Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

Aufgaben

Die Auflösung dieser Gleichung nach a liefert
$a = b - p$ oder $a = b + (-p)$.
Dann gilt auch $ac = (b + (-p))c =$
$\overset{D}{=} bc + (-p)c$.

Nach Voraussetzung sind $(-p)$ und c negative Zahlen; somit ist $(-p)c$ positiv. Da man also zu bc eine positive Zahl addieren muß, um ac zu erhalten, gilt $ac > bc$, was zu zeigen war.

Einen wichtigen Sonderfall von Satz 81.2 stellt das Multiplizieren einer Ungleichung mit -1 dar. Es gilt (Abbildung 82.1):

$a < b \Rightarrow a \cdot (-1) > b \cdot (-1)$, also
$a < b \Rightarrow -a > -b$.

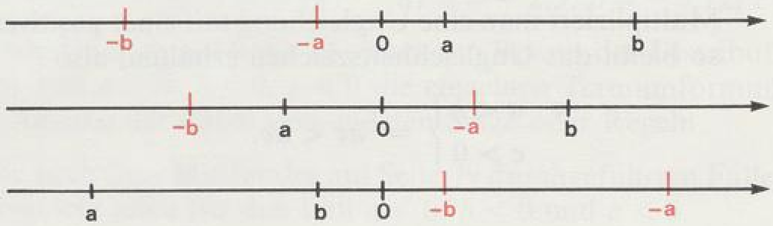

Abb. 82.1 $a < b \Leftrightarrow -a > -b$

Natürlich gelten die beiden Monotoniegesetze auch für das Dividieren einer Ungleichung durch eine positive oder negative Zahl. Das ergibt sich daraus, daß man die Division durch $c \neq 0$ als Multiplikation mit $\frac{1}{c}$ auffassen kann. Da c und $\frac{1}{c}$ gleiches Vorzeichen haben, gilt also:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{a < b} \\ \boldsymbol{c > 0} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{c}} < \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}} \quad \text{und} \quad \left.\begin{array}{l} \boldsymbol{a < b} \\ \boldsymbol{c < 0} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{c}} > \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}}.$$

Aufgaben

1. Multipliziere die Ungleichung mit der angegebenen Zahl.
   a) $-20 < -2 \,\|\cdot 5$ **b)** $1{,}7 > -1{,}8 \,\|\cdot(-0{,}5)$ **c)** $24 > 0 \,\|\cdot(-\frac{3}{8})$
   d) $\frac{3}{7} > -\frac{7}{3} \,\|\cdot(-21)$ **e)** $2x > y \,\|\cdot 0{,}7$ **f)** $0{,}2u < -8v \,\|\cdot(-5)$

2. Dividiere die Ungleichung durch die angegebene Zahl:
   a) $-2 < 1 \,\|: 5$ **b)** $68 > 0 \,\|:(-0{,}5)$
   c) $-5{,}4 < -4{,}5 \,\|:(-\frac{5}{3})$ **d)** $\frac{14}{15} < \frac{24}{25} \,\|: 0{,}4$
   e) $0{,}01 > -0{,}1 \,\|:(-0{,}001)$ **f)** $-0{,}8 > -\frac{7}{8} \,\|:|-2|$

3. Multipliziere die zwischen a und b bestehende Ungleichung mit dem Faktor c:

a) $a = 37;\ b = -1;\ c = 3$ **b)** $a = \frac{4}{5};\ b = \frac{3}{4};\ c = -10$

c) $a = -1{,}9;\ b = -2{,}1;\ c = -0{,}2$ **d)** $a = -0{,}985;\ b = 0;\ c = 200$

4. Was ergibt sich, wenn man eine Ungleichung mit 0 multipliziert?

5. Ist x positiv, null oder negativ, wenn gilt

a) $a < b \Rightarrow ax > bx$ **b)** $u > v \Rightarrow ux = vx$

c) $n > m \Rightarrow \frac{n}{x} < \frac{m}{x}$ **d)** $p > 0 \Rightarrow \frac{p}{x} > 0$?

2.7.3 Zusammenstellung der Rechengesetze

Für rationale Zahlen a, b, c gelten folgende Rechengesetze:		
Gesetze der Addition	**Gesetze der Multiplikation**	**Bezeichnungen**
(E_+) $a + b \in \mathbb{Q}$	$(E_\cdot)$ $a \cdot b \in \mathbb{Q}$	**Existenz der Summe/des Produkts**
(K_+) $a + b = b + a$	$(K_\cdot)$ $a \cdot b = b \cdot a$	**Kommutativgesetz**
(A_+) $(a + b) + c = a + (b + c)$	$(A_\cdot)$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	**Assoziativgesetz**
(N_+) $a + 0 = a$	$(N_\cdot)$ $a \cdot 1 = a$	**Existenz des neutralen Elements**
(I_+) $a + (-a) = 0$	$(I_\cdot)$ $a \cdot \frac{1}{a} = 1$, falls $a \neq 0$	**Existenz des inversen Elements**
(D) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$		**Distributivgesetz**
$a < b \Rightarrow a + c < b + c$	$\left.\begin{matrix} a < b \\ c > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$	**Monotoniegesetz**
	$\left.\begin{matrix} a < b \\ c < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$	**Umkehrung der Monotonie**