{,}25) = -(6{,}25 : 1{,}25) = -5$;

3) $(-\frac{7}{11}) : (-\frac{3}{11}) = \frac{7}{11} : \frac{3}{11} = \frac{7}{11} \cdot \frac{11}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$.

Einen wichtigen Sonderfall stellt die Gleichung $a \cdot x = 1$ dar. Für $a \neq 0$ hat sie nach Satz 72.1 genau eine Lösung, nämlich $x = \frac{1}{a}$, also den **Kehrwert** von a. Es gilt somit $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, d.h., das Produkt der Zahlen a und $\frac{1}{a}$ ist gleich dem neutralen Element der Multiplikation. Daher bezeichnet man diese Zahlen als *zueinander invers bezüglich der Multiplikation*. Es gilt

> **Satz 73.2:** Zu jeder von 0 verschiedenen rationalen Zahl a gibt es genau eine Inverse bezüglich der Multiplikation, nämlich ihren Kehrwert $\frac{1}{a}$.

Dieser Satz stellt ein weiteres Rechengesetz der Multiplikation dar, das man als »Existenz des Inversen« bezeichnet und mit (I) abkürzt. Damit kennen wir für die Multiplikation in $\mathbb{Q}$ die fünf Rechengesetze (E), (K), (A), (N), (I).

Für $a \neq 0$ hat also der Term $a \cdot \frac{1}{a}$ stets den Wert 1. Multipliziert man ihn mit einem Faktor b, so erhält man daher $\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) \cdot b = 1 \cdot b$, also $\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) \cdot b = b$.

Eine einfache Umformung der linken Seite liefert die Gleichung

$$a \cdot \left(b \cdot \frac{1}{a}\right) = b\,.$$

Diese läßt sich nun so deuten:

$$b \cdot \frac{1}{a} \quad \text{ist Lösung der Gleichung} \quad a \cdot x = b\,.$$

Da aber diese Gleichung nur eine einzige Lösung hat und wir für diese in Definition 71.1 die Schreibweise $\frac{b}{a}$ eingeführt haben, müssen $\frac{b}{a}$ und $b \cdot \frac{1}{a}$ lediglich verschiedene Schreibweisen für dieselbe Zahl sein. Daher gilt

Satz 74.1: Die Division durch eine Zahl $a \neq 0$ kann man durch die Multiplikation mit ihrem Kehrwert $\frac{1}{a}$ ersetzen und umgekehrt,

d.h., $\boldsymbol{\frac{b}{a} = b \cdot \frac{1}{a}}$ bzw. $\boldsymbol{b : a = b \cdot (1 : a)}$ für $a \neq 0$.

Beispiele:

1) $\frac{45}{0{,}3} = 45 \cdot \frac{10}{3} = 150$; **2)** $(-\frac{7}{12}) : \frac{3}{4} = (-\frac{7}{12}) \cdot \frac{4}{3} = -\frac{7}{9}$;

3) $126 \cdot \frac{1}{21} = 126 : 21 = 6$; **4)** $(-6{,}6) \cdot \frac{5}{11} = (-6{,}6) : 2{,}2 = -3$.

Aufgaben

1. Berechne die folgenden Quotienten:
   a) $105 : (-15)$ **b)** $(-7) : (-1)$ **c)** $(-65) : 125$
   d) $(-3{,}24) : (-1{,}8)$ **e)** $1024 : 32$ **f)** $(-10{,}24) : 0{,}064$
   g) $2{,}7 : (-81)$ **h)** $(-2{,}5) : (-0{,}35)$ **i)** $(-18) : 21{,}6$

2. Gib den Wert der folgenden Brüche in möglichst einfacher Form an:
   a) $\frac{5}{-1}$ **b)** $\frac{-16}{12}$ **c)** $\frac{-35}{-49}$ **d)** $\frac{84}{144}$
   e) $\frac{(-1)^2}{-1}$ **f)** $\frac{(-1)^3}{(-1)^5}$ **g)** $\frac{-1}{(-1)^{20}}$ **h)** $\frac{(-1)^{16}}{(-1)^{57}}$
   i) $\frac{8}{(-2)^2}$ **k)** $\frac{(-2)^3}{5}$ **l)** $\frac{(-3)^2}{(-3)^3}$ **m)** $\frac{2^4}{(-1)^7}$

3. Berechne:

a) $(3-5^2):(20-9)$ **b)** $(\frac{3}{8}+0{,}625):(\frac{3}{8}-0{,}625)$

c) $(2\frac{1}{3}-5):4\frac{4}{9}$ **d)** $(-10\frac{5}{7}):(\frac{12}{13}-1\frac{1}{7})$

e) $(11\cdot 25):(31-75)$ **f)** $(8{,}5:(-\frac{5}{7})):((-3{,}4)\cdot 2{,}5)$

4. Berechne den Wert folgender Bruchterme:

a) $\dfrac{16\cdot 1{,}2-20}{16-1{,}2\cdot 20}$ **b)** $\dfrac{3{,}6\cdot 2{,}5\cdot(-1{,}6)}{3{,}6+(2{,}5-1{,}6)}$

c) $\dfrac{4{,}3-0{,}72\cdot(-31)}{1\frac{5}{6}:(-\frac{5}{12})}$ **d)** $\dfrac{(10\frac{1}{2}+6\frac{5}{6}):(2\frac{13}{15}-6\frac{1}{5})}{\frac{7}{9}\cdot(-\frac{3}{35})\cdot 1\frac{2}{7}}$

5. Gib, wenn möglich, zu den folgenden Zahlen die Inversen bezüglich der Addition und bezüglich der Multiplikation an.

a) 1 **b)** -1 **c)** 0 **d)** $-0{,}125$

e) $\frac{2}{7}$ **f)** $-4{,}5$ **g)** $0{,}75$ **h)** $-2\frac{3}{11}$

6. Begründe den **Satz:** Es gibt keine rationale Zahl, für welche die Inverse bezüglich der Addition gleich der Inversen bezüglich der Multiplikation ist.

7. Schreibe nach Definition 71.1 die Lösung der Gleichung als Quotienten und berechne sie.

a) $(-1)\cdot x=17$ **b)** $3x=-12$ **c)** $x\cdot(-38)=-7{,}6$

d) $\frac{5}{7}\cdot x=-\frac{1}{49}$ **e)** $(2-\frac{2}{3})x=2\frac{2}{3}$ **f)** $x\cdot(-2\frac{1}{4})=0{,}125-1{,}25$

8. Welche Lösungsmengen haben die folgenden Gleichungen?

a) $x\cdot(\frac{12}{15}-0{,}8)=1$ **b)** $(0{,}625:5-\frac{1}{8})\cdot x=0$

c) $x\cdot(\frac{3}{4}-\frac{4}{3})=\frac{4}{3}-\frac{3}{4}$ **d)** $(\frac{3}{20}-0{,}15)\cdot x=(\frac{3}{20}-0{,}15)\cdot 7$

2.6.4 Allgemeine Vorzeichenregeln für Produkte und Quotienten

Die Multiplikation einer Zahl $a\in\mathbb{Q}$ mit 1, dem neutralen Element der Multiplikation, bewirkt keine Änderung: $a\cdot 1=a$. Was aber erhält man, wenn man a mit der Gegenzahl von 1, also mit -1, multipliziert?

Beispiele:

1) $7\cdot(-1)=-(7\cdot 1)=-7$; **2)** $(-1)\cdot 0=-(1\cdot 0)=-0=0$

3) $(-1)\cdot 3{,}14=-(1\cdot 3{,}14)=-3{,}14$; **4)** $(-\frac{5}{7})\cdot(-1)=\frac{5}{7}\cdot 1=\frac{5}{7}$

Wie man leicht beweisen kann (vgl. Aufgabe 78/2) gilt

Satz 75.1: Multipliziert man eine Zahl mit -1, so erhält man ihre Gegenzahl.

$$\boldsymbol{a\cdot(-1)=(-1)\cdot a=-a}$$

Das Interessante an diesem Satz ist, daß man das Bilden der Gegenzahl nun auch als Multiplikation mit -1 beschreiben kann. Das ist oft nützlich, z. B. bei den folgenden Überlegungen:
In der Algebra treten häufig Produkte der Form $a \cdot (-b)$, $(-a) \cdot (-b)$ usw. auf, bei denen die Variablen a, b *beliebige rationale Zahlen* vertreten. Zum Vereinfachen solcher Produkte darf man daher nicht ohne weiteres die in den Definitionen 65.1, 65.2 und 66.1 aufgestellten Regeln anwenden, denn die dort benützten Variablen p, q bedeuten *positive Zahlen*. Immerhin wäre es denkbar und wünschenswert (Permanenzprinzip!), daß diese Regeln auch für beliebige rationale Zahlen gültig bleiben. Das soll nun untersucht werden:

Beispiel 1:

$a \cdot (-b)$ kann man folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} a \cdot (-b) &= a \cdot ((-1) \cdot b) = && \text{(Satz 75.1)} \\ &\overset{\text{K}}{=} a \cdot (b \cdot (-1)) = \\ &\overset{\text{A}}{=} (a \cdot b)(-1) = \\ &= -(a \cdot b). && \text{(Satz 75.1)} \end{aligned}$$

Natürlich ist wegen (K) damit auch die Regel $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$ bewiesen.

Beispiel 2:

$(-a) \cdot (-b)$ kann man so umformen:

$$\begin{aligned} (-a) \cdot (-b) &= (-a) \cdot ((-1) \cdot b) = && \text{(Satz 75.1)} \\ &\overset{\text{A}}{=} ((-a) \cdot (-1)) \cdot b = \\ &= (-(-a)) \cdot b = && \text{(Satz 75.1)} \\ &= a \cdot b. && \text{(Satz 42.1)} \end{aligned}$$

Nimmt man der Vollständigkeit halber noch die Vereinbarung $a \cdot b = ab$ hinzu und schreibt, um die Vorzeichen zu betonen, für a, b und ab noch $+a$, $+b$, $+ab$, so erhält man folgende allgemeingültigen Vorzeichenregeln für Produkte:

Satz 76.1: Für beliebige rationale Zahlen a, b gilt:

$$\begin{aligned} &(+a) \cdot (+b) = +ab \qquad && (-a) \cdot (-b) = +ab \\ &(+a) \cdot (-b) = -ab && (-a) \cdot (+b) = -ab \end{aligned}$$

Diese Vorzeichenregeln prägt man sich am besten in folgender Form ein:

Regel 76.1: $(+) \cdot (+) = +$ $\qquad (-) \cdot (-) = +$
$(+) \cdot (-) = -$ $\qquad (-) \cdot (+) = -$

Man kann nun also auch Produkte mit Variablen, die *beliebige* Zahlen vertreten, in gewohnter Weise vereinfachen. Dazu einige

Beispiele:

1) $5(-a) = -5a$; **2)** $(-2)(-3b) = 6b$;
3) $(-x)y(-z) = xyz$; **4)** $(-2)(-0{,}5)(-\frac{1}{3}z) = -\frac{1}{3}z$.

Auch von den in Satz 73.1 enthaltenen Vorzeichenregeln für Quotienten, die dort nur für positive Zahlen p, q bewiesen wurden, kann man zeigen, daß sie für beliebige rationale Zahlen gelten:

Beispiel:

$$\frac{-b}{a} = (-b) \cdot \frac{1}{a} = \qquad \text{(Satz 74.1)}$$
$$= ((-1)b) \cdot \frac{1}{a} = \qquad \text{(Satz 75.1)}$$
$$\triangleq (-1)\left(b \cdot \frac{1}{a}\right) =$$
$$= (-1) \cdot \frac{b}{a} = \qquad \text{(Satz 74.1)}$$
$$= -\frac{b}{a}. \qquad \text{(Satz 75.1)}$$

Auf dieselbe Weise kann man zeigen, daß auch $\frac{b}{-a} = -\frac{b}{a}$ und $\frac{-b}{-a} = \frac{b}{a}$ für beliebige Zahlen gilt. Zusammen mit $\frac{+b}{+a} = +\frac{b}{a}$ erhält man so

Satz 77.1: Für rationale Zahlen $a \neq 0$ und b gilt:

$$\frac{+b}{+a} = +\frac{b}{a}, \quad \frac{-b}{-a} = +\frac{b}{a}, \quad \frac{+b}{-a} = -\frac{b}{a}, \quad \frac{-b}{+a} = -\frac{b}{a}$$

Die entsprechende Merkregel lautet:

Regel 77.1: $\frac{+}{+} = + \qquad \frac{-}{-} = + \qquad \frac{+}{-} = - \qquad \frac{-}{+} = -$

Beachte, daß man in diesen Regeln den Bruchstrich auch durch den Doppelpunkt als Divisionszeichen ersetzen kann.

Beispiele:

1) $\frac{-a}{2} = -\frac{a}{2}$; **2)** $\frac{(-x)y}{(-2z)} = \frac{-(xy)}{-(2z)} = \frac{xy}{2z}$;

3) $15:(-u) = -(15:u)$; **4)** $(-2vw):(-xy) = (2vw):(xy)$.

Aufgaben

1. Vereinfache durch Anwendung der Vorzeichenregeln für Produkte:
   a) $(-2)\cdot x$ **b)** $(-5)(-y)$ **c)** $(-z)(+2{,}3)$
   d) $a(-b)(+c)$ **e)** $(-a)(-b)c$ **f)** $(+a)(+b)(-c)$
2. Beweise die Gleichung $a\cdot(-1) = -a$ (Satz 75.1) mit Hilfe der Fallunterscheidung $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$. Gib jeweils an, welche Definitionen oder Sätze benützt werden.
3. **a)** Stelle entsprechend der Regel 76.1 die Vorzeichenregeln für Produkte mit drei Faktoren symbolisch dar.
   b) Ergänze zu richtigen Vorzeichenregeln:
   $(-)\cdot(+)\cdot(-)\cdot(+) = ?$ und $(+)\cdot(-)\cdot(-)\cdot(+)\cdot(-) = ?$
4. Vereinfache durch Anwenden der Vorzeichenregeln für Quotienten:
   a) $\dfrac{2(-m)}{-3}$ **b)** $\dfrac{(-1)(+m)}{(+1)(-n)}$ **c)** $\dfrac{(-21)(-s)t}{q(+r)(-5)}$
5. Verwandle in den folgenden Produkten den Zahlenfaktor in einen Divisor.
   a) $m\cdot\frac{1}{7}$ **b)** $n\cdot 0{,}2$ **c)** $p\cdot(-0{,}25)$
   d) $(-\frac{2}{9})\cdot q$ **e)** $r\cdot(1\frac{2}{3})$ **f)** $(-\frac{10}{13})\cdot s$
6. Schreibe die folgenden Quotienten als Produkte:
   a) $x:0{,}5$ **b)** $y:\frac{1}{6}$ **c)** $z:(-\frac{2}{3})$
   d) $(-u):(-0{,}125)$ **e)** $v:(3\frac{1}{3})$ **f)** $w:(-0{,}001)$

2.7 Die Rechengesetze für die rationalen Zahlen

2.7.1 Das Distributivgesetz

Im bisherigen Rechenunterricht hast du schon das **Verteilungs-** oder **Distributivgesetz*** kennengelernt. Es besagt, daß man beim Multiplizieren einer Summe auf zwei verschiedenen Wegen zum richtigen Ergebnis kommen kann. Dazu ein

Beispiel:

Die Klasse 7b besteht aus 16 Knaben und 10 Mädchen. Für den Besuch einer Ausstellung sammelt der Klassensprecher pro Schüler 2,50 DM ein. Wieviel Geld muß er dann haben?

1. Weg: Man rechnet »2,50 DM · Gesamtzahl der Schüler«, also

$$2{,}50\,\text{DM}\cdot(16+10) = 2{,}50\,\text{DM}\cdot 26 = 65{,}00\,\text{DM}.$$

* distribuere (lat.) = verteilen. – Der Ausdruck *distributiv* wurde ebenso wie das Wort *kommutativ* 1814 von dem französischen Professor der Mathematik François Joseph Servois (1767–1847) geprägt. Siehe auch die Fußnote* auf Seite 50.