Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

2.6.2 Eigenschaften der Multiplikation in Q

Auf Grund dieser Beispiele vermuten wir die Gültigkeit von

> **Satz 67.1:** Das Quadrat einer von 0 verschiedenen rationalen Zahl ist positiv. Das Quadrat von 0 ist 0. Kurz:
> $$\boldsymbol{a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0 \quad \text{und} \quad 0^2 = 0}$$

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus Satz 66.1 (vgl. Aufgabe 69/**2**).

2.6.2 Eigenschaften der Multiplikation in $\mathbb{Q}$

Es war unser Ziel, die Multiplikation in $\mathbb{Q}$ so zu definieren, daß die auf Seite 64 zusammengestellten Rechengesetze gültig bleiben. Ob uns das gelungen ist, muß nun geprüft werden.

1) **Existenz des Produkts:** Mit Hilfe der Definitionen in **2.6.1** bzw. nach Satz 66.1 kann man zwei rationale Zahlen stets miteinander multiplizieren. Das Ergebnis ist wieder eine Zahl aus $\mathbb{Q}$. Damit bleibt (E) in $\mathbb{Q}$ gültig.

2) **Kommutativgesetz der Multiplikation:** Hier muß untersucht werden, ob die Gleichung $a \cdot b = b \cdot a$ für beliebige rationale Zahlen gilt. Bei den hierzu notwendigen **Fallunterscheidungen** verwenden wir wieder p und q als Zeichen für positive Zahlen.

1. Fall: $a > 0$ und $b > 0$

Dann gilt, wie schon bekannt, $a \cdot b = b \cdot a$ ((K) in $\mathbb{Q}_0^+$).

2. Fall: $a > 0$ und $b < 0$

Wir setzen $a = p$, $b = -q$; dann gilt

$$\begin{aligned} a \cdot b = p \cdot (-q) &= -(p \cdot q) = && \text{(Definition 65.1)}\\ &= -(q \cdot p) = && \text{((K) in } \mathbb{Q}_0^+\text{)}\\ &= (-q) \cdot p = && \text{(Definition 65.2)}\\ &= b \cdot a. \end{aligned}$$

3. Fall: $a < 0$ und $b > 0$

Wir setzen $a = -p$ und $b = q$; dann gilt

$$\begin{aligned} a \cdot b = (-p) \cdot q &= -(p \cdot q) = && \text{(Definition 65.2)}\\ &= -(q \cdot p) = && \text{((K) in } \mathbb{Q}_0^+\text{)}\\ &= q \cdot (-p) = && \text{(Definition 65.1)}\\ &= b \cdot a. \end{aligned}$$

4. Fall: $a < 0$ und $b < 0$

Wir setzen $a = -p$ und $b = -q$; dann gilt

$$\begin{aligned} a \cdot b = (-p) \cdot (-q) &= p \cdot q = && \text{(Definition 66.1)}\\ &= q \cdot p = && \text{((K) in } \mathbb{Q}_0^+\text{)}\\ &= (-q) \cdot (-p) = && \text{(Definition 66.1)}\\ &= b \cdot a. \end{aligned}$$

5. Fall: $a = 0$ oder $b = 0$

Dann gilt $a \cdot b = 0 = b \cdot a$ (Satz 66.1)

Damit ist nachgewiesen, daß in jedem Fall $a \cdot b = b \cdot a$ gilt. Also bleibt (K) für die Multiplikation in $\mathbb{Q}$ gültig.

3) **Assoziativgesetz der Multiplikation:** Gilt $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ für beliebige rationale Zahlen a, b, c?

1) Wenn mindestens einer der drei Faktoren 0 ist, gilt nach Satz 66.1: $(a \cdot b) \cdot c = 0 = a \cdot (b \cdot c)$.
2) Wenn keiner der drei Faktoren 0 ist, bestehen folgende acht Möglichkeiten:

	1. Fall	2. Fall	3. Fall	4. Fall	5. Fall	6. Fall	7. Fall	8. Fall
a	pos.	pos.	pos.	pos.	neg.	neg.	neg.	neg.
b	pos.	pos.	neg.	neg.	pos.	pos.	neg.	neg.
c	pos.	neg.	pos.	neg.	pos.	neg.	pos.	neg.

Im 1. Fall gehören alle drei Faktoren zur Menge $\mathbb{Q}^+$, in welcher (A) gilt. Als Muster für die Überprüfung der übrigen Fälle soll hier nur der 6. Fall untersucht werden:

6. Fall: $a < 0$, $b > 0$ und $c < 0$

Wir setzen $a = -p$, $b = q$ und $c = -r$, mit p, q, r aus $\mathbb{Q}^+$.

Dann gilt:

$$(a \cdot b) \cdot c = ((-p) \cdot q) \cdot (-r) = (-(pq)) \cdot (-r) = \qquad \text{(Definition 65.2)}$$
$$= (pq)r. \qquad \text{(Definition 66.1)}$$
$$a \cdot (b \cdot c) = (-p) \cdot (q \cdot (-r)) = (-p) \cdot (-(qr)) = \qquad \text{(Definition 65.1)}$$
$$= p(qr). \qquad \text{(Definition 66.1)}$$

Wegen der Gültigkeit von (A) in $\mathbb{Q}^+$ ist aber $(pq)r = p(qr)$, also gilt $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Nach derselben Methode kann man auch die übrigen Fälle untersuchen (vgl. Aufgabe 70/**4**). Dabei zeigt sich, daß (A) für die Multiplikation in $\mathbb{Q}$ gültig bleibt.

4) **Neutrales Element der Multiplikation:** Für $a < 0$, also $a = -p$, gilt:

$$a \cdot 1 = (-p) \cdot 1 = -(p \cdot 1) = \qquad \text{(Definition 65.2)}$$
$$= -p = \qquad \text{((N) in } \mathbb{Q}^+\text{)}$$
$$= a.$$

Daraus folgt, daß 1 auch für die negativen und damit für alle rationalen Zahlen neutrales Element der Multiplikation ist.

Damit ist gezeigt:

Satz 69.1: Für die Multiplikation in der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen gelten wieder die auf Seite 64 zusammengestellten Rechengesetze (E), (K), (A), (N).

Ebenso wie bei dreigliedrigen Summen kann man nun auch bei Produkten mit drei Faktoren wegen (A) auf Klammern verzichten:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c.$$

Mit Hilfe von (K) erkennt man, daß auch die Reihenfolge der Faktoren beliebig verändert werden darf:

Beispiel 1:

Behauptung: $abc = cba$

Beweis: $abc \stackrel{\text{A}}{=} (ab)c \stackrel{\text{K}}{=} c(ab) \stackrel{\text{K}}{=} c(ba) \stackrel{\text{A}}{=} cba.$

Ganz entsprechend läßt sich auch bei Produkten mit mehr als drei Faktoren zeigen, daß man auf Klammern verzichten kann und daß auch die Reihenfolge der Faktoren beliebig geändert werden darf.

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} 12{,}5 \cdot (-23{,}91) \cdot 8 &\stackrel{\text{A}}{=} 12{,}5 \cdot ((-23{,}91) \cdot 8) = \\ &\stackrel{\text{K}}{=} ((-23{,}91) \cdot 8) \cdot 12{,}5 = \\ &\stackrel{\text{A}}{=} (-23{,}91) \cdot (8 \cdot 12{,}5) = \\ &= (-23{,}91) \cdot 100 = -2391. \end{aligned}$$

Beispiel 2 zeigt, wie man durch die Wahl einer günstigen Reihenfolge der Faktoren und der Rechenschritte die Berechnung eines Produktes oft vereinfachen kann. Achte also stets auf solche **Rechenvorteile**.

Aufgaben

1. **a)** $(-5) \cdot 24$ **b)** $16 \cdot (-30)$ **c)** $(-125) \cdot (-81)$
d) $(-2{,}5) \cdot 0{,}28$ **e)** $(-17{,}25) \cdot (-3{,}04)$ **f)** $0{,}064 \cdot (-6{,}25)$
g) $3\frac{4}{15} \cdot (-2\frac{1}{7})$ **h)** $(-\frac{7}{12}) \cdot (-\frac{3}{14})$ **i)** $(-8{,}45) \cdot 1\frac{1}{39}$

2. Beweise Satz 67.1. Unterscheide dabei die Fälle $a > 0$, $a = 0$ und $a < 0$.

3. **a)** $1{,}1^2$ **b)** $(-0{,}11)^2$ **c)** $(-32)^2$ **d)** $(-\frac{11}{12})^2$
e) $(0{,}375 - \frac{3}{8})^2$ **f)** $(\frac{3}{6} - \frac{4}{7})^2$ **g)** $(\frac{4}{7} - \frac{3}{6})^2$ **h)** $((-\frac{4}{7}) - \frac{3}{6})^2$

4. Überprüfe das Assoziativgesetz $(ab)c = a(bc)$ nach dem Muster des auf Seite 68 durchgeführten 6. Falles

a) für $a > 0,\ b > 0,\ c < 0$ (2. Fall),

b) für $a > 0,\ b < 0,\ c < 0$ (4. Fall),

c) für $a < 0,\ b < 0,\ c < 0$ (8. Fall).

5. Berechne die folgenden Produkte. Achte dabei auf Rechenvorteile.

a) $4 \cdot (-37) \cdot \frac{3}{4}$ **b)** $(-107) \cdot 8 \cdot (-25)$

c) $(-0{,}2) \cdot (-6{,}28) \cdot (-50)$ **d)** $(-300) \cdot 1\frac{2}{3} \cdot (-0{,}132)$

e) $(-\frac{17}{91}) \cdot 0 \cdot (-\frac{14}{31})$ **f)** $(-2\frac{2}{3})^2 \cdot (-\frac{21}{32}) \cdot \frac{3}{7}$

6. Begründe den **Satz**: Ein Produkt, in dem kein Faktor 0 ist, hat genau dann einen positiven Wert, wenn die Anzahl der negativen Faktoren gerade ist.

7. Setze zwischen die folgenden Zahlenterme eines der Zeichen $<, =, >$ so, daß eine wahre Aussage entsteht. In welchen Beispielen ist dies ohne Rechnung möglich?

a) $7 \cdot (-0{,}02)$ und 1 **b)** $(-12) \cdot (-13)$ und 150

c) -6 und $(-1) \cdot (-2) \cdot (-3)$ **d)** $(-\frac{3}{7}) \cdot (-\frac{14}{27}) \cdot (-9\frac{10}{11})$ und 0

e) $(-0{,}64)^2$ und $-0{,}64$ **f)** $(-\frac{13}{18}) \cdot 4{,}5$ und $5{,}4 \cdot (-0{,}6)$

8. a) $(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4)$ **b)** $1 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot (-4)$

c) $(-2{,}5) \cdot (-1{,}6) \cdot 3{,}25 \cdot (-0{,}5)$ **d)** $1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3} \cdot (-1\frac{1}{4}) \cdot 1\frac{1}{5}$

9. Achte bei der Berechnung der folgenden Summen und Differenzen auf die richtige Reihenfolge der Rechenschritte.

a) $(-1) + (-2) \cdot (-3)$ **b)** $(-1) \cdot (-2) - (-3) \cdot (-4)$

c) $250 \cdot (-0{,}25) - 25 \cdot (-0{,}250)$ **d)** $(-4{,}56) \cdot (-10{,}5) + 6{,}3 \cdot (-7{,}6)$

e) $(-8{,}1) \cdot \frac{25}{27} - (-0{,}98) \cdot (-\frac{5}{7})$ **f)** $(-\frac{1}{2}) \cdot \frac{3}{4} \cdot (-\frac{5}{6}) + 2 \cdot (-\frac{4}{3}) \cdot \frac{6}{5}$

10. a) $(263 - 298)(298 - 263)$ **b)** $(41{,}5 + (-67{,}75)) \cdot ((-2{,}1) - 1{,}9)$

c) $(1\frac{2}{7} - 2\frac{1}{7}) \cdot 3{,}5 \cdot ((-1\frac{2}{3}) - \frac{1}{6})$ **d)** $(1 - \frac{7}{2})(2 - \frac{7}{3})(3 - \frac{7}{4})$

11. Berechne folgende Absolutbeträge:

a) $|5(-2)|$ **b)** $|(-8) \cdot 9|$ **c)** $|(-17)(-3)|$ **d)** $|24 \cdot 25|$

e) $|0{,}75(-4)(-\frac{2}{3})|$ **f)** $|(-0{,}75) \cdot 4 \cdot \frac{2}{3}|$

g) $|(-0{,}75)(-4)(-\frac{2}{3})|$ **h)** $|9{,}81 \cdot (-\frac{7}{11}) \cdot 0 \cdot (-3\frac{1}{3})|$

12. Beweise den **Satz**: Der Betrag des Produktes zweier rationaler Zahlen a und b ist gleich dem Produkt der Beträge dieser Zahlen, d. h. $|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|$.

13. Berechne den Wert der folgenden Terme für die angegebenen Einsetzungen:

a) $T(x) = x^2 + 4x + 1$ für $x = -5 (-2{,}3;\ 0;\ 2)$

b) $T(a; b) = (a + 2b)(a - 2b)$ für $a = 3;\ b = -1{,}5$ und
für $a = -8{,}3;\ b = -3{,}8$

c) $T(x; y; z) = xyz - (x-y)(y-z)$ für $x = -12; y = 4; z = 18$ und für $x = 0{,}8; y = -1{,}25; z = -9{,}65$

d) $T(a; b; c) = |(a-b) - c| - (|a| - |b-c|)$ für $a = -22; b = -18; c = 33$ und für $a = -14{,}3; b = -5{,}8; c = -6{,}7$

2.6.3 Division in $\mathbb{Q}$

Es kommt häufig vor, daß von einem Produkt der Wert bekannt ist und einer der Faktoren bestimmt werden muß. Dessen Berechnung führt auf eine **Division**. Man bezeichnet wegen dieses Zusammenhangs die Division als **Umkehrung der Multiplikation**.

Beispiel:

Die Klasse 7a mietet für einen Ausflug einen Bus. Sie muß dafür 350 DM bezahlen. Welchen Fahrpreis hat jeder der 28 Schüler zu entrichten?
Wenn wir den Fahrpreis pro Schüler mit x DM bezeichnen, muß gelten:

$28 \cdot x = 350;$ also $x = 350 : 28 = 12{,}5.$

Jeder Schüler muß also 12,50 DM bezahlen.

Man erkennt an diesem mit Zahlen aus $\mathbb{Q}^+$ gebildeten Beispiel, daß der **Quotient** $350 : 28$ die **Lösung der Gleichung** $28 \cdot x = 350$ darstellt. Genau diese Bedeutung wollen wir nun auch für Quotienten aus beliebigen rationalen Zahlen vereinbaren:

Definition 71.1: Unter dem Quotienten $b : a$ der rationalen Zahlen b und $a \neq 0$ versteht man die Lösung der Gleichung $a \cdot x = b$.
Statt $b : a$ schreibt man auch $\frac{b}{a}$.

$b : a$ ist also diejenige Zahl, mit der man a multiplizieren muß, um b zu erhalten.
Nach dieser Definition hat ein Quotient $b : a$ nur dann einen Sinn, wenn die entsprechende Gleichung $a \cdot x = b$ für $a \neq 0$ genau eine Lösung hat. Wir wissen schon, daß dies für $a \in \mathbb{Q}^+$ und $b \in \mathbb{Q}_0^+$ zutrifft. Gilt das aber auch, wenn a oder b negativ ist? Das läßt sich mit Hilfe einer Fallunterscheidung überprüfen:

1. Fall: $a > 0$ und $b < 0$

Wir setzen $a = p$ und $b = -q$ $(p > 0, q > 0)$; dann gilt:

$a \cdot x = b \Leftrightarrow p \cdot x = -q.$