UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

2.6.1 Definition der Multiplikation in Q

urn:nbn:de:hbz:466:1-83493

Visual Library

3. Zum **Monotoniegesetz der Subtraktion**
   a) Fasse folgenden Satz in Worte und begründe ihn:
   Für alle $a, b, c \in \mathbb{Q}$ gilt: $a < b \Rightarrow a - c < b - c$.
   b) Begründe: Für alle $a, b, d \in \mathbb{Q}$ gilt: $a - d < b - d \Rightarrow a < b$.

4. Stelle bei den folgenden Ungleichungen ihre beiden Nullformen her und entscheide, ob die Ungleichungen wahr oder falsch sind.
   a) $9{,}99 < 9{,}999$ **b)** $-1{,}001 < -1{,}01$
   c) $1{,}85 > \frac{13}{7}$ **d)** $-\frac{17}{24} > -\frac{18}{25}$
   e) $1{,}5 - \frac{4}{15} < 1\frac{11}{50}$ **f)** $16{,}1 - \frac{17}{18} > 18\frac{1}{3} - 3\frac{2}{11}$

5. Auch für Ungleichungen der Form $a \neq b$ gilt das Monotoniegesetz der Addition: $a \neq b \Leftrightarrow a + c \neq b + c$.
   a) Gib zu diesem Monotoniegesetz drei Beispiele an.
   b) Begründe dieses Monotoniegesetz.

6. Wenn man bei zwei Ungleichungen $a < b$ und $c < d$ die Zahlen links vom Ungleichheitszeichen sowie die Zahlen rechts davon addiert und das Ungleichheitszeichen beibehält, so entsteht wieder eine richtige Ungleichung. Kurz:

   $$\left.\begin{array}{l}\text{aus } a < b \\ \text{und } c < d\end{array}\right\} \text{ folgt } a + c < b + d.$$

   a) Prüfe diese Behauptung an drei Zahlenbeispielen.
   • **b)** Beweise die obige Behauptung, indem du bei $a < b$ auf beiden Seiten c und bei $c < d$ auf beiden Seiten b addierst und die erhaltenen Ungleichungen miteinander vergleichst. Mache dir die Zusammenhänge auch an der Zahlengeraden klar.
   • **c)** An der Ungleichung $3 + 97 < 1 + 100$ erkennt man, daß der in **b)** bewiesene Satz nicht umkehrbar ist. Begründe dies und gib ein weiteres Gegenbeispiel an.

2.6 Multiplikation und Division von rationalen Zahlen

2.6.1 Definition der Multiplikation in $\mathbb{Q}$

In der Menge der rationalen Zahlen beherrschen wir bis jetzt erst das Addieren und das Subtrahieren. Zwar wissen wir auch, wie Zahlen aus der Menge $\mathbb{Q}_0^+$ miteinander multipliziert werden, aber wir kennen noch keine Produkte mit negativen Faktoren. Was soll z. B. $3 \cdot (-4)$ oder $(-2{,}4) \cdot \frac{2}{3}$ oder gar $(-3{,}4) \cdot (-5{,}1)$ bedeuten?
Zunächst eine Bemerkung zur Schreibweise: Auch bei Produkten ist es sehr wichtig, zwischen Vorzeichen und Rechenzeichen genau zu unterscheiden. Ein Faktor mit Vorzeichen muß, wie die Beispiele zeigen, in Klammern gesetzt werden.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Produkte mit negativen Faktoren müssen wir also erst noch definieren. Natürlich versuchen wir wieder, es so einzurichten, daß für die Multiplikation in $\mathbb{Q}$ die Rechengesetze erhalten bleiben, die uns für die Multiplikation in $\mathbb{Q}_0^+$ geläufig sind (Permanenzprinzip, vgl. Seite 38). Zur Wiederholung stellen wir diese Rechengesetze hier zusammen:

Rechengesetze der Multiplikation in $\mathbb{Q}_0^+$

Für alle Zahlen a, b, c aus $\mathbb{Q}_0^+$ gilt:

(E)	$a \cdot b$ **ist wieder eine Zahl aus** $\mathbb{Q}_0^+$	**eindeutige Existenz des Produkts**
(K)	$a \cdot b = b \cdot a$	**Kommutativgesetz der Multiplikation**
(A)	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	**Assoziativgesetz der Multiplikation**
(N)	$a \cdot 1 = a$	**1 ist neutrales Element der Multiplikation**

Produkte traten erstmals beim Rechnen mit natürlichen Zahlen auf. Sie wurden dort als Kurzschreibweise für Summen mit gleichen Summanden eingeführt; z. B. gilt: $3 \cdot 4 = 4 + 4 + 4$. Deshalb liegt es nahe, ein Produkt wie $3 \cdot (-4)$ ebenfalls als abgekürzte Schreibweise für eine Summe aufzufassen, nämlich als $3 \cdot (-4) = (-4) + (-4) + (-4)$. Die rechts vom Gleichheitszeichen stehende Summe können wir berechnen! Wir erhalten so $3 \cdot (-4) = -12$, wofür man wegen $12 = 3 \cdot 4$ auch schreiben kann:

$$\mathbf{3 \cdot (-4) = -(3 \cdot 4)}$$

Das sieht nach einer sehr einfachen Regel aus! Man kann sie offenbar immer dann anwenden, wenn der erste Faktor eine natürliche Zahl und größer als 1 ist.

Beispiele:

1) $5 \cdot (-0{,}7) = (-0{,}7) + (-0{,}7) + (-0{,}7) + (-0{,}7) + (-0{,}7) = -3{,}5 = -(5 \cdot 0{,}7)$

2) $2 \cdot (-3\frac{2}{9}) = (-3\frac{2}{9}) + (-3\frac{2}{9}) = -6\frac{4}{9} = -(2 \cdot 3\frac{2}{9})$

Ein Produkt wie $3{,}4 \cdot (-5{,}1)$, bei dem der erste Faktor zwar wieder positiv, jedoch nicht ganzzahlig ist, kann nicht mehr als Summe gedeutet werden. Wohl aber ist es auch hier möglich, den Term $-(3{,}4 \cdot 5{,}1)$ zu berechnen. Der Vergleich mit den obigen Beispielen legt nahe, zu vereinbaren, daß $3{,}4 \cdot (-5{,}1) = -(3{,}4 \cdot 5{,}1)$ gelten soll. Dieses Verfahren läßt sich auf alle Produkte mit positivem ersten und negativem zweiten Faktor anwenden. Wir erhalten so

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Definition 65.1: Für das Produkt aus einer positiven Zahl p und einer negativen Zahl $-q$ soll gelten:

$$p \cdot (-q) = -(p \cdot q)$$

Beachte, daß in dieser Definition (und auch im folgenden) die Variablen p und q positive Zahlen vertreten!
Vertauscht man im Beispiel $3{,}4 \cdot (-5{,}1)$ die Reihenfolge der Faktoren, so erhält man ein Produkt, bei dem der erste Faktor negativ, der zweite positiv ist. Natürlich soll, da wir ja das Kommutativgesetz retten wollen, dieses Produkt denselben Wert wie $3{,}4 \cdot (-5{,}1)$ erhalten! Es soll also gelten: $(-5{,}1) \cdot 3{,}4 = 3{,}4 \cdot (-5{,}1) = -(3{,}4 \cdot 5{,}1)$ bzw., da man die positiven Faktoren in der letzten Klammer vertauschen darf:

$$(-5{,}1) \cdot 3{,}4 = -(5{,}1 \cdot 3{,}4)$$

Die Verallgemeinerung dieser Überlegung führt zu

Definition 65.2: Für das Produkt aus einer negativen Zahl $-p$ und einer positiven Zahl q soll gelten:

$$(-p) \cdot q = -(p \cdot q)$$

Die beiden in den Definitionen 65.1 und 65.2 enthaltenen Regeln lassen sich so zusammenfassen: Man erhält das Produkt aus einer positiven und einer negativen Zahl, indem man das Minuszeichen des negativen Faktors vor das Produkt der beiden Beträge setzt.
Wenn wir nun weiter überlegen, wie man ein Produkt aus zwei negativen Faktoren, z. B. $(-3{,}4) \cdot (-5{,}1)$, definieren soll, so liegt es nahe, die Regeln in den Definitionen 65.1 und 65.2 versuchsweise auch jetzt zu benützen, also das »Herausziehen des Minuszeichens« auch in diesem Fall anzuwenden (Permanenzprinzip!). Damit erhält man:

$$\begin{aligned}
(-3{,}4) \cdot (-5{,}1) &= -((-3{,}4) \cdot 5{,}1) = && \text{(Anwendung von Def. 65.1 auch bei negativem 1. Faktor!)} \\
&= -(-(3{,}4 \cdot 5{,}1)) = && \text{(nach Def. 65.2)} \\
&= 3{,}4 \cdot 5{,}1 && \text{(nach Satz 42.1)}
\end{aligned}$$

Die Verallgemeinerung dieses Vorgehens würde also folgende Regel ergeben: $(-p) \cdot (-q) = p \cdot q$ für $p > 0$ und $q > 0$.
Demnach müßte das Produkt zweier negativer Zahlen positiv sein! Das mag auf den ersten Blick überraschen. Sinnvoll erscheint aber jedenfalls, daß, wie in den vorausgehenden Fällen, der Betrag des Produktes wieder den Wert $p \cdot q$ haben soll. Dann kann das Produkt selbst aber nur $p \cdot q$ oder $-(p \cdot q)$ sein. Der Produktwert $-(p \cdot q)$ ergab sich aber bereits in den Fällen $p \cdot (-q)$ und $(-p) \cdot q$, von denen sich $(-p) \cdot (-q)$ doch sicherlich unterscheiden sollte. Das spricht wieder für das Ergebnis $p \cdot q$, also für

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Definition 66.1: Für das Produkt zweier negativer Zahlen $-p$ und $-q$ soll gelten:

$$(-p)\cdot(-q) = p\cdot q$$

Der jetzt noch verbleibende Fall, daß eine negative Zahl mit 0 multipliziert werden soll, bereitet uns wenig Mühe. Natürlich soll ein solches Produkt wieder den Wert 0 haben:

Definition 66.2: Für das Produkt einer negativen Zahl $-p$ mit der Zahl 0 soll gelten:

$$(-p)\cdot 0 = 0\cdot(-p) = 0$$

Nunmehr sind wir in der Lage, das Produkt zweier beliebiger rationaler Zahlen zu berechnen. Die dafür geltenden Regeln kann man so zusammenfassen:

Satz 66.1: Zwei rationale Zahlen mit gleichen Vorzeichen werden multipliziert, indem man ihre Beträge multipliziert.
Zwei rationale Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen werden multipliziert, indem man das Produkt ihrer Beträge bildet und ihm das negative Vorzeichen gibt.
Ein Produkt mit dem Faktor 0 hat den Wert 0.

Beispiele:

1) $4\cdot(-5) = -(4\cdot 5) = -20$
2) $(-3)\cdot 17 = -(3\cdot 17) = -51$
3) $(-1)\cdot(-1) = 1\cdot 1 = 1$
4) $(-8)\cdot(-7{,}5) = 8\cdot 7{,}5 = 60$
5) $2{,}5\cdot(-3{,}7) = -(2{,}5\cdot 3{,}7) = -9{,}25$
6) $(-\frac{3}{4})\cdot 1\frac{1}{9} = -(\frac{3}{4}\cdot 1\frac{1}{9}) = -(\frac{3}{4}\cdot\frac{10}{9}) = -\frac{5}{6}$
7) $(-100\,000)\cdot 0 = 0$

Wichtige Sonderfälle von Produkten sind solche aus zwei gleichen Faktoren, also die **Quadrate*** rationaler Zahlen: $a\cdot a = a^2$.

Beispiele:

1) $4^2 = 16$; **2)** $(-4)^2 = (-4)\cdot(-4) = 4\cdot 4 = 16$
3) $0^2 = 0$; **4)** $(-1{,}2)^2 = (-1{,}2)\cdot(-1{,}2) = 1{,}2\cdot 1{,}2 = 1{,}44$

* Das Produkt einer Zahl mit sich selbst nannten die Griechen – so belegt bei EUKLID, 8. Buch der *Elemente* – τετράγωνος [ἀριθμός] (tetrágonos [arithmós]) = *viereckig*[*e Zahl*], da sie den Inhalt des τετράγωνον [σχῆμα] (tetrágonon [s-chema]) = *viereckig*[*e Figur*] angab, falls diese Figur gleichseitig rechtwinklig ist. Über das lateinische *quadratus* = *viereckig* entstand das deutsche **Quadrat**.

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Auf Grund dieser Beispiele vermuten wir die Gültigkeit von

Satz 67.1: Das Quadrat einer von 0 verschiedenen rationalen Zahl ist positiv. Das Quadrat von 0 ist 0. Kurz:

$$a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0 \quad \text{und} \quad 0^2 = 0$$

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus Satz 66.1 (vgl. Aufgabe 69/**2**).

2.6.2 Eigenschaften der Multiplikation in $\mathbb{Q}$

Es war unser Ziel, die Multiplikation in $\mathbb{Q}$ so zu definieren, daß die auf Seite 64 zusammengestellten Rechengesetze gültig bleiben. Ob uns das gelungen ist, muß nun geprüft werden.

1) **Existenz des Produkts:** Mit Hilfe der Definitionen in **2.6.1** bzw. nach Satz 66.1 kann man zwei rationale Zahlen stets miteinander multiplizieren. Das Ergebnis ist wieder eine Zahl aus $\mathbb{Q}$. Damit bleibt (E) in $\mathbb{Q}$ gültig.

2) **Kommutativgesetz der Multiplikation:** Hier muß untersucht werden, ob die Gleichung $a \cdot b = b \cdot a$ für beliebige rationale Zahlen gilt. Bei den hierzu notwendigen **Fallunterscheidungen** verwenden wir wieder p und q als Zeichen für positive Zahlen.

1. Fall: $a > 0$ und $b > 0$

Dann gilt, wie schon bekannt, $a \cdot b = b \cdot a$ ((K) in $\mathbb{Q}_0^+$).

2. Fall: $a > 0$ und $b < 0$

Wir setzen $a = p$, $b = -q$; dann gilt

$$\begin{aligned} a \cdot b = p \cdot (-q) &= -(p \cdot q) = && \text{(Definition 65.1)} \\ &= -(q \cdot p) = && \text{((K) in } \mathbb{Q}_0^+) \\ &= (-q) \cdot p = && \text{(Definition 65.2)} \\ &= b \cdot a. \end{aligned}$$

3. Fall: $a < 0$ und $b > 0$

Wir setzen $a = -p$ und $b = q$; dann gilt

$$\begin{aligned} a \cdot b = (-p) \cdot q &= -(p \cdot q) = && \text{(Definition 65.2)} \\ &= -(q \cdot p) = && \text{((K) in } \mathbb{Q}_0^+) \\ &= q \cdot (-p) = && \text{(Definition 65.1)} \\ &= b \cdot a. \end{aligned}$$

4. Fall: $a < 0$ und $b < 0$

Wir setzen $a = -p$ und $b = -q$; dann gilt

$$\begin{aligned} a \cdot b = (-p) \cdot (-q) &= p \cdot q = && \text{(Definition 66.1)} \\ &= q \cdot p = && \text{((K) in } \mathbb{Q}_0^+) \\ &= (-q) \cdot (-p) = && \text{(Definition 66.1)} \\ &= b \cdot a. \end{aligned}$$

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN