Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

2.7.2 Die Monotoniegesetze der Multiplikation

urn:nbn:de:hbz:466:1-83493

Beispiele:

1) $(-2)(a+5) = (-2)a + (-2)\cdot 5 = -2a - 10.$

2) $(x+2y)\cdot 19 = 19(x+2y) = 19x + 38y.$

3) $6{,}5(a-4b) = 6{,}5(a+(-4b)) = 6{,}5a + 6{,}5(-4b) = 6{,}5a - 26b.$

4) $((-3z)-7)\cdot(-10) = ((-3z)+(-7))\cdot(-10) =$
$= (-3z)\cdot(-10) + (-7)\cdot(-10) = 30z + 70.$

Aufgaben

1. Berechne zur Überprüfung des Distributivgesetzes die Terme $T_1 = a(b+c)$ und $T_2 = ab + ac$ für folgende Zahlenwerte:
a) $a = -8;\ b = -2;\ c = 5$ **b)** $a = 1{,}1;\ b = -0{,}7;\ c = -160$
c) $a = -36;\ b = \frac{7}{16};\ c = -1\frac{3}{8}$ **d)** $a = -2{,}5;\ b = -9{,}12;\ c = -\frac{22}{25}$

• 2. Begründe bei dem auf Seite 79 stehenden Beweis des Distributivgesetzes für den Fall $a > 0,\ b < 0,\ c < 0$ die einzelnen Termumformungen, z. B. durch Angabe der dabei verwendeten Sätze oder Regeln.

• 3. Beweise nach dem Muster des auf Seite 79 durchgeführten Falles das Distributivgesetz auch für den Fall $a < 0,\ b < 0$ und $c < 0$.

4. Verwandle die angegebenen Produkte in Summen oder Differenzen:
a) $(16x+3y)\cdot 9$ **b)** $(2{,}8xy-5)\cdot(-12{,}5)$ **c)** $(-0{,}5)\cdot(1{,}6v - \frac{3}{5}w)$
d) $12(-4a+3b)$ **e)** $(-n)\cdot(2n+7)$ **f)** $(-\frac{2}{3}x - \frac{5}{8}y)\cdot\frac{6}{7}$

5. Berechne und vergleiche $T_1 = (a+b) : c$ und $T_2 = a : c + b : c$ für folgende Zahlenwerte:
a) $a = 22;\ b = 10;\ c = 8$ **b)** $a = -5{,}4;\ b = 7{,}8;\ c = -6$
c) $a = -2\frac{1}{7};\ b = -\frac{10}{21};\ c = \frac{5}{11}$ **d)** $a = -\frac{1}{3};\ b = -1{,}6;\ c = -0{,}4$

6. Begründe, daß auch für das Dividieren einer Summe ein Distributivgesetz gilt, nämlich $(a+b) : c = a : c + b : c$, für $c \neq 0$.
Hinweis: Beachte Satz 74.1.

7. Verwandle die folgenden Quotienten in Summen oder Differenzen:
a) $(8x+6y) : 4$ **b)** $(0{,}64z^2 - 1) : 0{,}4$
c) $(\frac{2}{3}u - 5v) : (-\frac{5}{6})$ **d)** $(-5{,}1p - 8{,}5q) : (-17)$

2.7.2 Die Monotoniegesetze der Multiplikation

Wir wissen schon nach Satz 62.1, daß eine Ungleichung erhalten bleibt, wenn man auf beiden Seiten dieselbe Zahl addiert: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$. Gilt eine entsprechende Feststellung auch, wenn man beide Seiten einer Ungleichung mit derselben Zahl multipliziert?

Beispiele:

1) Multiplikation mit 7:
Aus $2 < 5$ wird $14 < 35$, weil 14 links von 35 liegt.
Aus $-5 < 1{,}5$ wird $-35 < 10{,}5$.
Aus $-3{,}1 < -1{,}2$ wird $-21{,}7 < -8{,}4$.

2) Multiplikation mit -3:
Aus $2 < 5$ wird $-6 > -15$, weil -6 rechts von -15 liegt.
Aus $-5 < 1{,}5$ wird $15 > -4{,}5$.
Aus $-3{,}1 < -1{,}2$ wird $9{,}3 > 3{,}6$.

Die Beispiele unter **1)** lassen vermuten, daß gilt:

Satz 81.1: Monotoniegesetz der Multiplikation
Multipliziert man eine Ungleichung mit einer **positiven** Zahl, so bleibt das Ungleichheitszeichen erhalten; also

$$\left.\begin{matrix} a < b \\ c > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac < bc.$$

Bemerkung: Da statt $a < b$ auch $b > a$ und statt $ac < bc$ auch $bc > ac$ geschrieben werden kann, gilt Satz 81.1 natürlich dann auch für Ungleichungen mit dem Größerzeichen.

Beweis: $a < b$ bedeutet nach Satz 61.2, daß es eine Zahl $p > 0$ gibt, für welche $a + p = b$ gilt.
Dann ist auch $(a + p)c = bc$ bzw. $ac + pc = bc$.
Wegen $c > 0$ und $p > 0$ gilt auch $pc > 0$. Man muß also zu ac die positive Zahl pc addieren, um bc zu erhalten. Nach Satz 61.2 bedeutet dies aber $ac < bc$, was zu zeigen war.

Die Beispiele **2)** lassen erkennen, daß für negative Faktoren das Monotoniegesetz nicht gilt. Offenbar kehrt sich in diesem Fall das Ungleichheitszeichen um, d.h., aus dem Kleinerzeichen wird ein Größerzeichen bzw. aus dem Größer- ein Kleinerzeichen. Es gilt der folgende

Satz 81.2: Gesetz von der Umkehrung der Monotonie
Multipliziert man eine Ungleichung mit einer **negativen** Zahl, so kehrt sich das Ungleichheitszeichen um, d.h.,

$$\left.\begin{matrix} a < b \\ c < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac > bc.$$

Beweis: $a < b$ bedeutet nach Satz 61.2, daß es eine Zahl $p > 0$ gibt, für welche $a + p = b$ gilt.

Die Auflösung dieser Gleichung nach a liefert

$a = b - p$ oder $a = b + (-p)$.

Dann gilt auch $ac = (b + (-p))c =$

$\stackrel{\mathrm{D}}{=} bc + (-p)c$.

Nach Voraussetzung sind $(-p)$ und c negative Zahlen; somit ist $(-p)c$ positiv. Da man also zu bc eine positive Zahl addieren muß, um ac zu erhalten, gilt $ac > bc$, was zu zeigen war.

Einen wichtigen Sonderfall von Satz 81.2 stellt das Multiplizieren einer Ungleichung mit -1 dar. Es gilt (Abbildung 82.1):

$a < b \Rightarrow a \cdot (-1) > b \cdot (-1)$, also

$a < b \Rightarrow -a > -b$.

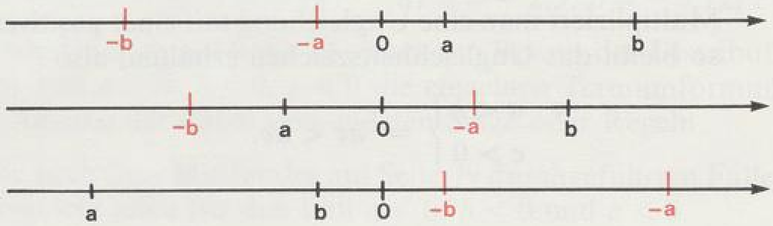

Abb. 82.1 $a < b \Leftrightarrow -a > -b$

Natürlich gelten die beiden Monotoniegesetze auch für das Dividieren einer Ungleichung durch eine positive oder negative Zahl. Das ergibt sich daraus, daß man die Division durch $c \neq 0$ als Multiplikation mit $\frac{1}{c}$ auffassen kann. Da c und $\frac{1}{c}$ gleiches Vorzeichen haben, gilt also:

$$\left.\begin{matrix} \boldsymbol{a < b} \\ \boldsymbol{c > 0} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{c}} < \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}} \quad \text{und} \quad \left.\begin{matrix} \boldsymbol{a < b} \\ \boldsymbol{c < 0} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{c}} > \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}}.$$

Aufgaben

1. Multipliziere die Ungleichung mit der angegebenen Zahl.
   a) $-20 < -2 \,\|\cdot 5$ **b)** $1{,}7 > -1{,}8 \,\|\cdot(-0{,}5)$ **c)** $24 > 0 \,\|\cdot(-\frac{3}{8})$
   d) $\frac{3}{7} > -\frac{7}{3} \,\|\cdot(-21)$ **e)** $2x > y \,\|\cdot 0{,}7$ **f)** $0{,}2u < -8v \,\|\cdot(-5)$
2. Dividiere die Ungleichung durch die angegebene Zahl:
   a) $-2 < 1 \,\|: 5$ **b)** $68 > 0 \,\|:(-0{,}5)$
   c) $-5{,}4 < -4{,}5 \,\|:(-\frac{5}{3})$ **d)** $\frac{14}{15} < \frac{24}{25} \,\|: 0{,}4$
   e) $0{,}01 > -0{,}1 \,\|:(-0{,}001)$ **f)** $-0{,}8 > -\frac{7}{8} \,\|:|-2|$

3. Multipliziere die zwischen a und b bestehende Ungleichung mit dem Faktor c:

a) $a = 37;\ b = -1;\ c = 3$ **b)** $a = \frac{4}{5};\ b = \frac{3}{4};\ c = -10$

c) $a = -1{,}9;\ b = -2{,}1;\ c = -0{,}2$ **d)** $a = -0{,}985;\ b = 0;\ c = 200$

4. Was ergibt sich, wenn man eine Ungleichung mit 0 multipliziert?

5. Ist x positiv, null oder negativ, wenn gilt

a) $a < b \Rightarrow ax > bx$ **b)** $u > v \Rightarrow ux = vx$

c) $n > m \Rightarrow \frac{n}{x} < \frac{m}{x}$ **d)** $p > 0 \Rightarrow \frac{p}{x} > 0$?

2.7.3 Zusammenstellung der Rechengesetze

Für rationale Zahlen a, b, c gelten folgende Rechengesetze:		
Gesetze der Addition	**Gesetze der Multiplikation**	**Bezeichnungen**
(E_+) $a + b \in \mathbb{Q}$	$(\mathrm{E}_\cdot)$ $a \cdot b \in \mathbb{Q}$	**Existenz der Summe/des Produkts**
(K_+) $a + b = b + a$	$(\mathrm{K}_\cdot)$ $a \cdot b = b \cdot a$	**Kommutativgesetz**
(A_+) $(a + b) + c = a + (b + c)$	$(\mathrm{A}_\cdot)$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	**Assoziativgesetz**
(N_+) $a + 0 = a$	$(\mathrm{N}_\cdot)$ $a \cdot 1 = a$	**Existenz des neutralen Elements**
(I_+) $a + (-a) = 0$	$(\mathrm{I}_\cdot)$ $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, falls $a \neq 0$	**Existenz des inversen Elements**
(D) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$		**Distributivgesetz**
$a < b \Rightarrow a + c < b + c$	$\left.\begin{matrix} a < b \\ c > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$	**Monotoniegesetz**
	$\left.\begin{matrix} a < b \\ c < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$	**Umkehrung der Monotonie**