Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

2.6.4 Allgemeine Vorzeichenregeln für Produkte und Quotienten

urn:nbn:de:hbz:466:1-83493

3. Berechne:

a) $(3-5^2):(20-9)$ **b)** $(\frac{3}{8}+0{,}625):(\frac{3}{8}-0{,}625)$

c) $(2\frac{1}{3}-5):4\frac{4}{9}$ **d)** $(-10\frac{5}{7}):(\frac{12}{13}-1\frac{1}{7})$

e) $(11\cdot 25):(31-75)$ **f)** $(8{,}5:(-\frac{5}{7})):((-3{,}4)\cdot 2{,}5)$

4. Berechne den Wert folgender Bruchterme:

a) $\dfrac{16\cdot 1{,}2-20}{16-1{,}2\cdot 20}$ **b)** $\dfrac{3{,}6\cdot 2{,}5\cdot(-1{,}6)}{3{,}6+(2{,}5-1{,}6)}$

c) $\dfrac{4{,}3-0{,}72\cdot(-31)}{1\frac{5}{6}:(-\frac{5}{12})}$ **d)** $\dfrac{(10\frac{1}{2}+6\frac{5}{6}):(2\frac{13}{15}-6\frac{1}{5})}{\frac{7}{9}\cdot(-\frac{3}{35})\cdot 1\frac{2}{7}}$

5. Gib, wenn möglich, zu den folgenden Zahlen die Inversen bezüglich der Addition und bezüglich der Multiplikation an.

a) 1 **b)** -1 **c)** 0 **d)** $-0{,}125$

e) $\frac{2}{7}$ **f)** $-4{,}5$ **g)** $0{,}75$ **h)** $-2\frac{3}{11}$

6. Begründe den **Satz:** Es gibt keine rationale Zahl, für welche die Inverse bezüglich der Addition gleich der Inversen bezüglich der Multiplikation ist.

7. Schreibe nach Definition 71.1 die Lösung der Gleichung als Quotienten und berechne sie.

a) $(-1)\cdot x=17$ **b)** $3x=-12$ **c)** $x\cdot(-38)=-7{,}6$

d) $\frac{5}{7}\cdot x=-\frac{1}{49}$ **e)** $(2-\frac{2}{3})x=2\frac{2}{3}$ **f)** $x\cdot(-2\frac{1}{4})=0{,}125-1{,}25$

8. Welche Lösungsmengen haben die folgenden Gleichungen?

a) $x\cdot(\frac{12}{15}-0{,}8)=1$ **b)** $(0{,}625:5-\frac{1}{8})\cdot x=0$

c) $x\cdot(\frac{3}{4}-\frac{4}{3})=\frac{4}{3}-\frac{3}{4}$ **d)** $(\frac{3}{20}-0{,}15)\cdot x=(\frac{3}{20}-0{,}15)\cdot 7$

2.6.4 Allgemeine Vorzeichenregeln für Produkte und Quotienten

Die Multiplikation einer Zahl $a\in\mathbb{Q}$ mit 1, dem neutralen Element der Multiplikation, bewirkt keine Änderung: $a\cdot 1=a$. Was aber erhält man, wenn man a mit der Gegenzahl von 1, also mit -1, multipliziert?

Beispiele:

1) $7\cdot(-1)=-(7\cdot 1)=-7$; **2)** $(-1)\cdot 0=-(1\cdot 0)=-0=0$

3) $(-1)\cdot 3{,}14=-(1\cdot 3{,}14)=-3{,}14$; **4)** $(-\frac{5}{7})\cdot(-1)=\frac{5}{7}\cdot 1=\frac{5}{7}$

Wie man leicht beweisen kann (vgl. Aufgabe 78/2) gilt

> **Satz 75.1:** Multipliziert man eine Zahl mit -1, so erhält man ihre Gegenzahl.
>
> $$\boldsymbol{a\cdot(-1)=(-1)\cdot a=-a}$$

Das Interessante an diesem Satz ist, daß man das Bilden der Gegenzahl nun auch als Multiplikation mit -1 beschreiben kann. Das ist oft nützlich, z. B. bei den folgenden Überlegungen:
In der Algebra treten häufig Produkte der Form $a \cdot (-b)$, $(-a) \cdot (-b)$ usw. auf, bei denen die Variablen a, b *beliebige rationale Zahlen* vertreten. Zum Vereinfachen solcher Produkte darf man daher nicht ohne weiteres die in den Definitionen 65.1, 65.2 und 66.1 aufgestellten Regeln anwenden, denn die dort benützten Variablen p, q bedeuten *positive Zahlen*. Immerhin wäre es denkbar und wünschenswert (Permanenzprinzip!), daß diese Regeln auch für beliebige rationale Zahlen gültig bleiben. Das soll nun untersucht werden:

Beispiel 1:

$a \cdot (-b)$ kann man folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} a \cdot (-b) &= a \cdot ((-1) \cdot b) = && \text{(Satz 75.1)} \\ &\overset{K}{=} a \cdot (b \cdot (-1)) = \\ &\overset{A}{=} (a \cdot b)(-1) = \\ &= -(a \cdot b). && \text{(Satz 75.1)} \end{aligned}$$

Natürlich ist wegen (K) damit auch die Regel $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$ bewiesen.

Beispiel 2:

$(-a) \cdot (-b)$ kann man so umformen:

$$\begin{aligned} (-a) \cdot (-b) &= (-a) \cdot ((-1) \cdot b) = && \text{(Satz 75.1)} \\ &\overset{A}{=} ((-a) \cdot (-1)) \cdot b = \\ &= (-(-a)) \cdot b = && \text{(Satz 75.1)} \\ &= a \cdot b. && \text{(Satz 42.1)} \end{aligned}$$

Nimmt man der Vollständigkeit halber noch die Vereinbarung $a \cdot b = ab$ hinzu und schreibt, um die Vorzeichen zu betonen, für a, b und ab noch $+a$, $+b$, $+ab$, so erhält man folgende allgemeingültigen Vorzeichenregeln für Produkte:

Satz 76.1: Für beliebige rationale Zahlen a, b gilt:

$$(+a) \cdot (+b) = +ab \qquad (-a) \cdot (-b) = +ab$$
$$(+a) \cdot (-b) = -ab \qquad (-a) \cdot (+b) = -ab$$

Diese Vorzeichenregeln prägt man sich am besten in folgender Form ein:

Regel 76.1: $(+) \cdot (+) = +$ $\qquad (-) \cdot (-) = +$
$(+) \cdot (-) = -$ $\qquad (-) \cdot (+) = -$

Man kann nun also auch Produkte mit Variablen, die *beliebige* Zahlen vertreten, in gewohnter Weise vereinfachen. Dazu einige

Beispiele:

1) $5(-a) = -5a$; **2)** $(-2)(-3b) = 6b$;
3) $(-x)y(-z) = xyz$; **4)** $(-2)(-0{,}5)(-\frac{1}{3}z) = -\frac{1}{3}z$.

Auch von den in Satz 73.1 enthaltenen Vorzeichenregeln für Quotienten, die dort nur für positive Zahlen p, q bewiesen wurden, kann man zeigen, daß sie für beliebige rationale Zahlen gelten:

Beispiel:

$$\frac{-b}{a} = (-b)\cdot\frac{1}{a} = \qquad \text{(Satz 74.1)}$$
$$= ((-1)b)\cdot\frac{1}{a} = \qquad \text{(Satz 75.1)}$$
$$\overset{\text{A}}{=} (-1)\left(b\cdot\frac{1}{a}\right) =$$
$$= (-1)\cdot\frac{b}{a} = \qquad \text{(Satz 74.1)}$$
$$= -\frac{b}{a}. \qquad \text{(Satz 75.1)}$$

Auf dieselbe Weise kann man zeigen, daß auch $\frac{b}{-a} = -\frac{b}{a}$ und $\frac{-b}{-a} = \frac{b}{a}$ für beliebige Zahlen gilt. Zusammen mit $\frac{+b}{+a} = +\frac{b}{a}$ erhält man so

Satz 77.1: Für rationale Zahlen $a \neq 0$ und b gilt:

$$\frac{+b}{+a} = +\frac{b}{a}, \quad \frac{-b}{-a} = +\frac{b}{a}, \quad \frac{+b}{-a} = -\frac{b}{a}, \quad \frac{-b}{+a} = -\frac{b}{a}$$

Die entsprechende Merkregel lautet:

Regel 77.1: $\frac{+}{+} = + \qquad \frac{-}{-} = + \qquad \frac{+}{-} = - \qquad \frac{-}{+} = -$

Beachte, daß man in diesen Regeln den Bruchstrich auch durch den Doppelpunkt als Divisionszeichen ersetzen kann.

Beispiele:

1) $\frac{-a}{2} = -\frac{a}{2}$; **2)** $\frac{(-x)y}{(-2z)} = \frac{-(xy)}{-(2z)} = \frac{xy}{2z}$;
3) $15:(-u) = -(15:u)$; **4)** $(-2vw):(-xy) = (2vw):(xy)$.

Aufgaben

1. Vereinfache durch Anwendung der Vorzeichenregeln für Produkte:
   a) $(-2)\cdot x$ **b)** $(-5)(-y)$ **c)** $(-z)(+2{,}3)$
   d) $a(-b)(+c)$ **e)** $(-a)(-b)c$ **f)** $(+a)(+b)(-c)$

2. Beweise die Gleichung $a\cdot(-1) = -a$ (Satz 75.1) mit Hilfe der Fallunterscheidung $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$. Gib jeweils an, welche Definitionen oder Sätze benützt werden.

3. **a)** Stelle entsprechend der Regel 76.1 die Vorzeichenregeln für Produkte mit drei Faktoren symbolisch dar.
   b) Ergänze zu richtigen Vorzeichenregeln:
   $(-)\cdot(+)\cdot(-)\cdot(+) = ?$ und $(+)\cdot(-)\cdot(-)\cdot(+)\cdot(-) = ?$

4. Vereinfache durch Anwenden der Vorzeichenregeln für Quotienten:
   a) $\dfrac{2(-m)}{-3}$ **b)** $\dfrac{(-1)(+m)}{(+1)(-n)}$ **c)** $\dfrac{(-21)(-s)t}{q(+r)(-5)}$

5. Verwandle in den folgenden Produkten den Zahlenfaktor in einen Divisor.
   a) $m\cdot\frac{1}{7}$ **b)** $n\cdot 0{,}2$ **c)** $p\cdot(-0{,}25)$
   d) $(-\frac{2}{9})\cdot q$ **e)** $r\cdot(1\frac{2}{3})$ **f)** $(-\frac{10}{13})\cdot s$

6. Schreibe die folgenden Quotienten als Produkte:
   a) $x:0{,}5$ **b)** $y:\frac{1}{6}$ **c)** $z:(-\frac{2}{3})$
   d) $(-u):(-0{,}125)$ **e)** $v:(3\frac{1}{3})$ **f)** $w:(-0{,}001)$

2.7 Die Rechengesetze für die rationalen Zahlen

2.7.1 Das Distributivgesetz

Im bisherigen Rechenunterricht hast du schon das **Verteilungs-** oder **Distributivgesetz*** kennengelernt. Es besagt, daß man beim Multiplizieren einer Summe auf zwei verschiedenen Wegen zum richtigen Ergebnis kommen kann. Dazu ein

Beispiel:

Die Klasse 7b besteht aus 16 Knaben und 10 Mädchen. Für den Besuch einer Ausstellung sammelt der Klassensprecher pro Schüler 2,50 DM ein. Wieviel Geld muß er dann haben?

1. Weg: Man rechnet »2,50 DM · Gesamtzahl der Schüler«, also

$$2{,}50\text{ DM}\cdot(16+10) = 2{,}50\text{ DM}\cdot 26 = 65{,}00\text{ DM}.$$

* distribuere (lat.) = verteilen. – Der Ausdruck *distributiv* wurde ebenso wie das Wort *kommutativ* 1814 von dem französischen Professor der Mathematik François Joseph Servois (1767–1847) geprägt. Siehe auch die Fußnote* auf Seite 50.