Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

2.7 Die Rechengesetze für die rationalen Zahlen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83493

Aufgaben

1. Vereinfache durch Anwendung der Vorzeichenregeln für Produkte:
a) $(-2)\cdot x$ **b)** $(-5)(-y)$ **c)** $(-z)(+2{,}3)$
d) $a(-b)(+c)$ **e)** $(-a)(-b)c$ **f)** $(+a)(+b)(-c)$

2. Beweise die Gleichung $a\cdot(-1) = -a$ (Satz 75.1) mit Hilfe der Fallunterscheidung $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$. Gib jeweils an, welche Definitionen oder Sätze benützt werden.

3. **a)** Stelle entsprechend der Regel 76.1 die Vorzeichenregeln für Produkte mit drei Faktoren symbolisch dar.
b) Ergänze zu richtigen Vorzeichenregeln:
$(-)\cdot(+)\cdot(-)\cdot(+) = ?$ und $(+)\cdot(-)\cdot(-)\cdot(+)\cdot(-) = ?$

4. Vereinfache durch Anwenden der Vorzeichenregeln für Quotienten:
a) $\dfrac{2(-m)}{-3}$ **b)** $\dfrac{(-1)(+m)}{(+1)(-n)}$ **c)** $\dfrac{(-21)(-s)t}{q(+r)(-5)}$

5. Verwandle in den folgenden Produkten den Zahlenfaktor in einen Divisor.
a) $m\cdot\frac{1}{7}$ **b)** $n\cdot 0{,}2$ **c)** $p\cdot(-0{,}25)$
d) $(-\frac{2}{9})\cdot q$ **e)** $r\cdot(1\frac{2}{3})$ **f)** $(-\frac{10}{13})\cdot s$

6. Schreibe die folgenden Quotienten als Produkte:
a) $x:0{,}5$ **b)** $y:\frac{1}{6}$ **c)** $z:(-\frac{2}{3})$
d) $(-u):(-0{,}125)$ **e)** $v:(3\frac{1}{3})$ **f)** $w:(-0{,}001)$

2.7 Die Rechengesetze für die rationalen Zahlen

2.7.1 Das Distributivgesetz

Im bisherigen Rechenunterricht hast du schon das **Verteilungs-** oder **Distributivgesetz*** kennengelernt. Es besagt, daß man beim Multiplizieren einer Summe auf zwei verschiedenen Wegen zum richtigen Ergebnis kommen kann. Dazu ein

Beispiel:

Die Klasse 7b besteht aus 16 Knaben und 10 Mädchen. Für den Besuch einer Ausstellung sammelt der Klassensprecher pro Schüler 2,50 DM ein. Wieviel Geld muß er dann haben?

1. Weg: Man rechnet »2,50 DM · Gesamtzahl der Schüler«, also
$$2{,}50\text{ DM}\cdot(16+10) = 2{,}50\text{ DM}\cdot 26 = 65{,}00\text{ DM}.$$

* distribuere (lat.) = verteilen. – Der Ausdruck *distributiv* wurde ebenso wie das Wort *kommutativ* 1814 von dem französischen Professor der Mathematik François Joseph Servois (1767–1847) geprägt. Siehe auch die Fußnote* auf Seite 50.

2. Weg: Man rechnet »2,50 DM · Zahl der Knaben« + »2,50 DM · Zahl der Mädchen«, also
2,50 DM · 16 + 2,50 DM · 10 = 40,00 DM + 25,00 DM = 65,00 DM.

Man erkennt: 2,50 DM · (16 + 10) = 2,50 DM · 16 + 2,50 DM · 10.

Allgemein gilt für $a, b, c \in \mathbb{Q}_0^+$ die Beziehung $a(b+c) = ab + ac$. Dies ist das Distributivgesetz, für das wir die Abkürzung (D) verwenden.
Nachdem wir nun wissen, wie in der größeren Zahlenmenge $\mathbb{Q}$ die Addition und die Multiplikation auszuführen sind, stellt sich die Frage, ob das Rechengesetz (D) auch in $\mathbb{Q}$ gültig bleibt. Wir prüfen dies zunächst an einigen Beispielen.

Beispiel 1: $a = -2$, $b = 5$, $c = -8$
dann gilt: $a(b+c) = (-2) \cdot (5 + (-8)) = (-2) \cdot (-3) = 6$
und: $ab + ac = (-2) \cdot 5 + (-2) \cdot (-8) = -10 + 16 = 6.$

Beispiel 2: $a = 4{,}1$; $b = -4{,}8$; $c = 3{,}5$
dann gilt: $a(b+c) = 4{,}1 \cdot ((-4{,}8) + 3{,}5) = 4{,}1 \cdot (-1{,}3) = -5{,}33$
und: $ab + ac = 4{,}1 \cdot (-4{,}8) + 4{,}1 \cdot 3{,}5 = -19{,}68 + 14{,}35 = -5{,}33.$

Beispiel 3: $a = -\frac{2}{7}$, $b = -\frac{3}{4}$, $c = -\frac{2}{11}$
dann gilt: $a(b+c) = (-\frac{2}{7}) \cdot ((-\frac{3}{4}) + (-\frac{2}{11})) = (-\frac{2}{7}) \cdot (-(\frac{3}{4} + \frac{2}{11})) =$
$= \frac{2}{7}(\frac{3}{4} + \frac{2}{11}) = \frac{2}{7} \cdot \frac{41}{44} = \frac{41}{154}$
und: $ab + ac = (-\frac{2}{7}) \cdot (-\frac{3}{4}) + (-\frac{2}{7}) \cdot (-\frac{2}{11}) = \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{11} =$
$= \frac{3}{14} + \frac{4}{77} = \frac{33+8}{154} = \frac{41}{154}.$

Diese Beispiele lassen also vermuten, daß (D) für alle rationalen Zahlen gilt. Der genaue Nachweis dafür erfordert eine ziemlich umfangreiche Fallunterscheidung und ist schwierig. Für Interessenten soll hier als Beispiel einer der einfacheren Fälle untersucht werden:

Fall: $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$

Wir setzen $a = p$, $b = -q$, $c = -r$ mit $p, q, r \in \mathbb{Q}^+$.
Dann gilt: $a(b+c) = p((-q) + (-r)) = p(-(q+r)) =$
$= -(p(q+r)) = -(pq + pr).$

Hier wurde beim letzten Schritt (D) in $\mathbb{Q}^+$ angewandt.

Weiter gilt: $ab + ac = p(-q) + p(-r) = (-pq) + (-pr) =$
$= -(pq + pr).$

Damit ist für diesen Fall (D) bewiesen. Man kann so tatsächlich zeigen, daß das Distributivgesetz in jedem Fall gilt. Dies halten wir fest in

Satz 79.1: Für beliebige rationale Zahlen a, b, c gilt das **Distributivgesetz:**

$$\textbf{(D):}\quad \boldsymbol{a(b+c) = ab + ac}$$

Beispiele:

1) $(-2)(a+5) = (-2)a + (-2)\cdot 5 = -2a - 10.$

2) $(x+2y)\cdot 19 = 19(x+2y) = 19x + 38y.$

3) $6{,}5(a-4b) = 6{,}5(a+(-4b)) = 6{,}5a + 6{,}5(-4b) = 6{,}5a - 26b.$

4) $((-3z)-7)\cdot(-10) = ((-3z)+(-7))\cdot(-10) =$
$= (-3z)\cdot(-10) + (-7)\cdot(-10) = 30z + 70.$

Aufgaben

1. Berechne zur Überprüfung des Distributivgesetzes die Terme $T_1 = a(b+c)$ und $T_2 = ab + ac$ für folgende Zahlenwerte:

a) $a = -8;\ b = -2;\ c = 5$ **b)** $a = 1{,}1;\ b = -0{,}7;\ c = -160$

c) $a = -36;\ b = \frac{7}{16};\ c = -1\frac{3}{8}$ **d)** $a = -2{,}5;\ b = -9{,}12;\ c = -\frac{22}{25}$

• **2.** Begründe bei dem auf Seite 79 stehenden Beweis des Distributivgesetzes für den Fall $a > 0,\ b < 0,\ c < 0$ die einzelnen Termumformungen, z. B. durch Angabe der dabei verwendeten Sätze oder Regeln.

• **3.** Beweise nach dem Muster des auf Seite 79 durchgeführten Falles das Distributivgesetz auch für den Fall $a < 0,\ b < 0$ und $c < 0$.

4. Verwandle die angegebenen Produkte in Summen oder Differenzen:

a) $(16x + 3y)\cdot 9$ **b)** $(2{,}8xy - 5)\cdot(-12{,}5)$ **c)** $(-0{,}5)\cdot(1{,}6v - \frac{3}{5}w)$

d) $12(-4a + 3b)$ **e)** $(-n)\cdot(2n+7)$ **f)** $(-\frac{2}{3}x - \frac{5}{8}y)\cdot\frac{6}{7}$

5. Berechne und vergleiche $T_1 = (a+b):c$ und $T_2 = a:c + b:c$ für folgende Zahlenwerte:

a) $a = 22;\ b = 10;\ c = 8$ **b)** $a = -5{,}4;\ b = 7{,}8;\ c = -6$

c) $a = -2\frac{1}{7};\ b = -\frac{10}{21};\ c = \frac{5}{11}$ **d)** $a = -\frac{1}{3};\ b = -1{,}6;\ c = -0{,}4$

6. Begründe, daß auch für das Dividieren einer Summe ein Distributivgesetz gilt, nämlich $(a+b):c = a:c + b:c$, für $c \neq 0$.
Hinweis: Beachte Satz 74.1.

7. Verwandle die folgenden Quotienten in Summen oder Differenzen:

a) $(8x + 6y):4$ **b)** $(0{,}64z^2 - 1):0{,}4$

c) $(\frac{2}{3}u - 5v):(-\frac{5}{6})$ **d)** $(-5{,}1p - 8{,}5q):(-17)$

2.7.2 Die Monotoniegesetze der Multiplikation

Wir wissen schon nach Satz 62.1, daß eine Ungleichung erhalten bleibt, wenn man auf beiden Seiten dieselbe Zahl addiert: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$. Gilt eine entsprechende Feststellung auch, wenn man beide Seiten einer Ungleichung mit derselben Zahl multipliziert?

Beispiele:

1) Multiplikation mit 7:
Aus $2 < 5$ wird $14 < 35$, weil 14 links von 35 liegt.
Aus $-5 < 1{,}5$ wird $-35 < 10{,}5$.
Aus $-3{,}1 < -1{,}2$ wird $-21{,}7 < -8{,}4$.

2) Multiplikation mit -3:
Aus $2 < 5$ wird $-6 > -15$, weil -6 rechts von -15 liegt.
Aus $-5 < 1{,}5$ wird $15 > -4{,}5$.
Aus $-3{,}1 < -1{,}2$ wird $9{,}3 > 3{,}6$.

Die Beispiele unter **1)** lassen vermuten, daß gilt:

Satz 81.1: Monotoniegesetz der Multiplikation
Multipliziert man eine Ungleichung mit einer **positiven** Zahl, so bleibt das Ungleichheitszeichen erhalten; also

$$\left.\begin{matrix} a < b \\ c > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac < bc.$$

Bemerkung: Da statt $a < b$ auch $b > a$ und statt $ac < bc$ auch $bc > ac$ geschrieben werden kann, gilt Satz 81.1 natürlich dann auch für Ungleichungen mit dem Größerzeichen.

Beweis: $a < b$ bedeutet nach Satz 61.2, daß es eine Zahl $p > 0$ gibt, für welche $a + p = b$ gilt.
Dann ist auch $(a + p)c = bc$ bzw. $ac + pc = bc$.
Wegen $c > 0$ und $p > 0$ gilt auch $pc > 0$. Man muß also zu ac die positive Zahl pc addieren, um bc zu erhalten. Nach Satz 61.2 bedeutet dies aber $ac < bc$, was zu zeigen war.

Die Beispiele **2)** lassen erkennen, daß für negative Faktoren das Monotoniegesetz nicht gilt. Offenbar kehrt sich in diesem Fall das Ungleichheitszeichen um, d.h., aus dem Kleinerzeichen wird ein Größerzeichen bzw. aus dem Größer- ein Kleinerzeichen. Es gilt der folgende

Satz 81.2: Gesetz von der Umkehrung der Monotonie
Multipliziert man eine Ungleichung mit einer **negativen** Zahl, so kehrt sich das Ungleichheitszeichen um, d.h.,

$$\left.\begin{matrix} a < b \\ c < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac > bc.$$

Beweis: $a < b$ bedeutet nach Satz 61.2, daß es eine Zahl $p > 0$ gibt, für welche $a + p = b$ gilt.

Die Auflösung dieser Gleichung nach a liefert
$a = b - p$ oder $a = b + (-p)$.
Dann gilt auch $ac = (b + (-p))c =$
$\stackrel{\mathrm{D}}{=} bc + (-p)c$.

Nach Voraussetzung sind $(-p)$ und c negative Zahlen; somit ist $(-p)c$ positiv. Da man also zu bc eine positive Zahl addieren muß, um ac zu erhalten, gilt $ac > bc$, was zu zeigen war.

Einen wichtigen Sonderfall von Satz 81.2 stellt das Multiplizieren einer Ungleichung mit -1 dar. Es gilt (Abbildung 82.1):

$a < b \Rightarrow a \cdot (-1) > b \cdot (-1)$, also
$a < b \Rightarrow -a > -b$.

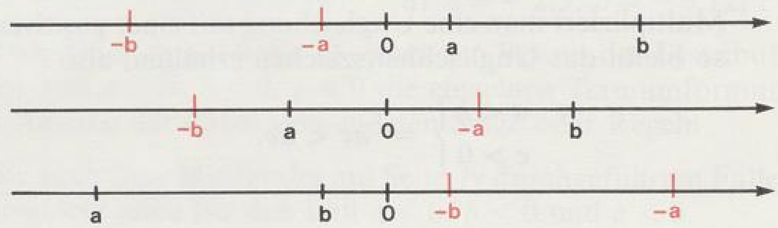

Abb. 82.1 $a < b \Leftrightarrow -a > -b$

Natürlich gelten die beiden Monotoniegesetze auch für das Dividieren einer Ungleichung durch eine positive oder negative Zahl. Das ergibt sich daraus, daß man die Division durch $c \neq 0$ als Multiplikation mit $\frac{1}{c}$ auffassen kann. Da c und $\frac{1}{c}$ gleiches Vorzeichen haben, gilt also:

$$\left.\begin{matrix} \boldsymbol{a < b} \\ \boldsymbol{c > 0} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{c}} < \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}} \quad \text{und} \quad \left.\begin{matrix} \boldsymbol{a < b} \\ \boldsymbol{c < 0} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{c}} > \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}}.$$

Aufgaben

1. Multipliziere die Ungleichung mit der angegebenen Zahl.
   a) $-20 < -2 \| \cdot 5$ **b)** $1{,}7 > -1{,}8 \| \cdot (-0{,}5)$ **c)** $24 > 0 \| \cdot (-\frac{3}{8})$
   d) $\frac{3}{7} > -\frac{7}{3} \| \cdot (-21)$ **e)** $2x > y \| \cdot 0{,}7$ **f)** $0{,}2u < -8v \| \cdot (-5)$

2. Dividiere die Ungleichung durch die angegebene Zahl:
   a) $-2 < 1 \| : 5$ **b)** $68 > 0 \| : (-0{,}5)$
   c) $-5{,}4 < -4{,}5 \| : (-\frac{5}{3})$ **d)** $\frac{14}{15} < \frac{24}{25} \| : 0{,}4$
   e) $0{,}01 > -0{,}1 \| : (-0{,}001)$ **f)** $-0{,}8 > -\frac{7}{8} \| : |-2|$

3. Multipliziere die zwischen a und b bestehende Ungleichung mit dem Faktor c:

a) $a = 37;\ b = -1;\ c = 3$ **b)** $a = \frac{4}{5};\ b = \frac{3}{4};\ c = -10$

c) $a = -1{,}9;\ b = -2{,}1;\ c = -0{,}2$ **d)** $a = -0{,}985;\ b = 0;\ c = 200$

4. Was ergibt sich, wenn man eine Ungleichung mit 0 multipliziert?

5. Ist x positiv, null oder negativ, wenn gilt

a) $a < b \Rightarrow ax > bx$ **b)** $u > v \Rightarrow ux = vx$

c) $n > m \Rightarrow \frac{n}{x} < \frac{m}{x}$ **d)** $p > 0 \Rightarrow \frac{p}{x} > 0$?

2.7.3 Zusammenstellung der Rechengesetze

Für rationale Zahlen a, b, c gelten folgende Rechengesetze:		
Gesetze der Addition	**Gesetze der Multiplikation**	**Bezeichnungen**
(E_+) $a + b \in \mathbb{Q}$	$(E_\cdot)$ $a \cdot b \in \mathbb{Q}$	**Existenz der Summe/des Produkts**
(K_+) $a + b = b + a$	$(K_\cdot)$ $a \cdot b = b \cdot a$	**Kommutativgesetz**
(A_+) $(a + b) + c = a + (b + c)$	$(A_\cdot)$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	**Assoziativgesetz**
(N_+) $a + 0 = a$	$(N_\cdot)$ $a \cdot 1 = a$	**Existenz des neutralen Elements**
(I_+) $a + (-a) = 0$	$(I_\cdot)$ $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, **falls** $a \neq 0$	**Existenz des inversen Elements**
(D) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$		**Distributivgesetz**
$a < b \Rightarrow a + c < b + c$	$\left.\begin{matrix} a < b \\ c > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$	**Monotoniegesetz**
	$\left.\begin{matrix} a < b \\ c < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$	**Umkehrung der Monotonie**

Die hier zusammengestellten Rechengesetze bilden die Grundlage für das Rechnen mit rationalen Zahlen und überhaupt für die ganze Algebra. Du wirst sie im folgenden immer wieder benötigen, besonders häufig die mit (E), (K), (A), (N), (I) und (D) bezeichneten Gesetze. Präge sie dir daher gut ein (Merkwort: EKANID, vgl. auch Aufgabe 84/**5**.).
Besonders auffällig an dieser Gesetzestafel ist natürlich die weitgehende Analogie zwischen den Rechengesetzen der Addition und der Multiplikation: die »EKANI-Gesetze« gibt es für beide Rechenarten. Zu ihrer Unterscheidung wurde in der Tafel ein an den Kennbuchstaben angehängtes Plus- bzw. Malzeichen verwendet. Im Distributivgesetz (D) – und nur in ihm (!) – kommen beide Rechenarten zugleich vor. Es stellt eine Verbindung zwischen den beiden durch die Gesetze der Addition und der Multiplikation beschriebenen Rechenbereichen dar.

Aufgaben

1. Welches der in $\mathbb{Q}$ geltenden Rechengesetze der Addition konnte in der Zahlenmenge $\mathbb{Q}_0^+$ noch nicht aufgestellt werden und warum nicht?

2. Weshalb benötigt man keine eigenen Rechengesetze für die Subtraktion und die Division? (In welchen Rechengesetzen der Addition und Multiplikation sind diese Umkehroperationen enthalten?)

3. Ist es richtig, zu sagen »Wenn man in den Rechengesetzen der Addition die Pluszeichen durch Malzeichen ersetzt, erhält man die Rechengesetze der Multiplikation«?

4. Erkläre an der Zahlengeraden, warum es bei der Addition keine »Umkehrung der Monotonie« gibt.

5. a) Wie gefällt dir der Wahlspruch »In Mathe fit mit EKANID«?
Oder folgender: »Was EKANID weiß, macht mich nicht heiß«?
Denke dir selbst beß're Merksätze aus!
Vielleicht wird gar ein Gedicht daraus?

b) »Beim Rechnen in $\mathbb{Q}_0^+$ eckt man oft an,
Weil man häufig nicht subtrahieren kann.
Das liegt daran: Man hat nur EKAN!
.................................«
Erfinde zu diesem großartigen Gedichtanfang eine passende Fortsetzung, welche auf den mit $\mathbb{Q}$ und EKANI erreichten Fortschritt hinweist!