Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

Aufgaben

Eine einfache Umformung der linken Seite liefert die Gleichung

$$a \cdot \left(b \cdot \frac{1}{a}\right) = b.$$

Diese läßt sich nun so deuten:

$$b \cdot \frac{1}{a} \quad \text{ist Lösung der Gleichung} \quad a \cdot x = b.$$

Da aber diese Gleichung nur eine einzige Lösung hat und wir für diese in Definition 71.1 die Schreibweise $\frac{b}{a}$ eingeführt haben, müssen $\frac{b}{a}$ und $b \cdot \frac{1}{a}$ lediglich verschiedene Schreibweisen für dieselbe Zahl sein. Daher gilt

Satz 74.1: Die Division durch eine Zahl $a \neq 0$ kann man durch die Multiplikation mit ihrem Kehrwert $\frac{1}{a}$ ersetzen und umgekehrt,

d.h., $\boldsymbol{\frac{b}{a} = b \cdot \frac{1}{a}}$ bzw. $\boldsymbol{b : a = b \cdot (1 : a)}$ für $a \neq 0$.

Beispiele:

1) $\frac{45}{0,3} = 45 \cdot \frac{10}{3} = 150$; **2)** $(-\frac{7}{12}) : \frac{3}{4} = (-\frac{7}{12}) \cdot \frac{4}{3} = -\frac{7}{9}$;

3) $126 \cdot \frac{1}{21} = 126 : 21 = 6$; **4)** $(-6{,}6) \cdot \frac{5}{11} = (-6{,}6) : 2{,}2 = -3$.

Aufgaben

1. Berechne die folgenden Quotienten:

a) $105 : (-15)$ **b)** $(-7) : (-1)$ **c)** $(-65) : 125$

d) $(-3{,}24) : (-1{,}8)$ **e)** $1024 : 32$ **f)** $(-10{,}24) : 0{,}064$

g) $2{,}7 : (-81)$ **h)** $(-2{,}5) : (-0{,}35)$ **i)** $(-18) : 21{,}6$

2. Gib den Wert der folgenden Brüche in möglichst einfacher Form an:

a) $\frac{5}{-1}$ **b)** $\frac{-16}{12}$ **c)** $\frac{-35}{-49}$ **d)** $\frac{84}{144}$

e) $\frac{(-1)^2}{-1}$ **f)** $\frac{(-1)^3}{(-1)^5}$ **g)** $\frac{-1}{(-1)^{20}}$ **h)** $\frac{(-1)^{16}}{(-1)^{57}}$

i) $\frac{8}{(-2)^2}$ **k)** $\frac{(-2)^3}{5}$ **l)** $\frac{(-3)^2}{(-3)^3}$ **m)** $\frac{2^4}{(-1)^7}$

3. Berechne:

a) $(3-5^2):(20-9)$ **b)** $(\frac{3}{8}+0{,}625):(\frac{3}{8}-0{,}625)$

c) $(2\frac{1}{3}-5):4\frac{4}{9}$ **d)** $(-10\frac{5}{7}):(\frac{12}{13}-1\frac{1}{7})$

e) $(11\cdot 25):(31-75)$ **f)** $(8{,}5:(-\frac{5}{7})):((-3{,}4)\cdot 2{,}5)$

4. Berechne den Wert folgender Bruchterme:

a) $\dfrac{16\cdot 1{,}2-20}{16-1{,}2\cdot 20}$ **b)** $\dfrac{3{,}6\cdot 2{,}5\cdot(-1{,}6)}{3{,}6+(2{,}5-1{,}6)}$

c) $\dfrac{4{,}3-0{,}72\cdot(-31)}{1\frac{5}{6}:(-\frac{5}{12})}$ **d)** $\dfrac{(10\frac{1}{2}+6\frac{5}{6}):(2\frac{13}{15}-6\frac{1}{5})}{\frac{7}{9}\cdot(-\frac{3}{35})\cdot 1\frac{2}{7}}$

5. Gib, wenn möglich, zu den folgenden Zahlen die Inversen bezüglich der Addition und bezüglich der Multiplikation an.

a) 1 **b)** -1 **c)** 0 **d)** $-0{,}125$

e) $\frac{2}{7}$ **f)** $-4{,}5$ **g)** $0{,}75$ **h)** $-2\frac{3}{11}$

6. Begründe den **Satz:** Es gibt keine rationale Zahl, für welche die Inverse bezüglich der Addition gleich der Inversen bezüglich der Multiplikation ist.

7. Schreibe nach Definition 71.1 die Lösung der Gleichung als Quotienten und berechne sie.

a) $(-1)\cdot x=17$ **b)** $3x=-12$ **c)** $x\cdot(-38)=-7{,}6$

d) $\frac{5}{7}\cdot x=-\frac{1}{49}$ **e)** $(2-\frac{2}{3})x=2\frac{2}{3}$ **f)** $x\cdot(-2\frac{1}{4})=0{,}125-1{,}25$

8. Welche Lösungsmengen haben die folgenden Gleichungen?

a) $x\cdot(\frac{12}{15}-0{,}8)=1$ **b)** $(0{,}625:5-\frac{1}{8})\cdot x=0$

c) $x\cdot(\frac{3}{4}-\frac{4}{3})=\frac{4}{3}-\frac{3}{4}$ **d)** $(\frac{3}{20}-0{,}15)\cdot x=(\frac{3}{20}-0{,}15)\cdot 7$

2.6.4 Allgemeine Vorzeichenregeln für Produkte und Quotienten

Die Multiplikation einer Zahl $a\in\mathbb{Q}$ mit 1, dem neutralen Element der Multiplikation, bewirkt keine Änderung: $a\cdot 1=a$. Was aber erhält man, wenn man a mit der Gegenzahl von 1, also mit -1, multipliziert?

Beispiele:

1) $7\cdot(-1)=-(7\cdot 1)=-7$; **2)** $(-1)\cdot 0=-(1\cdot 0)=-0=0$

3) $(-1)\cdot 3{,}14=-(1\cdot 3{,}14)=-3{,}14$; **4)** $(-\frac{5}{7})\cdot(-1)=\frac{5}{7}\cdot 1=\frac{5}{7}$

Wie man leicht beweisen kann (vgl. Aufgabe 78/2) gilt

Satz 75.1: Multipliziert man eine Zahl mit -1, so erhält man ihre Gegenzahl.

$$a\cdot(-1)=(-1)\cdot a=-a$$