Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

2.7.1 Das Distributivgesetz

urn:nbn:de:hbz:466:1-83493

Aufgaben

1. Vereinfache durch Anwendung der Vorzeichenregeln für Produkte:
   a) $(-2)\cdot x$ **b)** $(-5)(-y)$ **c)** $(-z)(+2{,}3)$
   d) $a(-b)(+c)$ **e)** $(-a)(-b)c$ **f)** $(+a)(+b)(-c)$

2. Beweise die Gleichung $a\cdot(-1)=-a$ (Satz 75.1) mit Hilfe der Fallunterscheidung $a>0$, $a=0$, $a<0$. Gib jeweils an, welche Definitionen oder Sätze benützt werden.

3. **a)** Stelle entsprechend der Regel 76.1 die Vorzeichenregeln für Produkte mit drei Faktoren symbolisch dar.
   b) Ergänze zu richtigen Vorzeichenregeln:
   $(-)\cdot(+)\cdot(-)\cdot(+)=?$ und $(+)\cdot(-)\cdot(-)\cdot(+)\cdot(-)=?$

4. Vereinfache durch Anwenden der Vorzeichenregeln für Quotienten:
   a) $\dfrac{2(-m)}{-3}$ **b)** $\dfrac{(-1)(+m)}{(+1)(-n)}$ **c)** $\dfrac{(-21)(-s)t}{q(+r)(-5)}$

5. Verwandle in den folgenden Produkten den Zahlenfaktor in einen Divisor.
   a) $m\cdot\frac{1}{7}$ **b)** $n\cdot 0{,}2$ **c)** $p\cdot(-0{,}25)$
   d) $(-\frac{2}{9})\cdot q$ **e)** $r\cdot(1\frac{2}{3})$ **f)** $(-\frac{10}{13})\cdot s$

6. Schreibe die folgenden Quotienten als Produkte:
   a) $x:0{,}5$ **b)** $y:\frac{1}{6}$ **c)** $z:(-\frac{2}{3})$
   d) $(-u):(-0{,}125)$ **e)** $v:(3\frac{1}{3})$ **f)** $w:(-0{,}001)$

2.7 Die Rechengesetze für die rationalen Zahlen

2.7.1 Das Distributivgesetz

Im bisherigen Rechenunterricht hast du schon das **Verteilungs-** oder **Distributivgesetz*** kennengelernt. Es besagt, daß man beim Multiplizieren einer Summe auf zwei verschiedenen Wegen zum richtigen Ergebnis kommen kann. Dazu ein

Beispiel:

Die Klasse 7b besteht aus 16 Knaben und 10 Mädchen. Für den Besuch einer Ausstellung sammelt der Klassensprecher pro Schüler 2,50 DM ein. Wieviel Geld muß er dann haben?

1. Weg: Man rechnet »2,50 DM · Gesamtzahl der Schüler«, also
2,50 DM · (16 + 10) = 2,50 DM · 26 = 65,00 DM.

* distribuere (lat.) = verteilen. – Der Ausdruck *distributiv* wurde ebenso wie das Wort *kommutativ* 1814 von dem französischen Professor der Mathematik François Joseph Servois (1767–1847) geprägt. Siehe auch die Fußnote* auf Seite 50.

2. Weg: Man rechnet »2,50 DM · Zahl der Knaben« + »2,50 DM · Zahl der Mädchen«, also
$2{,}50\,\text{DM} \cdot 16 + 2{,}50\,\text{DM} \cdot 10 = 40{,}00\,\text{DM} + 25{,}00\,\text{DM} = 65{,}00\,\text{DM}$.

Man erkennt: $2{,}50\,\text{DM} \cdot (16 + 10) = 2{,}50\,\text{DM} \cdot 16 + 2{,}50\,\text{DM} \cdot 10$.

Allgemein gilt für $a, b, c \in \mathbb{Q}_0^+$ die Beziehung $a(b+c) = ab + ac$. Dies ist das Distributivgesetz, für das wir die Abkürzung (D) verwenden.
Nachdem wir nun wissen, wie in der größeren Zahlenmenge $\mathbb{Q}$ die Addition und die Multiplikation auszuführen sind, stellt sich die Frage, ob das Rechengesetz (D) auch in $\mathbb{Q}$ gültig bleibt. Wir prüfen dies zunächst an einigen Beispielen.

Beispiel 1: $a = -2,\ b = 5,\ c = -8$
dann gilt: $a(b+c) = (-2) \cdot (5 + (-8)) = (-2) \cdot (-3) = 6$
und: $ab + ac = (-2) \cdot 5 + (-2) \cdot (-8) = -10 + 16 = 6.$

Beispiel 2: $a = 4{,}1;\ b = -4{,}8;\ c = 3{,}5$
dann gilt: $a(b+c) = 4{,}1 \cdot ((-4{,}8) + 3{,}5) = 4{,}1 \cdot (-1{,}3) = -5{,}33$
und: $ab + ac = 4{,}1 \cdot (-4{,}8) + 4{,}1 \cdot 3{,}5 = -19{,}68 + 14{,}35 = -5{,}33.$

Beispiel 3: $a = -\frac{2}{7},\ b = -\frac{3}{4},\ c = -\frac{2}{11}$
dann gilt: $a(b+c) = (-\frac{2}{7}) \cdot ((-\frac{3}{4}) + (-\frac{2}{11})) = (-\frac{2}{7}) \cdot (-(\frac{3}{4} + \frac{2}{11})) =$
$= \frac{2}{7}(\frac{3}{4} + \frac{2}{11}) = \frac{2}{7} \cdot \frac{41}{44} = \frac{41}{154}$
und: $ab + ac = (-\frac{2}{7}) \cdot (-\frac{3}{4}) + (-\frac{2}{7}) \cdot (-\frac{2}{11}) = \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{11} =$
$= \frac{3}{14} + \frac{4}{77} = \frac{33+8}{154} = \frac{41}{154}.$

Diese Beispiele lassen also vermuten, daß (D) für alle rationalen Zahlen gilt. Der genaue Nachweis dafür erfordert eine ziemlich umfangreiche Fallunterscheidung und ist schwierig. Für Interessenten soll hier als Beispiel einer der einfacheren Fälle untersucht werden:

Fall: $a > 0,\ b < 0,\ c < 0$

Wir setzen $a = p,\ b = -q,\ c = -r$ mit $p, q, r \in \mathbb{Q}^+$.
Dann gilt: $a(b+c) = p((-q) + (-r)) = p(-(q+r)) =$
$= -(p(q+r)) = -(pq + pr).$

Hier wurde beim letzten Schritt (D) in $\mathbb{Q}^+$ angewandt.

Weiter gilt: $ab + ac = p(-q) + p(-r) = (-pq) + (-pr) =$
$= -(pq + pr).$

Damit ist für diesen Fall (D) bewiesen. Man kann so tatsächlich zeigen, daß das Distributivgesetz in jedem Fall gilt. Dies halten wir fest in

Satz 79.1: Für beliebige rationale Zahlen a, b, c gilt das **Distributivgesetz:**

$$\text{(D):}\quad a(b+c) = ab + ac$$

Beispiele:

1) $(-2)(a+5) = (-2)a + (-2)\cdot 5 = -2a - 10.$
2) $(x+2y)\cdot 19 = 19(x+2y) = 19x + 38y.$
3) $6{,}5(a-4b) = 6{,}5(a+(-4b)) = 6{,}5a + 6{,}5(-4b) = 6{,}5a - 26b.$
4) $((-3z)-7)\cdot(-10) = ((-3z)+(-7))\cdot(-10) =$
$= (-3z)\cdot(-10) + (-7)\cdot(-10) = 30z + 70.$

Aufgaben

1. Berechne zur Überprüfung des Distributivgesetzes die Terme $T_1 = a(b+c)$ und $T_2 = ab + ac$ für folgende Zahlenwerte:
   a) $a = -8;\ b = -2;\ c = 5$ **b)** $a = 1{,}1;\ b = -0{,}7;\ c = -160$
   c) $a = -36;\ b = \frac{7}{16};\ c = -1\frac{3}{8}$ **d)** $a = -2{,}5;\ b = -9{,}12;\ c = -\frac{22}{25}$

• 2. Begründe bei dem auf Seite 79 stehenden Beweis des Distributivgesetzes für den Fall $a > 0,\ b < 0,\ c < 0$ die einzelnen Termumformungen, z. B. durch Angabe der dabei verwendeten Sätze oder Regeln.

• 3. Beweise nach dem Muster des auf Seite 79 durchgeführten Falles das Distributivgesetz auch für den Fall $a < 0,\ b < 0$ und $c < 0$.

4. Verwandle die angegebenen Produkte in Summen oder Differenzen:
   a) $(16x + 3y)\cdot 9$ **b)** $(2{,}8xy - 5)\cdot(-12{,}5)$ **c)** $(-0{,}5)\cdot(1{,}6v - \frac{3}{5}w)$
   d) $12(-4a + 3b)$ **e)** $(-n)\cdot(2n+7)$ **f)** $(-\frac{2}{3}x - \frac{5}{8}y)\cdot\frac{6}{7}$

5. Berechne und vergleiche $T_1 = (a+b):c$ und $T_2 = a:c + b:c$ für folgende Zahlenwerte:
   a) $a = 22;\ b = 10;\ c = 8$ **b)** $a = -5{,}4;\ b = 7{,}8;\ c = -6$
   c) $a = -2\frac{1}{7};\ b = -\frac{10}{21};\ c = \frac{5}{11}$ **d)** $a = -\frac{1}{3};\ b = -1{,}6;\ c = -0{,}4$

6. Begründe, daß auch für das Dividieren einer Summe ein Distributivgesetz gilt, nämlich $(a+b):c = a:c + b:c$, für $c \neq 0$.
   Hinweis: Beachte Satz 74.1.

7. Verwandle die folgenden Quotienten in Summen oder Differenzen:
   a) $(8x + 6y):4$ **b)** $(0{,}64z^2 - 1):0{,}4$
   c) $(\frac{2}{3}u - 5v):(-\frac{5}{6})$ **d)** $(-5{,}1p - 8{,}5q):(-17)$

2.7.2 Die Monotoniegesetze der Multiplikation

Wir wissen schon nach Satz 62.1, daß eine Ungleichung erhalten bleibt, wenn man auf beiden Seiten dieselbe Zahl addiert: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$. Gilt eine entsprechende Feststellung auch, wenn man beide Seiten einer Ungleichung mit derselben Zahl multipliziert?