UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

2.6.3 Division in Q

urn:nbn:de:hbz:466:1-83493

Visual Library

c) $T(x; y; z) = xyz - (x-y)(y-z)$ für $x = -12$; $y = 4$; $z = 18$ und für $x = 0{,}8$; $y = -1{,}25$; $z = -9{,}65$

d) $T(a; b; c) = |(a-b) - c| - (|a| - |b-c|)$ für $a = -22$; $b = -18$; $c = 33$ und für $a = -14{,}3$; $b = -5{,}8$; $c = -6{,}7$

2.6.3 Division in $\mathbb{Q}$

Es kommt häufig vor, daß von einem Produkt der Wert bekannt ist und einer der Faktoren bestimmt werden muß. Dessen Berechnung führt auf eine **Division**. Man bezeichnet wegen dieses Zusammenhangs die Division als **Umkehrung der Multiplikation**.

Beispiel:

Die Klasse 7a mietet für einen Ausflug einen Bus. Sie muß dafür 350 DM bezahlen. Welchen Fahrpreis hat jeder der 28 Schüler zu entrichten?
Wenn wir den Fahrpreis pro Schüler mit x DM bezeichnen, muß gelten:

$$28 \cdot x = 350; \quad \text{also} \quad x = 350 : 28 = 12{,}5.$$

Jeder Schüler muß also 12,50 DM bezahlen.

Man erkennt an diesem mit Zahlen aus $\mathbb{Q}^+$ gebildeten Beispiel, daß der **Quotient** $350 : 28$ die **Lösung der Gleichung** $28 \cdot x = 350$ darstellt. Genau diese Bedeutung wollen wir nun auch für Quotienten aus beliebigen rationalen Zahlen vereinbaren:

Definition 71.1: Unter dem Quotienten $b : a$ der rationalen Zahlen b und $a \neq 0$ versteht man die Lösung der Gleichung $a \cdot x = b$.
Statt $b : a$ schreibt man auch $\frac{b}{a}$.

$b : a$ ist also diejenige Zahl, mit der man a multiplizieren muß, um b zu erhalten.
Nach dieser Definition hat ein Quotient $b : a$ nur dann einen Sinn, wenn die entsprechende Gleichung $a \cdot x = b$ für $a \neq 0$ genau eine Lösung hat. Wir wissen schon, daß dies für $a \in \mathbb{Q}^+$ und $b \in \mathbb{Q}_0^+$ zutrifft. Gilt das aber auch, wenn a oder b negativ ist? Das läßt sich mit Hilfe einer Fallunterscheidung überprüfen:

1. Fall: $a > 0$ und $b < 0$

Wir setzen $a = p$ und $b = -q$ $(p > 0, q > 0)$; dann gilt:

$a \cdot x = b \Leftrightarrow p \cdot x = -q.$

Falls diese Gleichung eine Lösung x besitzt, muß sie negativ sein. Für sie gilt also: $x = -|x|$. Damit erhält man:
$p \cdot x = -q \Leftrightarrow p \cdot (-|x|) = -q \Leftrightarrow -(p \cdot |x|) = -q \Leftrightarrow p \cdot |x| = q$.
Dies ist nun eine Gleichung mit positiven Zahlen. Sie hat die Lösung $|x| = \frac{q}{p}$. Damit gilt: $x = -\frac{q}{p}$.

Ergebnis: Die Gleichung $p \cdot x = -q$ hat die Lösung $x = -\frac{q}{p}$.

Auf ganz entsprechende Weise kann man auch den 2. und 3. Fall untersuchen. Man findet dabei folgende Ergebnisse:

2. Fall: $a < 0$ und $b > 0$

Die Gleichung $(-p) \cdot x = q$ hat die Lösung $x = -\frac{q}{p}$.

3. Fall: $a < 0$ und $b < 0$

Die Gleichung $(-p) \cdot x = -q$ hat die Lösung $x = \frac{q}{p}$.

4. Fall: $a < 0$ und $b = 0$

Nach Satz 66.1 ist $x = 0$ eine Lösung der Gleichung $a \cdot x = 0$. Dies muß auch die einzige Lösung sein; denn für $x > 0$ wäre $a \cdot x < 0$, für $x < 0$ wäre $a \cdot x > 0$.

Damit ist nachgewiesen:

Satz 72.1: Die Gleichung $a \cdot x = b$ hat für $a \neq 0$ in der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen stets genau eine Lösung.

Für den Fall $a = 0$, d.h. für die Gleichung $0 \cdot x = b$, gelten in $\mathbb{Q}$ dieselben Feststellungen wie in $\mathbb{Q}_0^+$:
Wenn $b \neq 0$, hat die Gleichung $0 \cdot x = b$ **keine Lösung**,
wenn $b = 0$, ist **jede Zahl eine Lösung**.
Daher sind Quotienten mit dem Nenner 0 auch in $\mathbb{Q}$ sinnlos. Damit gilt

Satz 72.2: In der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen kann man jede Zahl durch jede **von 0 verschiedene** Zahl dividieren.
Aber: **Durch 0 kann man nicht dividieren.**

Aus den in den ersten drei Fällen berechneten Lösungen der Gleichung $a \cdot x = b$ und der Quotientendefinition 71.1 können wir weitere wichtige Folgerungen ableiten:

Die Gleichung $p \cdot x = -q$ (1. Fall) hat die Lösung $x = -\frac{q}{p}$. Für diese Lö-

UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
PADERBORN

sung haben wir aber in Definition 71.1 die Schreibweise $\frac{-q}{p}$ vereinbart. Daher gilt: $\frac{-q}{p} = -\frac{q}{p}$.

Ganz entsprechend erhalten wir im 2. und 3. Fall:

$\frac{q}{-p} = -\frac{q}{p}$ und $\frac{-q}{-p} = \frac{q}{p}$. Damit haben wir **Vorzeichenregeln für Quotienten** gewonnen! Diese entsprechen ganz den Regeln für Produkte, die wir in den Definitionen 65.1, 65.2 und 66.1 aufgestellt haben.

Satz 73.1: Für Quotienten rationaler Zahlen gelten mit $p > 0$ und $q > 0$ folgende Vorzeichenregeln:

$$\frac{-q}{p} = -\frac{q}{p}, \qquad \frac{q}{-p} = -\frac{q}{p}, \qquad \frac{-q}{-p} = \frac{q}{p},$$

$$\text{bzw.} \quad (-q):p = -(q:p), \qquad q:(-p) = -(q:p),$$
$$(-q):(-p) = q:p$$

Beispiele:

1) $\frac{-24}{8} = -\frac{24}{8} = -3; \quad \frac{-121}{-22} = \frac{121}{22} = \frac{11}{2} = 5{,}5;$

2) $6{,}25 : (-1{,}25) = -(6{,}25 : 1{,}25) = -5;$

3) $(-\frac{7}{11}) : (-\frac{3}{11}) = \frac{7}{11} : \frac{3}{11} = \frac{7}{11} \cdot \frac{11}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}.$

Einen wichtigen Sonderfall stellt die Gleichung $a \cdot x = 1$ dar. Für $a \neq 0$ hat sie nach Satz 72.1 genau eine Lösung, nämlich $x = \frac{1}{a}$, also den **Kehrwert** von a. Es gilt somit $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, d.h., das Produkt der Zahlen a und $\frac{1}{a}$ ist gleich dem neutralen Element der Multiplikation. Daher bezeichnet man diese Zahlen als *zueinander invers bezüglich der Multiplikation*. Es gilt

Satz 73.2: Zu jeder von 0 verschiedenen rationalen Zahl a gibt es genau eine Inverse bezüglich der Multiplikation, nämlich ihren Kehrwert $\frac{1}{a}$.

Dieser Satz stellt ein weiteres Rechengesetz der Multiplikation dar, das man als »Existenz des Inversen« bezeichnet und mit (I) abkürzt. Damit kennen wir für die Multiplikation in $\mathbb{Q}$ die fünf Rechengesetze (E), (K), (A), (N), (I).

Für $a \neq 0$ hat also der Term $a \cdot \frac{1}{a}$ stets den Wert 1. Multipliziert man ihn mit einem Faktor b, so erhält man daher $\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) \cdot b = 1 \cdot b$, also $\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) \cdot b = b$.

Eine einfache Umformung der linken Seite liefert die Gleichung

$$a \cdot \left(b \cdot \frac{1}{a}\right) = b.$$

Diese läßt sich nun so deuten:

$$b \cdot \frac{1}{a} \quad \text{ist Lösung der Gleichung} \quad a \cdot x = b.$$

Da aber diese Gleichung nur eine einzige Lösung hat und wir für diese in Definition 71.1 die Schreibweise $\frac{b}{a}$ eingeführt haben, müssen $\frac{b}{a}$ und $b \cdot \frac{1}{a}$ lediglich verschiedene Schreibweisen für dieselbe Zahl sein. Daher gilt

Satz 74.1: Die Division durch eine Zahl $a \neq 0$ kann man durch die Multiplikation mit ihrem Kehrwert $\frac{1}{a}$ ersetzen und umgekehrt,

d.h., $\boldsymbol{\frac{b}{a} = b \cdot \frac{1}{a}}$ bzw. $\boldsymbol{b : a = b \cdot (1 : a)}$ für $a \neq 0$.

Beispiele:

1) $\frac{45}{0{,}3} = 45 \cdot \frac{10}{3} = 150$; **2)** $(-\frac{7}{12}) : \frac{3}{4} = (-\frac{7}{12}) \cdot \frac{4}{3} = -\frac{7}{9}$;

3) $126 \cdot \frac{1}{21} = 126 : 21 = 6$; **4)** $(-6{,}6) \cdot \frac{5}{11} = (-6{,}6) : 2{,}2 = -3$.

Aufgaben

1. Berechne die folgenden Quotienten:
   a) $105 : (-15)$ **b)** $(-7) : (-1)$ **c)** $(-65) : 125$
   d) $(-3{,}24) : (-1{,}8)$ **e)** $1024 : 32$ **f)** $(-10{,}24) : 0{,}064$
   g) $2{,}7 : (-81)$ **h)** $(-2{,}5) : (-0{,}35)$ **i)** $(-18) : 21{,}6$

2. Gib den Wert der folgenden Brüche in möglichst einfacher Form an:
   a) $\frac{5}{-1}$ **b)** $\frac{-16}{12}$ **c)** $\frac{-35}{-49}$ **d)** $\frac{84}{144}$
   e) $\frac{(-1)^2}{-1}$ **f)** $\frac{(-1)^3}{(-1)^5}$ **g)** $\frac{-1}{(-1)^{20}}$ **h)** $\frac{(-1)^{16}}{(-1)^{57}}$
   i) $\frac{8}{(-2)^2}$ **k)** $\frac{(-2)^3}{5}$ **l)** $\frac{(-3)^2}{(-3)^3}$ **m)** $\frac{2^4}{(-1)^7}$

3. Berechne:

a) $(3 - 5^2) : (20 - 9)$ **b)** $(\frac{3}{8} + 0{,}625) : (\frac{3}{8} - 0{,}625)$

c) $(2\frac{1}{3} - 5) : 4\frac{4}{9}$ **d)** $(-10\frac{5}{7}) : (\frac{12}{13} - 1\frac{1}{7})$

e) $(11 \cdot 25) : (31 - 75)$ **f)** $(8{,}5 : (-\frac{5}{7})) : ((-3{,}4) \cdot 2{,}5)$

4. Berechne den Wert folgender Bruchterme:

a) $\dfrac{16 \cdot 1{,}2 - 20}{16 - 1{,}2 \cdot 20}$ **b)** $\dfrac{3{,}6 \cdot 2{,}5 \cdot (-1{,}6)}{3{,}6 + (2{,}5 - 1{,}6)}$

c) $\dfrac{4{,}3 - 0{,}72 \cdot (-31)}{1\frac{5}{6} : (-\frac{5}{12})}$ **d)** $\dfrac{(10\frac{1}{2} + 6\frac{5}{6}) : (2\frac{13}{15} - 6\frac{1}{5})}{\frac{7}{9} \cdot (-\frac{3}{35}) \cdot 1\frac{2}{7}}$

5. Gib, wenn möglich, zu den folgenden Zahlen die Inversen bezüglich der Addition und bezüglich der Multiplikation an.

a) 1 **b)** -1 **c)** 0 **d)** $-0{,}125$

e) $\frac{2}{7}$ **f)** $-4{,}5$ **g)** $0{,}75$ **h)** $-2\frac{3}{11}$

6. Begründe den **Satz:** Es gibt keine rationale Zahl, für welche die Inverse bezüglich der Addition gleich der Inversen bezüglich der Multiplikation ist.

7. Schreibe nach Definition 71.1 die Lösung der Gleichung als Quotienten und berechne sie.

a) $(-1) \cdot x = 17$ **b)** $3x = -12$ **c)** $x \cdot (-38) = -7{,}6$

d) $\frac{5}{7} \cdot x = -\frac{1}{49}$ **e)** $(2 - \frac{2}{3})x = 2\frac{2}{3}$ **f)** $x \cdot (-2\frac{1}{4}) = 0{,}125 - 1{,}25$

8. Welche Lösungsmengen haben die folgenden Gleichungen?

a) $x \cdot (\frac{12}{15} - 0{,}8) = 1$ **b)** $(0{,}625 : 5 - \frac{1}{8}) \cdot x = 0$

c) $x \cdot (\frac{3}{4} - \frac{4}{3}) = \frac{4}{3} - \frac{3}{4}$ **d)** $(\frac{3}{20} - 0{,}15) \cdot x = (\frac{3}{20} - 0{,}15) \cdot 7$

2.6.4 Allgemeine Vorzeichenregeln für Produkte und Quotienten

Die Multiplikation einer Zahl $a \in \mathbb{Q}$ mit 1, dem neutralen Element der Multiplikation, bewirkt keine Änderung: $a \cdot 1 = a$. Was aber erhält man, wenn man a mit der Gegenzahl von 1, also mit -1, multipliziert?

Beispiele:

1) $7 \cdot (-1) = -(7 \cdot 1) = -7;$ **2)** $(-1) \cdot 0 = -(1 \cdot 0) = -0 = 0$

3) $(-1) \cdot 3{,}14 = -(1 \cdot 3{,}14) = -3{,}14;$ **4)** $(-\frac{5}{7}) \cdot (-1) = \frac{5}{7} \cdot 1 = \frac{5}{7}$

Wie man leicht beweisen kann (vgl. Aufgabe 78/**2**) gilt

Satz 75.1: Multipliziert man eine Zahl mit -1, so erhält man ihre Gegenzahl.

$$a \cdot (-1) = (-1) \cdot a = -a$$