Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

3 Einfache Termumformungen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83493

3 Einfache Termumformungen

Endstation der Autobuslinie 84 an der Place du Panthéon in Paris (1985)

Zum Wort *Term* siehe Seite 180.

3 Einfache Termumformungen

3.1 Äquivalente Terme

Terme, also auch Variablen, stehen für rationale Zahlen. Beim Rechnen mit Termen denken wir uns jede Variable durch eine geeignete Zahl ersetzt. Dadurch wird der Term selbst zu einer rationalen Zahl, und man kann mit ihm wie mit einer rationalen Zahl rechnen. Also gelten die Rechengesetze für rationale Zahlen auch für das Rechnen mit Termen. Mit Hilfe der Rechengesetze kann man dann Terme in andere Terme umwandeln. Vor allem will man natürlich komplizierte Terme vereinfachen. Wir zeigen dieses Umformen von Termen mittels der Rechengesetze an einigen Beispielen.

1) Umformungen mit Hilfe der Rechengesetze für die Addition

Kommutativgesetz: $\boldsymbol{a + b = b + a}$

$2x + 3 = 3 + 2x \qquad 1 - x = -x + 1$

Assoziativgesetz: $\boldsymbol{(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c}$

$(3x + 1) + 12 = 3x + (1 + 12) = 3x + 13$

$(1\frac{1}{2}x - 3\frac{3}{4}) - 2\frac{1}{4} = (1\frac{1}{2}x + (-3\frac{3}{4})) + (-2\frac{1}{4}) =$

$= 1\frac{1}{2}x + (-3\frac{3}{4} - 2\frac{1}{4}) = 1\frac{1}{2}x - 6$

0 als neutrales Element der Addition: $\boldsymbol{a + 0 = 0 + a = a}$

$3x + 0 = 3x$

Inverses Element bei der Addition: $\boldsymbol{a + (-a) = a - a = 0}$

$x - x = 0 \qquad 3{,}7x - 3{,}7x = 0 \qquad (3x + 5y + 8) - (3x + 5y + 8) = 0$

2) Umformungen mit Hilfe der Rechengesetze für die Multiplikation

Kommutativgesetz: $\boldsymbol{a \cdot b = b \cdot a}$

$x \cdot 3 = 3 \cdot x = 3x \qquad x \cdot (-\frac{3}{7}) = (-\frac{3}{7})x = -\frac{3}{7}x$

Assoziativgesetz: $\boldsymbol{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c}$

$2 \cdot (4 \cdot x) = (2 \cdot 4) \cdot x = 8x$

$(-3)((-2{,}1)x) = ((-3)(-2{,}1))x = 6{,}3x$

1 als neutrales Element der Multiplikation: $\boldsymbol{1 \cdot a = a \cdot 1 = a}$

$1 \cdot x = x \qquad x = 1 \cdot x$

Inverses Element bei der Multiplikation: $\boldsymbol{a \cdot \frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1}$ **für** $\boldsymbol{a \neq 0}$

$x \cdot \frac{1}{x} = 1 \qquad (2{,}7x) \cdot \frac{1}{2{,}7x} = 1 \qquad \frac{-3x}{-3x} = 1$

3) Umformungen mit Hilfe des Distributivgesetzes

Ausmultiplizieren:	**Ausklammern:**
$\boldsymbol{a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c}$	$\boldsymbol{a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c)}$
$3 \cdot (x+2) = 3 \cdot x + 3 \cdot 2 = 3x + 6$	$2x + 2y = 2(x+y)$
$(-2) \cdot (3-x) = -6 + 2x$	$2x + 3x = (2+3)x = 5x$
$(-1) \cdot (x-7) = -x + 7$	$2x + x = (2+1)x = 3x$

Interessanter, aber auch schwieriger wird es, wenn mehrere Gesetze nacheinander oder gleichzeitig angewendet werden:

$$(-3+x)+1 \stackrel{K}{=} (x+(-3))+1 \stackrel{A}{=} x+((-3)+1) = x+(-2) = x-2$$

$$\frac{8x-14}{2} = \tfrac{1}{2} \cdot (8x-14) \stackrel{D}{=} \tfrac{1}{2} \cdot (8x) - \tfrac{1}{2} \cdot 14 \stackrel{A}{=} (\tfrac{1}{2} \cdot 8)x - 7 = 4x - 7$$

oder kürzer $\dfrac{8x-14}{2} = \dfrac{8x}{2} - \dfrac{14}{2} = 4x - 7$

Der umgewandelte und der ursprüngliche Term sind mathematisch gleichwertig. Setzt man nämlich in beide Terme irgendeine Zahl ein, so entstehen jeweils gleiche Zahlenwerte. So ergibt sich z. B. bei den Termen $T_1(x) = \dfrac{8x-14}{2}$ und $T_2(x) = 4x - 7$ bei der Einsetzung $x = 3$ einerseits $T_1(3) = \dfrac{8 \cdot 3 - 14}{2} = 5$, andererseits $T_2(3) = 4 \cdot 3 - 7 = 5$, also jedesmal 5.
Man kennzeichnet diese Gleichwertigkeit von Termen durch ein Fachwort:

Definition 89.1: Zwei Terme $T_1(x)$ und $T_2(x)$ heißen **äquivalent***, wenn sie bei *jeder* Einsetzung für x jeweils gleiche Zahlenwerte liefern.
Kommen in Termen mehrere Variablen vor, so müssen sie bei der Ersetzung *aller* Variablen durch Zahlen jeweils gleiche Zahlenwerte liefern.

Die Rechengesetze liefern uns Beispiele für äquivalente Terme. So sagt z. B. das Kommutativgesetz der Addition, daß die Terme $a + b$ und $b + a$ äquivalent sind.

Die Grundmenge $\mathbb{Q}$ hat unendlich viele Elemente. Daher kann man mit der Methode des Einsetzens die Äquivalenz von Termen niemals nachweisen, da man mit dem Einsetzen nie fertig wird. Wie kann man aber dann feststellen, ob zwei Terme äquivalent sind? Antwort hierauf gibt

* *aequus* (lat.) = gleich; *valere* (lat.) = wert sein, gelten für

Satz 90.1: Zwei Terme, die durch Anwendung der Rechengesetze auseinander hervorgehen, sind äquivalent.

Zur **Begründung** dieses Satzes überlegen wir uns: Wenn man einen Term mit Hilfe eines Rechengesetzes durch einen anderen ersetzt, so haben der ursprüngliche und der neue Term bei jeder Einsetzung den gleichen Wert. Also sind die beiden Terme äquivalent.

Bei umfangreichen oder kompliziert gebauten Termen ist der Nachweis der Äquivalenz sehr langwierig. So ist insbesondere der Nachweis, daß die Rechengesetze auf mehr als 2 bzw. 3 Summanden und Faktoren verallgemeinert werden können, sehr mühsam. Für Tüftler führen wir als Beispiel vor, wie man ein Kommutativgesetz der Addition bei 4 Summanden beweisen kann.

Wir wollen zeigen:

$$a+b+c+d=d+b+c+a$$

Mit Hilfe des Assoziativgesetzes (A) und des Kommutativgesetzes (K) formen wir langsam um.

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= ((a+b)+c)+d = \\ &\stackrel{K}{=} d+((a+b)+c) = \\ &\stackrel{K}{=} d+((b+a)+c) = \\ &\stackrel{A}{=} d+(b+(a+c)) = \\ &\stackrel{K}{=} d+(b+(c+a)) = \\ &\stackrel{A}{=} d+((b+c)+a) = \\ &\stackrel{A}{=} (d+(b+c))+a = \\ &\stackrel{A}{=} ((d+b)+c)+a = \\ &= d+b+c+a \end{aligned}$$

Wer selber so etwas versuchen will, soll Aufgabe 95/**12** lösen!

Abb. 90.1 Sir (seit 1835) William Rowan HAMILTON (4. 8. 1805 Dublin bis 2. 9. 1865 Dunsink bei Dublin), der 1843 das Wort *assoziativ* prägte.

Auch andere Rechengesetze lassen sich verallgemeinern. Es gilt nämlich

Satz 90.2: Verallgemeinerte Rechengesetze

Verallgemeinertes Kommutativgesetz

Bei Summen darf die Reihenfolge der Summanden beliebig geändert werden, ohne daß sich der Wert der Summe ändert; z. B.	Bei Produkten darf die Reihenfolge der Faktoren beliebig geändert werden, ohne daß sich der Wert des Produkts ändert; z. B.
$\boldsymbol{a+b+c+d=d+b+c+a}$	$\boldsymbol{a\cdot b\cdot c\cdot d=d\cdot b\cdot c\cdot a}$

Verallgemeinertes Assoziativgesetz	
Bei Summen dürfen Klammern beliebig gesetzt und weggelassen werden, ohne daß sich der Wert der Summe ändert; z. B. $\boldsymbol{(a+((b+c)+d)=}$ $\boldsymbol{=(a+b)+(c+d)}$	Bei Produkten dürfen Klammern beliebig gesetzt und weggelassen werden, ohne daß sich der Wert des Produkts ändert; z. B. $\boldsymbol{a\cdot((b\cdot c)\cdot d)=(a\cdot b)\cdot(c\cdot d)}$
Verallgemeinertes Distributivgesetz	
Ausmultiplizieren: Eine Summe wird mit einer Zahl multipliziert, indem man jeden Summanden mit dieser Zahl multipliziert und die entstandenen Produkte addiert; z. B. $\boldsymbol{a\cdot(b+c+d+e)=}$ $\boldsymbol{=ab+ac+ad+ae}$	*Ausklammern:* Enthält in einer Summe aus Produkten jedes Produkt denselben Faktor, so kann man diesen Faktor »ausklammern«; z. B. $\boldsymbol{ab+ac+ad+ae=}$ $\boldsymbol{=a(b+c+d+e)}$

Da wegen $a:b=\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}$ eine Division immer durch eine Multiplikation mit dem Kehrwert des Divisors ersetzt werden kann, erhalten wir aus dem verallgemeinerten Distributivgesetz eine merkenswerte Folgerung; nämlich

> **Satz 91.1:** Eine Summe wird durch eine Zahl dividiert, indem man jeden Summanden durch diese Zahl dividiert und die entstandenen Quotienten addiert; z. B.
>
> $\boldsymbol{(a+b+c+d):e=a:e+b:e+c:e+d:e}$ *oder*
>
> $$\boldsymbol{\frac{a+b+c+d}{e}=\frac{a}{e}+\frac{b}{e}+\frac{c}{e}+\frac{d}{e}}$$

Eine besonders wichtige Anwendung finden die verallgemeinerten Rechengesetze beim Zusammenfassen gleichartiger Terme. Dabei nennt man Terme **gleichartig**, wenn sie gleiche Buchstabenfaktoren haben. So sind z. B. $7x$ und $-3x$ gleichartig, ebenso $\frac{4}{3}a^2b$ und a^2b. Nicht gleichartig sind hingegen $3a^2$ und $5a$. Der Zahlenfaktor eines Terms heißt **Koeffizient*** des Terms. Die Terme $7x$, $-\frac{3}{4}a^2b$ und uv haben die Koeffizienten 7 bzw. $-\frac{3}{4}$ bzw. 1.
Mit Hilfe des verallgemeinerten Distributivgesetzes fassen wir nun gleichartige Terme zusammen:

$3x+5x+8x=(3+5+8)x=16x$

$11ab-ab=(11-1)ab=10ab$

* *coefficiens* (lat.) = mitbewirkend. Eingeführt wurde das Wort als Fachausdruck in die Mathematik von François Viète (1540–1603) in seinen *Ad logisticen speciosam notae priores* 1591. Im Deutschen sagt man statt **Koeffizient** gelegentlich auch *Beizahl*.

Mit einiger Übung erspart man sich das Ausklammern der Koeffizienten und addiert diese gleich im Kopf:

$7a + 12a + a = 20a$

Wir merken uns

Satz 92.1: Gleichartige Terme werden addiert, indem man ihre Koeffizienten addiert und das Variablenprodukt beibehält.

Aus einfachen Termen kann man durch Addition umfangreichere Terme aufbauen, z. B.

$3x + (-5) + 7{,}2xy + (-\frac{1}{3}x) + (-13)$.

So wie wir für $a + (-b)$ kurz $a - b$ geschrieben haben, vereinbaren wir diese einfache Schreibweise auch für komplizierte Terme aus mehr als zwei Gliedern. Damit läßt sich der obige Term kurz und übersichtlich schreiben:

$3x - 5 + 7{,}2xy - \frac{1}{3}x - 13$.

Da ein so gebauter Term eigentlich eine Summe ist, nennt man ihn zur Unterscheidung *algebraische Summe*. Vielfach ist dafür auch der Name *Aggregat** im Gebrauch. Wir merken uns

Definition 92.1: Eine Verbindung mehrerer Terme durch Plus- oder Minuszeichen nennt man **algebraische Summe** oder **Aggregat**. Die einzelnen Summanden heißen **Glieder des Aggregats**.

Wegen des Kommutativgesetzes und des Assoziativgesetzes der Addition dürfen die Glieder eines Aggregats *mit ihren Vorzeichen* beliebig umgestellt und zusammengefaßt werden:

$$\begin{aligned} &2x - 3 + 8x + 5 - x = \\ &= 2x + (-3) + 8x + 5 + (-x) = \\ &= 2x + 8x + (-x) + (-3) + 5 = \\ &= 2x + 8x - x - 3 + 5 = \\ &= 9x + 2. \end{aligned}$$

* *grex* (lat.) = Herde, Haufen; *aggregare* (lat.) = beigesellen. LEONARDO VON PISA (um 1170–nach 1240) verwendet das Wort *aggregatum*. Als **Aggregat** im Sinne von Summe erscheint es 1489 im weitverbreiteten Werk *Behende und hubsche Rechenung auff allen kauffmanschafft* des Johannes WIDMANN VON EGER (um 1460–nach 1500), Professor an der 1409 gegründeten Universität von Leipzig. Im Sommer 1486 hielt WIDMANN in seinem Haus als Zusatzveranstaltung zum Lehrprogramm die erste öffentliche Vorlesung über Algebra im deutschen Sprachraum, wofür er von jedem Studenten 2 Gulden (= 42 Silbergroschen [= gr]) verlangte, ein unerhört hoher Betrag, verglichen z. B. mit den 8 gr für die 20 bis 30 Wochen dauernde Vorlesung über die ersten Bücher EUKLIDS. WIDMANN zufolge verdiente ein Maurer 5 gr am Tag, und für 2 Gulden erhielt man ca. 4,5 g reines Gold. Übrigens bekam man 1480 in Sachsen für 4 gr ein Schaf und für 2 gr ein Paar Schuhe. François VIÈTE (1540–1603) benützt in seiner *In artem analyticem Isagoge* (1591) das Wort *adgregatum*. Im *Mathematischen Wörterbuch* von Georg Simon KLÜGEL (1739–1812) von 1803 wird Aggregat in unserem Sinne verwendet.

Beim praktischen Rechnen erspart man sich das Umschreiben in eine Summe und stellt gleich unter Mitnahme des Vorzeichens um:

$2x - 3 + 8x + 5 - x =$
$= 2x + 8x - x - 3 + 5 =$
$= 9x + 2.$

Wir merken uns

> **Satz 93.1:** In einem Aggregat dürfen die Glieder unter Mitnahme ihres Vorzeichens beliebig umgestellt und zusammengefaßt werden.

Beispiel:

$-2\tfrac{1}{4}a - 7b + 9ab + \tfrac{1}{2}a + 3\tfrac{1}{3}b - 5a =$
$= -2\tfrac{1}{4}a + \tfrac{1}{2}a - 5a - 7b + 3\tfrac{1}{3}b + 9ab =$
$= (-2\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2} - 5)a + (-7 + 3\tfrac{1}{3})b + 9ab = -6\tfrac{3}{4}a - 3\tfrac{2}{3}b + 9ab.$

Da die Gesetze der Multiplikation von der gleichen Bauart sind wie die der Addition, gilt auch

> **Satz 93.2:** In einem Produkt dürfen die Faktoren beliebig umgestellt und zusammengefaßt werden.

Mit Hilfe dieses Satzes kannst du die Faktoren in einem Produkt ordnen. Dadurch werden die Terme übersichtlicher und sind leichter zu vergleichen. Für das Ordnen der Faktoren empfiehlt sich die

> **Vereinbarung 93.1:** Zuerst entscheidet man auf Grund der Vorzeichenregeln über das Vorzeichen des Produkts. Dann kommen die Zahlenfaktoren und schließlich die Buchstaben dem Alphabet nach. Für das Endergebnis wird der Wert des Zahlenprodukts ausgerechnet.

Beispiele:

1) $4a \cdot 3b = 3 \cdot 4 \cdot ab = 12ab.$
2) $(-\tfrac{3}{4}) \cdot x \cdot (-y) \cdot (-3\tfrac{1}{3}) = -\tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{10}{3} \cdot xy = -\tfrac{5}{2}xy.$
3) $r \cdot (-2{,}5t) \cdot (-\tfrac{3}{7})s = +\tfrac{5}{2} \cdot \tfrac{3}{7} \cdot rst = \tfrac{15}{14}rst.$

Aufgaben

1. **a)** $(x-2{,}5)+1{,}9$ **b)** $3\frac{1}{7}+(\frac{1}{7}-2u)$

c) $(-\frac{15}{8}+a)-\frac{1}{8}$ **d)** $(5{,}93y-81z)-(5{,}93y-81z)$

e) $(\frac{7}{4}g-2{,}8)-(-\frac{14}{5}+1{,}75g)$

2. **a)** $12\cdot(4\frac{1}{4}x)$ **b)** $(-\frac{3}{4})\cdot r\cdot(-\frac{8}{5})$ **c)** $(2{,}1s)\cdot(-1{,}2)$

d) $(-1)(-3{,}75a)$ **e)** $(-a)(-5)\cdot(-\frac{3}{4})$ **f)** $(-0{,}55c)\cdot(-\frac{28}{33})$

3. **a)** $3a\cdot\dfrac{1}{3a}$ **b)** $(-7)a\cdot\dfrac{1}{a}$ **c)** $7a\cdot\frac{1}{7}$

4. **a)** $(-5)(-x)(-y)$ **b)** $(-8a)(-9b)(+5c)$ **c)** $(-0{,}5r)\cdot 1{,}7s(-3{,}4t)$

5. **a)** $12(-u)v(-2w)$ **b)** $(-1{,}8)(-x)(-0{,}25)y$

c) $(-\frac{2}{3})(+ab)(-18c)$ **d)** $(-1)(+a)(-b)(-c)(+1)$

e) $(-\frac{1}{2})(-x)(-y)(-\frac{2}{3}z)$ **f)** $(+6{,}25)(-uv)(+w)(-4x)(+2y)$

6. **a)** $(-ab):(4(-c))$ **b)** $(-2)(+x)(+z):(7(-y)(-1))$

7. **a)** $\dfrac{(-3)(-m\cdot 27)}{(+4)(-n)(-16)}$ **b)** $\dfrac{(-5)^2(-1{,}4r)(+0{,}6s)}{(-1)^3(0{,}125t)(-4)^2}$

c) $(+xy)(-\frac{2}{7})^2(-z)(+343):[(-\frac{1}{3})^3(-uv)(-243w)]$

8. **a)** $3(0{,}9x-0{,}3)$ **b)** $7(r+s)$ **c)** $(p-q)\cdot 3$

d) $\frac{1}{4}(\frac{2}{7}a-\frac{8}{5}b)$ **e)** $(0{,}5c+\frac{6}{5}d)\cdot 6$ **f)** $32(\frac{3}{2}a+\frac{5}{4}b)$

g) $x(3x-5y)$ **h)** $-5a(\frac{5}{2}a-\frac{3}{7})$ **i)** $(8x+2xz)\frac{1}{2}y$

j) $3\cdot(-2u-5v)$ **k)** $-\frac{5}{6}z(-\frac{7}{15}r+\frac{3}{5}z)$ **l)** $-2x(-\frac{3}{8}tx-\frac{3}{4}sx)$

9. **a)** $3x-4x$ **b)** $7\frac{1}{2}x-x$ **c)** $a+2a-3a$

d) $0{,}1b-0{,}01b$ **e)** $3\frac{5}{6}s+2\frac{1}{6}s$ **f)** $\frac{3}{7}v-\frac{3}{14}v$

g) $\frac{5}{6}xy+\frac{3}{8}xy$ **h)** $10{,}5rs-11{,}5rs$ **i)** $3{,}7uv-uv$

j) $1985abc-1648abc$ **k)** $0{,}003rst-0{,}3rst$ **l)** $-5\frac{4}{5}x^2y-4\frac{1}{5}x^2y$

10. Wende das Distributivgesetz der Division an.

a) $\dfrac{12x-51}{3}$ **b)** $\dfrac{-4{,}9+5{,}6a}{0{,}7}$ **c)** $\dfrac{-1{,}44u-0{,}72}{36}$

11. LEON VON BYZANZ (9. Jh. n. Chr.) hat behauptet, daß $a(bc)=b(ac)=$ $=c(ab)$ sei. Beweise die Richtigkeit dieser Behauptung durch Anwendung der Rechengesetze.

12. Zeige durch Anwendung der Rechenregeln:

a) $abcd = dbca$ **b)** $a(b + c + d) = ab + ac + ad$

13. Schreibe als Summe:

a) $7x - 3y$ **b)** $-2a - 5b$ **c)** $3 - x + y$

d) $-5u + 3v - 9$ **e)** $-1 - 2x - 3y$ **f)** $5a - 6b + 7c - 8d$

14. Schreibe als Summe:

a) $12xy - 3{,}7uv$ **b)** $8 - (a - b)$ **c)** $(3x - 5y) - (2x + 3y)$

d) $(3u + 5v) - (2u - 3v - 1) - 2v$ **e)** $2(x + y) - 3(x - y) - 2(x^2 - y^2)$

15. a) $2x + 7y + 3y + x$ **b)** $2x - 7y + 3y + x$

c) $-2x + 7y - 3y + x$ **d)** $2x - 7y - 3y - x$

e) $-2x + 7y + 3y - x$ **f)** $-2x - 7y - 3y - x$

g) $\frac{2}{3}a + \frac{1}{6}b + 3\frac{1}{3}a + \frac{5}{6}b$ **h)** $\frac{2}{3}a - \frac{1}{6}b + 3\frac{1}{3}a + \frac{5}{6}b$

i) $-\frac{2}{3}a + \frac{1}{6}b - 3\frac{1}{3}a + \frac{5}{6}b$ **j)** $\frac{2}{3}a - \frac{1}{6}b - 3\frac{1}{3}a - \frac{5}{6}b$

k) $-\frac{2}{3}a + \frac{1}{6}b + 3\frac{1}{3}a - \frac{5}{6}b$ **l)** $-\frac{2}{3}a - \frac{1}{6}b - 3\frac{1}{3}a - \frac{5}{6}b$

16. a) $3x - 3{,}2 + 5xy - 2 - x$

b) $8{,}1x^2 - 8{,}1x - 8{,}1 + 2{,}9x + x^2 - 7{,}9$

c) $3ab - 0{,}3a - 0{,}3ab + 3{,}7a + 2{,}3ab$

d) $-4\frac{5}{8}x + 3\frac{1}{2}y + xy - 3\frac{2}{3}x + 1\frac{17}{24}x - xy - 4\frac{3}{4}y$

3.2 Potenzen

Für Produkte mit lauter gleichen Faktoren führt man eine abkürzende Schreibweise ein*:

$a \cdot a =: a^2$, gesprochen »a hoch 2« oder »a Quadrat«

$a \cdot a \cdot a =: a^3$, gesprochen »a hoch 3«

$a \cdot a \cdot a \cdot a =: a^4$, gesprochen »$a$ hoch 4«

....

* Um kenntlich zu machen, was das neue Symbol ist, verwendet man gern ein Gleichheitszeichen in Verbindung mit einem Doppelpunkt, der entweder links oder rechts vom Gleichheitszeichen stehen kann. Dabei bedeutet $A := B$, daß A das neue Zeichen, die neue Schreibweise für das schon bekannte B ist. Umgekehrt bedeutet $C =: D$, daß das neue D durch das schon bekannte C erklärt wird.
Das Wort **Symbol** kommt vom griechischen σύμβολον (sýmbolon) = *Erkennungszeichen, vereinbartes Zeichen.* Ursprünglich bezeichnete man damit das dem Gastfreunde übergebene abgebrochene Stück einer Sache, z. B. eines Rings, eines Täfelchens, das mit seinem Bruchrand genau in das zurückbehaltene Stück paßte, so daß man durch *Zusammenlegen* (= συμβάλλειν [symbállein]) den rechtmäßigen Besitzer wieder erkennen konnte.

Macht man so weiter, so kommt man zu

Definition 96.1: Für das Produkt $a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ aus n gleichen Faktoren a schreibt man kurz a^n, gesprochen »a hoch n«, und nennt es **n-te Potenz** von a; kurz:

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}, \quad n \in \{2, 3, 4, \ldots\}.$$

Man sagt: a wird mit n potenziert. a heißt **Grundzahl** oder **Basis**, n heißt **Hochzahl** oder **Exponent**.*

Da n die Anzahl der Faktoren im Produkt angibt, gilt die Definition von a^n nur für natürliche Zahlen, die größer als 1 sind. Wir sind oben nämlich von $a \cdot a = a^2$ zu immer höheren Potenzen fortgeschritten. Ein Schritt zurück brächte rein formal die Zeile $a = a^1$. Das liefert eine naheliegende Ergänzung der Potenzdefinition, die sich im folgenden als zweckmäßig erweisen wird:

Definition 96.2: $a^1 := a$

In Termen, die aus Potenzen, Produkten und Summen bestehen, muß man wissen, in welcher Reihenfolge die Rechnung auszuführen ist. So ist z. B. unklar, wie $3 \cdot 5^2$ zu verstehen ist:
Geht die Multiplikation vor oder das Potenzieren?
Geht die Multiplikation vor, so muß man $3 \cdot 5^2 = 15^2 = 225$ rechnen.
Geht hingegen das Potenzieren vor, so ergibt sich $3 \cdot 5^2 = 3 \cdot 25 = 75$.
Durch Setzen von Klammern kann man die Anweisung eindeutig machen; im ersten Fall schriebe man $(3 \cdot 5)^2$, im zweiten Fall $3 \cdot (5^2)$.
Um Klammern zu sparen, hält man sich an die 1873 von Ernst SCHRÖDER (1841–1902) in seinem *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studirende* eingeführte

Vereinbarung 96.1: **1.** »Potenz vor Punkt vor Strich.«
2. »Klammern haben absoluten Vorrang.«

* DIOPHANT (um 250 n. Chr.) verwendet für die 2. Potenz einer Unbekannten neben τετράγωνος (siehe Seite 66) bevorzugt δύναμις (dýnamis) = *Kraft*, das bereits bei HERON (wirkte um 62 n. Chr. in Alexandria) so belegt ist, wogegen HIPPOKRATES von Chios (2. Hälfte des 5. Jh.s v. Chr.) damit die Quadratzahl bezeichnet hatte. Raffaele BOMBELLI (1526–1572) verwendet 1572 in seiner *L'Algebra* dafür das italienische Wort *potenza*. Im 18. Jh. setzt sich *potentia*, zu deutsch **Potenz**, als allgemeine Bezeichnung für a^n gegenüber den bis dahin gebräuchlichen Wörtern wie *potestas* (VIÈTE) und *dignità* (TARTAGLIA und BOMBELLI) durch. Leonhard EULER (1707–1783) versucht in seiner *Vollständigen Anleitung zur Algebra* 1770 die Verdeutschung *Macht*, die sich aber nicht verbreitete. **Basis** ist das griechische Wort βάσις, das *Grundlage, Fundament* bedeutet. Das Wort **Exponent** wurde 1544 von Michael STIFEL (1487?–1567) in seiner *Arithmetica integra* geprägt; *exponere* (lat.) bedeutet *herausstellen*. Auch die Schreibweise für Potenzen hat eine lange Geschichte. Das heute übliche a^2, a^3 usw. geht auf René DESCARTES (1596–1650) zurück, und zwar auf die 1628 entstandenen und erst 1701 erschienenen *Regulae ad directionem ingenii*. Potenzen mit einem allgemeinen Exponenten n kommen jedoch erst bei Isaac NEWTON (1643–1727) vor.

Beispiele:

1) $4 + 3 \cdot 5^2 = 4 + 3 \cdot 25 = 4 + 75 = 79.$
2) $(4 + 3) \cdot 5^2 = 7 \cdot 5^2 = 7 \cdot 25 = 175.$
3) $4 + (3 \cdot 5)^2 = 4 + 15^2 = 4 + 225 = 229.$
4) $(4 + 3 \cdot 5)^2 = (4 + 15)^2 = 19^2 = 361.$
5) $((4 + 3) \cdot 5)^2 = (7 \cdot 5)^2 = 35^2 = 1225.$

Beachte: Manche Taschenrechner halten sich nicht an diese Vereinbarung. Studiere also jeweils genau die Gebrauchsanweisung!

Beim Umgang mit Potenzen passieren dem Anfänger manchmal folgende zwei Fehler:

1. Fehler: Er verwechselt a^3 mit $a \cdot 3$. Aber es gilt

$a^3 = a \cdot a \cdot a$ und $a \cdot 3 = 3 \cdot a = a + a + a$, zum Beispiel
$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ und $5 \cdot 3 = 3 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 = 15.$

2. Fehler: Er rechnet $a^3 - a^2 = a$, z.B. $7^3 - 7^2 = 7$. Dabei läßt sich $a^3 - a^2$ nicht weiter berechnen, $7^3 - 7^2$ aber zu $343 - 49 = 294$ ausrechnen, und das ist nicht 7.

Wie geht man aber richtig mit Potenzen um? Vorläufig genügen uns drei Rechenregeln:

1) Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis

$2^3 \cdot 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7$

Bei der Umformung war es nicht wesentlich, daß 2 die Basis war; also gilt für jede Basis a

$a^3 \cdot a^4 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^7.$

Genauso können wir allgemein vorgehen:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \ldots \cdot a)}_{m \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ Faktoren}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n \text{ Faktoren}} = a^{m+n}.$$

Also gilt

> **Satz 97.1:** Potenzen gleicher Basis werden miteinander multipliziert, indem man die Exponenten addiert und die Basis beibehält; kurz $\boldsymbol{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$ $(m, n \in \mathbb{N})$.

Beispiele:

1) $x^8 \cdot x^{19} = x^{8+19} = x^{27}.$
2) $z \cdot z^2 = z^1 \cdot z^2 = z^{1+2} = z^3.$
3) $a^2 \cdot a^3 \cdot a^4 = a^{2+3} \cdot a^4 = a^{(2+3)+4} = a^{2+3+4} = a^9.$

2) Potenzieren einer Potenz

$(2^3)^4 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 2^{3+3+3+3} = 2^{12}.$

Auch hier war es nicht wesentlich, daß 2 die Basis war; also gilt für jede Basis a

$(a^3)^4 = a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 = a^{3+3+3+3} = a^{12}.$

Genauso können wir allgemein vorgehen:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ Faktoren } a^m} = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ Summanden } m}} = a^{n \cdot m} = a^{m \cdot n}.$$

Somit gilt

> **Satz 98.1:** Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten miteinander multipliziert und die Basis beibehält; kurz
>
> $$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad (m, n \in \mathbb{N}).$$

Beispiele:

1) $(x^2)^3 = x^{2 \cdot 3} = x^6.$

2) $((z^3)^5)^7 = (z^{3 \cdot 5})^7 = z^{(3 \cdot 5) \cdot 7} = z^{3 \cdot 5 \cdot 7} = z^{105}.$

Beachte: $(x^2)^3 \neq x^{2^3}$. Auf der linken Seite wird nämlich die Basis x^2 mit 3 potenziert, und das ergibt x^6. Auf der rechten Seite hingegen wird die Basis x mit dem Exponenten 2^3 potenziert; da x^{2^3} die Kurzschreibweise für $x^{(2^3)}$ ist, erhält man x^8.

3) Potenzieren eines Produkts bzw. eines Quotienten

Betrachten wir gleich den allgemeinen Fall:

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ Faktoren } (a \cdot b)} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ Faktoren } a} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{n \text{ Faktoren } b} = a^n \cdot b^n$$

> **Satz 98.2:** Ein Produkt wird potenziert, indem man jeden Faktor potenziert und die entstandenen Potenzen miteinander multipliziert; kurz
>
> $$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Offensichtlich gilt dieser Satz auch für Produkte aus mehr als zwei Faktoren, z.B.: $(a \cdot b \cdot c \cdot d)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n \cdot d^n$.

Beispiele:

1) $(3x)^4 = 3^4 \cdot x^4 = 81x^4$.
2) $(0{,}3 \cdot x^2)^4 = 0{,}3^4 \cdot (x^2)^4 = 0{,}0081x^8$.

Für Brüche erhalten wir analog:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ Faktoren } \frac{a}{b}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ Faktoren } a}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ Faktoren } b}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Satz 99.1: Ein Bruch wird potenziert, indem man Zähler und Nenner potenziert und die Zählerpotenz durch die Nennerpotenz dividiert; kurz

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0 \wedge n \in \mathbb{N}).$$

Beispiele:

1) $\left(\frac{3}{2}xy^3\right)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot x^4 \cdot (y^3)^4 = \frac{3^4}{2^4}x^4y^{12} = \frac{81}{16}x^4y^{12}$.
2) $\left(\frac{3ax^2}{4b^3y}\right)^3 = \frac{(3ax^2)^3}{(4b^3y)^3} = \frac{3^3a^3(x^2)^3}{4^3(b^3)^3y^3} = \frac{27a^3x^6}{64b^9y^3}$.

Aufgaben

1. Berechne die Quadrate der Zahlen von 1 bis 25 und lerne sie auswendig.
2. Wie lauten die dritten Potenzen der Zahlen von 1 bis 10?
3. **a)** $4^3 + 25^2 - 14^2 - 7^3$ **b)** $9^3 - 9^2 + 5^3 - 5^2$
   c) $6^3 - 18^2 - 21^2 + 4^3$ **d)** $-23^2 + 8^3 - 16^2 - 3^3$
4. Berechne die Potenzen von 2 bis zum Exponenten 10 und lerne sie auswendig.
5. Berechne die Potenzen von 10 bis zum Exponenten 6.
6. Berechne die Potenzen a^1, a^2, a^3, a^4 für $a = 0; \frac{1}{2}; 1; 2$.
7. Berechne und vergleiche:
   a) 2^3 und 3^2 **b)** 3^5 und 5^3
   c) $(2+5)^2$ und $2^2 + 5^2$ **d)** $(17-12)^2$ und $17^2 - 12^2$
   e) $(3 \cdot 5)^2$ und $3 \cdot 5^2$ **f)** $(12:4)^2$ und $12:4^2$

8. a) Berechne und vergleiche: **1)** $(2^2)^3$ und $(2^3)^2$ **2)** $(3^2)^3$ und $(3^3)^2$
b) Was kann man allgemein von $(a^m)^n$ und $(a^n)^m$ aussagen? Beweis!

9. a) $(\frac{1}{4})^3$ **b)** $(-\frac{2}{3})^2$ **c)** $(1\frac{2}{5})^4$ **d)** $(-\frac{36}{27})^5$ **e)** $0{,}3^2$
f) $-0{,}3^3$ **g)** $0{,}3^4$ **h)** $0{,}03^2$ **i)** $-2{,}5^2$ **k)** $0{,}25^2$

•**10. Rechenvorteil:** $3^8 = (3^4)^2 = 81^2 = 6561$
Berechne in entsprechender Weise:
a) 3^6 **b)** 4^4 **c)** 5^4 **d)** 2^{12} **e)** 2^{20}

11. Zerlege unter Verwendung der Potenzschreibweise folgende Zahlen in ihre Primfaktoren:
a) 512 **b)** 432 **c)** 1400 **d)** 1568
e) 1089 **f)** 1352 **g)** 1331 **h)** 3636

•**12. Rechenvorteil:**
$28 \cdot 75 = (2^2 \cdot 7) \cdot (3 \cdot 5^2) = 3 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 5)^2 = 21 \cdot 100 = 2100$
Berechne ebenso:
a) $12 \cdot 65$ **b)** $24 \cdot 375$ **c)** $625 \cdot 48$
d) $25 \cdot 24 \cdot 15$ **e)** $225 \cdot 64 \cdot 125$ **f)** $12 \cdot 175 \cdot 14$

13. a) $x^3 \cdot x^5$ **b)** $2a^2 \cdot 3a$ **c)** $u \cdot 5u \cdot 2u^3$
d) $\frac{3}{4} \cdot b^5 \cdot \frac{8}{9} \cdot b^2$ **e)** $(ab)^2 \cdot a^3$ •**f)** $3xy^2 \cdot (5xy)^2$
•**g)** $2p^3 \cdot 3(pq^2)^2$ •**h)** $(3u^2v^3)^2 \cdot (2u^2v^3)^3$:**i)** $[2a(3ab^2)^3]^2 \cdot (4a^2b)^2$

14. a) $x(x+y)$ **b)** $v(u-v)$ **c)** $(2a+b) \cdot a^2$
•**d)** $3b^4(5b-2c^2)$ •**e)** $xy^2(2-3x^4y)$ •**f)** $(a^2b+bc^2+1)a^3c$

:**15.** Für welche natürlichen Zahlen a und b gilt $a^b = a \cdot b$?

16. Zehnerpotenzschreibweise. Der besseren Lesbarkeit wegen schreibt man oft große Zahlen als Produkt aus einer Zahl zwischen 1 und 10 und einer Zehnerpotenz. Für 1 300 000 schreibt man also lieber das Produkt $1{,}3 \cdot 10^6$.
a) Schreibe die folgenden Zahlen mit Hilfe einer Zehnerpotenz:
1) 7 840 000 **4)** 80 500 000
2) 100 000 **5)** 724
3) 3020 **6)** 17 Billionen
b) Schreibe ohne Zehnerpotenz:
1) $1{,}03 \cdot 10^9$ **4)** $1{,}35 \cdot 10^6$
2) $3 \cdot 10^8$ **5)** $5{,}05 \cdot 10^5$
3) $1{,}5 \cdot 10^{11}$ **6)** $8{,}07 \cdot 10^5$

17. a) $(-\frac{4}{5}x^2y^3)^2$ **b)** $(0{,}02ab^3)^5$ **c)** $(-1\frac{1}{2}r^4s^3)^3$

18. a) $\frac{1}{4} - \frac{2}{3} \cdot (\frac{1}{2})^2$ **b)** $(\frac{1}{4} - \frac{2}{3}) \cdot (\frac{1}{2})^2$ **c)** $\frac{1}{4} - (\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2})^2$
d) $(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2})^2$ **e)** $((\frac{1}{4} - \frac{2}{3}) \cdot \frac{1}{2})^2$ **f)** $(\frac{1}{4} - \frac{2}{3})^2 \cdot \frac{1}{2}$

19. Bestimme die Werte der folgenden Potenzen:

a) $(-1)^2$ **b)** $(-1)^3$ **c)** $(-1)^4$ **d)** $(-1)^5$
e) $(-1)^8$ **f)** $(-1)^{17}$ **g)** $(-1)^{103}$ **h)** $(-1)^{1234}$

i) Welche Werte können Potenzen mit der Grundzahl -1 annehmen? Bei welchen Hochzahlen treten die verschiedenen Potenzwerte auf?

20. Berechne:

a) $(-0{,}1)^2$ **b)** $(-10)^2$ **c)** $(-0{,}1)^3$ **d)** $(-10)^3$
e) $(-0{,}01)^2$ **f)** $(-0{,}01)^3$ **g)** $(-100)^2$ **h)** $(-100)^3$

21. a) $(-a)^2$ **b)** $(-a)^5$ **c)** $(-a)^{32}$ **d)** $(-a)^1$
e) $(-a)^{2n}, n \in \mathbb{N}$ **f)** $(-a)^{2n+1}, n \in \mathbb{N}$ **g)** $(-a)^{2n-1}, n \in \mathbb{N}$

22. a) $(-c)^4 - c^4$ **b)** $(-c)^5 + (-c)^5$ **c)** $(-ab)^3$ **d)** $(-ab)^4$
e) $-(-ab)^4$ **f)** $[-(-ab)]^4$ **g)** $-(-uv)^7$ **h)** $-(-uv^7)$

23. a) $-(-x)^2$ **b)** $-(-x)^3$ **c)** $[-(-x)]^2$ **d)** $[-(-x)]^3$

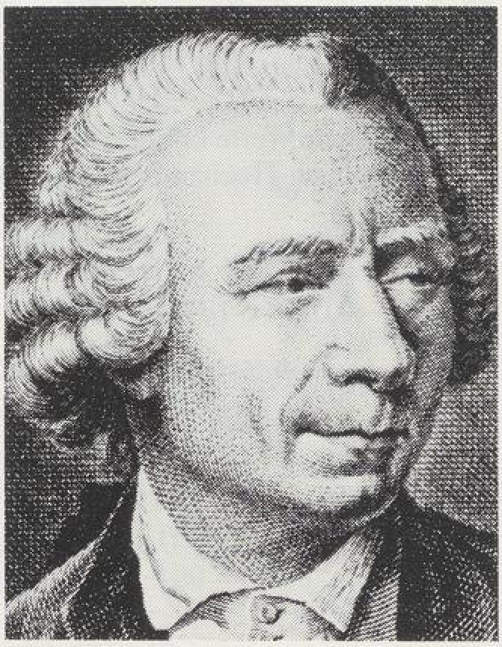
24. a) $(-a)^2(-b)^3(-c)^4$ **b)** $(-a)^3(-b)^2(-c)^3$
c) $(-\frac{1}{5})^3(-x)^2(-y)^4$ **d)** $(-8a)^4(-\frac{1}{8}a)^3(-8a)^2$
• **e)** $-4a(-\frac{3}{4}a)^2 \cdot (\frac{2}{3}a)^3$: **f)** $(-0{,}5x)^3 \cdot 2{,}7x \cdot (-3{,}4x)^2$

25. a) $1+(-1)^1$ **b)** $1+(-1)^2$ **c)** $1+(-1)^3$ **d)** $1+(-1)^4$
e) $1-(-1)^1$ **f)** $1-(-1)^2$ **g)** $1-(-1)^3$ **h)** $1-(-1)^4$

3.3. Umgang mit Klammern

Der Term $(3x+2y-5)-(2y-5+3x)$ läßt sich zu 0 vereinfachen, weil Minuend und Subtrahend gleich sind, wie man durch Umordnen des Subtrahenden erkennt. Schwieriger ist es, wenn man einen Term wie $(3x+2y-5)-$ $-(-8x+3y-1)$ vereinfachen will. Die Klammern lassen sich nicht vereinfachen, und dennoch hat man das Gefühl, daß man diesen Term auch einfacher schreiben kann. Tatsächlich geht es auch. Die dazu nötigen Hilfsmittel erarbeiten wir uns in diesem Kapitel.

Es hat sehr lange gedauert, bis sich Klammern als Zeichen für das Zusammenfassen durchgesetzt haben. Zum erstenmal wurden runde Klammern von Michael Stifel (1487?–1567) verwendet, als er in seinem Handexemplar seiner *Arithmetica integra* eine Randbemerkung machte. Bei Niccolò Tartaglia (1499–1557) erschienen sie 1556 in seinem *General trattato di numeri, et misure* im Druck. Wichtig wurden Zusammenfassungszeichen aber erst, als man allgemein mit Buchstaben rechnen wollte. François Viète (1540–1603) faßte 1593 zusammengehörige Ausdrücke durch eckige und geschweifte Klammern zusammen. Viele Mathematiker hatten das Zusammengehören durch Unterstreichen ausgedrückt. René DESCARTES (1596–1650) führte statt dessen 1637 das Überstreichen ein, das durch seine Schüler allgemeine Verbreitung fand; man schrieb also $\overline{7+3}:5$ an Stelle des heutigen $(7+3):5$. Da aber für die Druckereien Klammern bequemer zu setzen waren als Überstreichungen, setzten sie sich immer mehr durch. Leonhard EULER (1707–1783) verwandte 1770 in seiner *Vollständigen Anleitung zur Algebra* zum erstenmal das deutsche Wort *Klammer*.



1753

Abb. 102.1 Leonhard EULER (15.4.1707 Basel – 18.9.1783 St. Petersburg)

3.3.1 Rechenzeichen und Vorzeichen

Wir erinnern daran, daß die Subtraktion zweier Terme nichts anderes ist als die Addition des Gegenterms:

$$a-b=a+(-b).$$

Das Rechenzeichen Minus auf der linken Seite verwandelt sich dabei zum Vorzeichen Minus auf der rechten Seite. Das Vorzeichen Plus bei a lassen wir wie üblich weg.
Stehen vor einem Term mehrere Vorzeichen, so kann man sie immer mit der Vorzeichenregel auf eines reduzieren; nämlich

$$+(+a)=+a=a \qquad -(+a)=-a$$
$$+(-a)=-a \qquad -(-a)=+a=a.$$

Man kann damit auch ganze Vorzeichenserien abbauen:

$$\begin{aligned}-(-(+(-(+(-a)))))&=-(-(+(-(-a))))=\\&=-(-(+(+a)))=\\&=-(-(+a))=\\&=-(-a)=\\&=a.\end{aligned}$$

Wir haben die Serie dabei von innen nach außen abgebaut. Genausogut könnte man sie auch von außen nach innen abbauen.

Aufgaben

1. Reduziere auf ein Vorzeichen:
   a) $+(+3a)$ b) $-(-\frac{4}{3}b)$
   c) $-(+xyz)$ d) $+(-4ab)$
   e) $-(+(-7xy))$ f) $-(-(-(-(+(-13u)))))$

2. Reduziere auf ein Vorzeichen:
   a) $+(a-b)$ b) $-(-(a-b))$ c) $-(+(-(a-b)))$

3. Du erinnerst dich sicher:
   - Malpunkte in Produkten dürfen vor Variablen und Klammern weggelassen werden, z.B. $3 \cdot a \cdot (x-y) = 3a(x-y)$.
   - Das Pluszeichen bei gemischten Zahlen kann entfallen, also $1+\frac{3}{4} = 1\frac{3}{4}$.
   - Das Pluszeichen als Vorzeichen am Anfang schreibt man nicht, z.B. $+2ab+5a-b = 2ab+5a-b$.

   Was versteht man nun eigentlich unter dem Term $-1\frac{1}{3}b$?
   Welche der folgenden Vorschläge hältst du für richtig:
   a) $(-1)\cdot\frac{1}{3}\cdot b$ b) $-(1+\frac{1}{3})\cdot b$
   c) $-1+\frac{1}{3}\cdot b$ d) $(-1-\frac{1}{3})\cdot b$
   e) $(-1+\frac{1}{3})\cdot b$ f) $-(1+\frac{1}{3}\cdot b)$?

3.3.2 Plusklammern

Steht in einem Aggregat vor einer Klammer ein Pluszeichen, so spricht man kurz von einer **Plusklammer**, z.B. $3x+(7y-5x+8)$. Weil es üblich ist, am Anfang keine Pluszeichen zu schreiben – denke etwa daran, daß $3+5$ auch als $+3+5$ geschrieben werden kann – so ist auch eine am Anfang stehende Klammer eine Plusklammer: $(3x+5)+8x$.
Diese Plusklammern wollen wir nun beseitigen. Dabei hilft uns das verallgemeinerte Assoziativgesetz. Weil es nur von Summen handelt, müssen wir gegebenenfalls den Inhalt der Plusklammer als Aggregat, d.h. als algebraische Summe, betrachten und dann das verallgemeinerte Assoziativgesetz anwenden.

Beispiel:
$$\begin{aligned} a+(-b-c+d) &= a+((-b)+(-c)+d) = \\ &= a+(-b)+(-c)+d = \\ &= a-b-c+d. \end{aligned}$$

Untersuchen wir das vorgeführte Beispiel auf das Wesentliche, so erkennen wir

Satz 104.1: In einem Aggregat kann eine Plusklammer mitsamt ihrem Plusrechenzeichen weggelassen werden, ohne daß sich der Wert des Aggregats ändert. Die Rechenzeichen in der Klammer bleiben erhalten. Falls vor dem ersten Glied in der Klammer kein Zeichen steht, so muß ein Plusrechenzeichen gesetzt werden; kurz:
Plusklammern können weggelassen werden, Rechenzeichen bleiben.

Wenn man bedenkt, daß der Inhalt der Plusklammer ein Aggregat ist, dann läßt sich dieser Satz auch noch anders ausdrücken, nämlich:

Ein Aggregat wird addiert, indem man jedes Glied des Aggregats einzeln addiert.

Nach Satz 104.1 kann man also Plusklammern an beliebiger Stelle in einem Aggregat weglassen. Umgekehrt kann man sie demnach an beliebiger Stelle setzen! Wir merken uns

Satz 104.2: Ein Aggregat ändert seinen Wert nicht, wenn man beliebig viele Glieder in einer Plusklammer zusammenfaßt und dabei ihre Rechenzeichen beibehält, z. B.

$$a+b-c+d-e-f=a+(b-c+d)+(-e-f).$$

Nun können wir endlich das eingangs angeführte Aggregat vereinfachen:

$$\begin{aligned}3x+(7y-5x+8) &= 3x+7y-5x+8= \\ &= 7y+3x-5x+8= \\ &= 7y+(3x-5x)+8= \\ &= 7y-2x+8.\end{aligned}$$

Aufgaben

1. **a)** $5a+(3b+7a)$ **b)** $(5a+3b)+7a$
c) $5a+(3b-7a)$ **d)** $-5a+(-3b+7a)$
e) $(-5a+3b)-7a$ **f)** $-5a+(-3b-7a)$

2. **a)** $(2x+4y)+(6x+4y)$ **b)** $(2x-4y)+(-6x+4y)$
c) $(-2x+4y)+(6x-4y)$ **d)** $(-2x-4y)+(-6x-4y)$
e) $2x+(-4y+6x-4y)$ **f)** $-2x+(4y-6x)-4y$

3. a) $3a + (9x + 7a) + (15a + 11x)$
   b) $17b + (15a + 9b) + 2a + (11a + b)$
   c) $14x + (20a + 7b + 4x) + (9x + 13a + 31b)$
   d) $11a + (13b + (12a + 19b)) + ((4a + 27b) + 14a)$

4. $(9 + 11b + 13c) + (15b + 17 + 19c) + (21c + 23b + 25)$

5. $12x + (23x + 27y) + (-29y + 3z - 4u) + (43z + 47u - 59x) +$
   $+ (-43u - 7x - 2y) + (-19x + 4y - 46z)$

•6. $2 + x + (x + (y + 2) + (x + 2)) + (((x + 2) + 2) + 2)$

•7. $n + 1 + (r + 1) + ((n + 1) + (r + 1)) + (2 + (2n + 1) + (2r + 1))$

•8. $(-2 + x) + (1 - x + ((1 - x) + (-1 + x))) + ((1 - x) + (x + 1))$

9. a) Wie lautet die Quersumme* q der Zahl $10 \cdot x + y$; $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $y \in \{0; 1; 2; 3; 4; \ldots ; 9\}$?
   b) Warum sind alle Zahlen der Form $10 \cdot x + (9 - x)$ mit $x \in \{0; 1; 2; \ldots; 9\}$ durch 9 teilbar?
   •c) Sind auch alle Zahlen der Form $100 \cdot x + (99 - x)$ mit $x \in \{0; 1; 2; \ldots; 99\}$ durch 9 teilbar?
   :d) Welche gemeinsamen Teiler haben alle Zahlen aus **c)**?

3.3.3 Minusklammern

Steht in einem Aggregat vor einer Klammer ein Minuszeichen, so spricht man kurz von einer **Minusklammer**, z. B. $3x - (7y - 5x + 8)$.
Diese Minusklammer wollen wir nun beseitigen. In Satz 75.1 haben wir gezeigt, daß $-a = (-1) \cdot a$ ist. Setzen wir an Stelle von a ein Aggregat, dann erhalten wir z. B.

$$-(b - c - d + e) = (-1) \cdot (b - c - d + e) = (-1) \cdot (b + (-c) + (-d) + e).$$

Mit Hilfe des Distributivgesetzes ergibt sich für die rechte Seite

$$(-1) \cdot b + (-1) \cdot (-c) + (-1) \cdot (-d) + (-1) \cdot e = -b + c + d - e.$$

Also gilt:

$$-(b - c - d + e) = -b + c + d - e.$$

Mit dieser Erkenntnis können wir nun auch Minusklammern im Innern eines Aggregats beseitigen:

$$\begin{aligned} a - (b - c - d + e) &= a + [-(b - c - d + e)] = \\ &= a + (-1) \cdot (b - c - d + e) = \\ &= a + (-b + c + d - e) = \\ &= a - b + c + d - e. \end{aligned}$$

* Das bequeme Fachwort **Quersumme** scheint erst im 19. Jh. aufgekommen zu sein.

Weil sich unsere Überlegungen auf jedes Aggregat übertragen lassen, gilt:

Satz 106.1: In einem Aggregat kann man, ohne daß sich der Wert des Aggregats ändert, eine Minusklammer mitsamt ihrem Minuszeichen weglassen, wenn man alle Rechenzeichen in der Klammer ändert, d. h. Pluszeichen durch Minuszeichen und Minuszeichen durch Pluszeichen ersetzt. Falls vor dem ersten Glied in der Klammer kein Zeichen steht, so muß ein Minuszeichen gesetzt werden;
kurz: **Minusklammern dürfen weggelassen werden, wenn alle Rechenzeichen geändert werden.**

Beispiel:

$$3x-(7y-5x+8)=3x-7y+5x-8=8x-7y-8.$$

Wenn man bedenkt, daß der Inhalt der Minusklammer ein Aggregat ist, dann läßt sich dieser Satz auch noch anders ausdrücken, nämlich:

Ein Aggregat wird subtrahiert, indem man jedes Glied des Aggregats subtrahiert.

Beispiel:

$$\begin{aligned}3x-(7y-5x+8)&=3x-7y-(-5x)-8=\\&=3x-7y+5x-8=\\&=8x-7y-8.\end{aligned}$$

Nach Satz 106.1 kann man also Minusklammern an beliebigen Stellen in einem Aggregat weglassen, wenn man alle Rechenzeichen in der Klammer ändert. Umgekehrt kann man demnach Minusklammern an beliebigen Stellen setzen, wenn man die Rechenzeichen bei den Gliedern ändert, die in die Minusklammer kommen. Wir haben damit

Satz 106.2: Ein Aggregat ändert seinen Wert nicht, wenn man beliebig viele Glieder in einer Minusklammer zusammenfaßt und dabei alle Rechenzeichen ändert, z. B.

$$\boldsymbol{a+b-c+d-e-f=a-(-b+c-d)-(e+f)}.$$

Wie man mit diesem Satz arbeitet, zeigen wir an folgendem

Beispiel:

$$\begin{aligned}-(-2a+3b)-(5b+8a)&=2a-3b-5b-8a=\\&=(2a-8a)-(3b+5b)=\\&=-6a-8b.\end{aligned}$$

Aufgaben

1. a) $5a-(3b+7a)$ **b)** $5a-(3b-7a)$
c) $5a-(-3b+7a)$ **d)** $5a-(-3b-7a)$

2. a) $(2x-4y)-(6x-4y)$ **b)** $(2x+4y)-(6x+4y)$
c) $(2x+4y)-(6x-4y)$ **d)** $(-2x-4y)-(6x-4y)$
e) $(-2x+4y)-(-6x-4y)$ **f)** $-2x-(4y-6x)-4y$

3. a) $3a-(9x+7a)-(-4a-11x)$
b) $17b-(15a-9b)-2a+(-17a-26b)$
c) $14x-(-20a+7b-4x)-(-9x+19a+17b)+6x$
d) $11a+(13b+(12a-19b))-((4a-17b)+19a)$

4. $(9-11b+13c)-(15b+17-19c)-(-21c-26b+18)$

5. $12x-(23x-27y)-(-29y+3z+4u)+(-43z-47u-59x)-$
$-(-51u-16x+56y)-(7z+x)$

6. a) $\frac{5}{3}+a-(\frac{1}{6}-2\frac{1}{2}a)$
b) $-\frac{2}{3}b+\frac{1}{2}a+3\frac{1}{3}c-(-c-1\frac{1}{2}b)$
c) $-(-a+7\frac{1}{2}-4\frac{2}{5})-(6\frac{3}{10}+a-9\frac{2}{5})$
d) $(5{,}7-b)-(a+3{,}6)-(9{,}6-b)+(2{,}4+a)$

7. a) $-(-a+\frac{7}{3}b-21c+9{,}05)+(2\frac{1}{3}b-9{,}5)$
b) $-(-(-3{,}5u+5{,}5v-7w))-(3{,}5u-5{,}5v-7w)$

8. a) $(-\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y-2)-(-\frac{3}{10}x+\frac{4}{5}y-\frac{5}{2})-\frac{23}{6}x$
b) $(\frac{2}{3}a-1-\frac{7}{11}b)-(-\frac{1}{3}a-\frac{5}{11}b)-(1-\frac{10}{11}b)$
c) $(\frac{1}{5}r-\frac{5}{2}s-3)-(-\frac{1}{10}r+\frac{4}{5}s-\frac{11}{2})$

9. a) $(3x^2-2x+1)-(-2x^2+4x-6)$
b) $(7x^3-3x+2)-(-4x+5x^3+3)$
c) $(-3x^3+2x-3)-(4x^2-5-2x)-6x^3$
d) $-(6x^3-2x^2+5)-(3x^3+7x^2-2)$

10. a) $(\frac{3}{4}ab-\frac{5}{3}a^2b+1)-(-\frac{1}{4}ab+\frac{2}{3}a^2b)+(-ab+\frac{7}{3}a^2b)$
b) $(\frac{5}{2}a^2+\frac{4}{3}a-7)-(a^2+\frac{1}{3}a-5)-(\frac{3}{2}a^2+a-3)$

3.3.4 Faktor bei der Klammer

Bisher haben wir gelernt, wie man bei Aggregaten vom Typ $a+(b-c)-$ $-(e+f-g)$ die Klammern auflöst. Was aber, wenn vor einer dieser Klammern noch ein Faktor steht? Jetzt muß doch auch die Regel »Punkt vor Strich« berücksichtigt werden. Die einfachsten Fälle sind $a+b(c+d-e)$

und $a - b(c + d - e)$. Die schwierigeren Fälle, wo beide Faktoren Klammern sind, wie z.B. $a + (b - c)(d - e + f)$, betrachten wir erst in **7.1**.
Nun zum ersten Fall:
Wegen der Regel »Punkt vor Strich« können wir eine zusätzliche Klammer setzen, ohne daß sich der Wert des Aggregats ändert:

$$a + b(c + d - e) = a + (b(c + d - e)).$$

Wir wenden auf den Inhalt der roten Klammer das Distributivgesetz an:

$$a + (b(c + d - e)) = a + (bc + bd - be).$$

Nach unserer Klammerregel (Satz 104.1) können wir die rote Plusklammer einfach weglassen. Damit haben wir:

$$a + b(c + d - e) = a + bc + bd - be.$$

Den zweiten Fall können wir analog behandeln:

$$\begin{aligned} a - b(c + d - e) &= a - (b(c + d - e)) = && \text{Punkt vor Strich} \\ &= a - (bc + bd - be) = && \text{Distributivgesetz} \\ &= a - bc - bd + be. && \text{Satz 106.1} \end{aligned}$$

Vergleichen wir in beiden Fällen das gegebene Aggregat mit dem Ergebnis der Umformungen, so erkennen wir

> **Satz 108.1:** Steht in einem Aggregat bei einer Klammer ein Faktor, so multipliziert man jedes Glied in der Klammer mit diesem Faktor unter Berücksichtigung der Vorzeichen.
>
> $$\boldsymbol{a + b(c + d - e) = a + bc + bd - be.}$$
> $$\boldsymbol{a - b(c + d - e) = a - bc - bd + be.}$$

Beispiele:

1) $3x - 5y(2 - 2x + 3y) + 2x(-6 + x - 5y) =$
$= 3x - 10y + 10xy - 15y^2 - 12x + 2x^2 - 10xy =$
$= 2x^2 - 9x - 15y^2 - 10y.$

2) $5 \cdot (\frac{1}{10}ab - \frac{2}{5}b) - \frac{3}{2}a(-\frac{5}{6}b + 1\frac{1}{3}) + b(2 - \frac{7}{4}a) =$
$= \frac{1}{2}ab - 2b + \frac{5}{4}ab - 2a + 2b - \frac{7}{4}ab =$
$= -2a.$

Aufgaben

1. **a)** $3a + 5(2a - b)$ **b)** $x - 3(1 - x)$
c) $3 + x(1 - x)$ **d)** $12z^2 - 3z(-2 + 4z)$

2. $6(2a + 3b - 7c) + 7(4a - 3b + 7c) - 8(5a - 4b + 3c)$

3. $15(a+b-3)-6(3a-2b)+7(4-3b)-8(5-2a)$

4. a) $a(a-2b)-b(2a-b)$ b) $a(2a+3b)-b(2a+5b)$

5. $x(x-1)-3x^2+4x(2x+1)-6(3x+2)$

6. $15a(3x-4y+7a)+12x(11a-7y+4x)-10y(13x-4a+11y)$

7. $(3b^2-4ab)2b-3a(4ab+b^2)-5ab(3a-2b)$

•8. $(12a^2b-13ab^2+b^3)5a-(11a^3-32a^2b-19ab^2)\cdot 3b-$
$-16ab(a^2+2ab+4b^2)$

•9. $5a^2bc(2ac-3bc^2)-7abc^2(3abc+4b^2c^2)-8b^3c^2(2ac^2-3bc^3)-$
$-4ab^2c^3(-9a-11bc)$

:10. $17a^2xy(9a^2x^2y-11ax^3y^3+10xy^2)-21ax^2y^2(12a^2x^2y^2+$
$+15ay-9a^3x)+23axy(7axy^2-5a^3x^2y+9a^2x^3y^3)$

11. $5ab(3ab+4ac-bc)-3ac(3bc-4ac+5ab)-$
$-4bc(3ab-4ac+bc)-4c^2(3a^2-b^2+2ab)-15a^2b^2$

•12. $40a^2bc^3-4ab^2(3a^2c+3ac^2+4bc^3)+3a^2c(4ab^2-2bc^2-4b^2c)-$
$-5abc(9ac^2-4abc-4b^2c^2)+4bc^2(5a^2c-ab^2c+a^2b)$

13. $2x(1-x(3-5x+2x^2)-x^2(2-3x))-4x^2(2x-2)$

14. $a(a+b-2)-b(a+b-3)-4(a-b)-7(b-\frac{6}{7}a)$

15. $4(x-y+5)-5(x+y)+17(y-x-3)$

16. $50x-12(x+y-z)-14(x-y+z)+17(y+z-x)$

17. $(a-b-5+c)\cdot 3+(b-a+c-11)\cdot 7-(c+a-b-14)\cdot 6-$
$-(2c+5b-5a)\cdot 2$

18. $27(a+b+c)-29(a-b+c)+31(a+b-c)-35(b-c-a)$

19. $(x+y+z)\cdot 17-(x-4-z)\cdot 12-(y-15-x)\cdot 13-3(6x-49)$

20. $5(a+x-3)+6x-(x-a-3)\cdot 7-3a-4(a-x)$

21. $(a-b)\cdot 5+7(a+b)-(a-7)\cdot 5-7(a+5)$

22. $100-99(a+b-1)-50+49(b+a-1)+50(a+b-2)$

23. $(x-y-z-2)\cdot 2+3-4(z-y-x-5)+(x+4)\cdot 8-5(y+2)$

24. $a(1+b+c)-b(2+a-c)-c(3+a+b)$

25. $y+y(1-y)-y(2-y)+y^2$

26. $x(n+1)-x(n-1)+x(n-2)-nx+3x$

27. $x^2-x(a+x)+x-x(a-1)+(a+1+x)x-x(3-a)$

28. $4b+a(x-3)+a(7-x)+a-(a+b)\cdot 4$

29. $a(a+b)+c(a+b)-ac-c^2+b(a+b)-bc-2ab$

30. $a^2+c(b-c)+ac-b(b-c)+a(b-c)-ab-2bc$

31. a) $3a-(7b-a)+15(2a+b)$ **b)** $-w(7-8v)+3w(2-3v)$

c) $7(17+8\frac{4}{5}x)-(x+7)\cdot 17$

d) $3(2x+11y)+7y(1+5x)+y(-2+x)$

32. $a(a^2b+a^3c^2)+a^3(2b+ac^2)$

33. $x^2(5a+bx)+3a(2b+x^2)+2b(a+2x^3)-8a(x^2+b)$

•**34.** $p^2q(2pr+4r^3+7rq^2)+2r(p^2q^3+5p^2q+2p^2qr^2)-$
$-2pqr(p^2+pq^2+5p)$

35. a) $0{,}5x(0{,}8x-0{,}6y)-0{,}4y(1{,}5y-2{,}5x)$

b) $2\frac{1}{2}a(4\frac{2}{5}a-6\frac{1}{4}b)-2\frac{2}{5}b(3\frac{3}{4}a+8\frac{1}{3}b)$

c) $6\frac{3}{7}b(4\frac{1}{5}b-11\frac{2}{3}a)-4\frac{4}{9}a(3\frac{3}{8}b-5\frac{2}{5}a)$

36. a) $u(v-w)+v(w-u)+w(u-v)$

b) $x(y+z)-y(x+z)+z(x-y)$

c) $5xy+3y(2x+1)-6x(y-2)+2(x-y)$

37. a) $4pqr-(8prs-11qrs)-(7prq-6rsq+4srp)\cdot(-2)$

b) $2a(9b-6c)-b(6a+15c)+3c(4a-2b)$

c) $2ab(5+c)-7b(3a+ac)-ab(18c-7\cdot 3c)$

38. a) $6p(3pq+q^2)-2q(9pq-3p^2)+8pq(p-q)$

b) $\frac{4}{5}a^2b^2(15c^2-5)+\frac{3}{2}ab(8ab-10abc^2)-7a^2b^2$

39. a) $3(\frac{5}{6}xy-\frac{2}{3}y)-\frac{2}{3}x(-\frac{9}{8}y-1\frac{1}{2})+26y(\frac{1}{13}-\frac{1}{8}x)$

b) $3\frac{1}{7}a(1\frac{3}{11}a-b+7)-3\frac{1}{6}b(\frac{18}{95}b-\frac{120}{133}a-6)-$
$-(63\frac{7}{9}b-\frac{4}{9}ab+6\frac{2}{9}a^2)\cdot\frac{9}{14}+\frac{3}{5}b^2$

•**c)** $(-0{,}2x)^2(-0{,}2+x)-0{,}2x^2(0{,}2^2-x)-(-0{,}2x)^3$

3.3.5 Schachtelklammern

Bei komplizierteren Termen kommt es vor, daß in Klammern Klammern stehen, in denen womöglich wieder Klammern stehen usw.

Beispiel: $4a-(-1+3(2a-(a+3)))$.

Wenn es dabei zu unübersichtlich wird, verwendet man auch verschiedene Klammerarten, z. B. runde und eckige Klammern.

Beispiel: $4a-(-1+3[2a-(a+3)])$.

Mit Hilfe unserer Klammerregeln können wir jetzt solche »Schachtelklammern« auflösen. Man kann dabei verschieden vorgehen. Wir empfehlen die

Regel 111.1:
1. Vereinfache, falls möglich, in jeder Klammer.
2. Löse die innerste Klammer auf.
3. Vereinfache wieder.
4. Wiederhole 2. und 3. so lange, bis keine Klammern mehr vorhanden sind.

Beispiele:

1) $$\begin{aligned} 4a-(-1+3[2a-(a+3)]) &= 4a-(-1+3[2a-a-3]) = \\ &= 4a-(-1+3[a-3]) = \\ &= 4a-(-1+3a-9) = \\ &= 4a-(-10+3a) = \\ &= 4a+10-3a = \\ &= a+10. \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} &(3x-(7yz+3z(-3+2x-5y)-6xz))(-5)-(8z-15x) = \\ &= (3x-(7yz-9z+6xz-15yz-6xz))(-5)-8z+15x = \\ &= (3x-(-8yz-9z))(-5)-8z+15x = \\ &= (3x+8yz+9z)(-5)-8z+15x = \\ &= -15x-40yz-45z-8z+15x = \\ &= -53z-40yz. \end{aligned}$$

Aufgaben

1. a) $(3a^2+4b)-(5a^2-(2a^2-b))$
   b) $(7a^3-2b)-(4a^3-(4b-(3a^3-b)))$
2. a) $5x^3-xy-(3xy-(2x^3+y^2+6xy))-(3xy-(2x^3+xy))$
   b) $2xy-4x^3-(2xy-(3x^3-y^2-8xy))-(-2y^2-(8xy+10x^3))$
3. a) $3a^4-b^2+(5ab-(2a^4-3b^2))-(8ab-(b^2-2a^4))$
   b) $6ab-a^4-(2ab-(4a^4-b^2))+(-4a^4-(7ab-4b^2))$
4. a) $-(-a+(7b-(21c-9)))$ b) $-[-(-3u+5v-7w)]$
   c) $-[(x-3y)-(-2x+y+1)]$
   d) $-\{-[(6m-9n)-(-p-q)]-(1+5m+10n)\}-(1+p+q)$
5. $0{,}5u[3v^3+(2{,}4uv-1)]+3[2u-1{,}8uv(u+v^2)]$

•6. $((11-16x+17x^2)\cdot 3x-5x(6-10x+10x^2))\cdot 3x-$
$-4x((x+2)x+1)+1$

•**7.** $((2a+3b)2b-(3a-2b)3a)ab^2+(3a(2a-3b)-$
$-2b(3a+2b))a^2b$

•**8.** $5a(6-4(3-a))-(5a(6a-11)-4(3a^2-6a+6))-24$

••**9.** $6[((3x-1)2-4(x+5))\cdot 5-4(2-2(3-3(4-5x)))]-$
$-20(39x-58)-19$

10. $3a((5a-4)\cdot 5-(2a-7+2a^2)+6a(2a-4))-5a^2(3a-4)$

••**11.** $((a^2+ab+b^2)b-a(a^2+ab+b^2))b-a(b^3+2ab^2-a^2b)+b^3(b+a)$

12. $(a^2+2b(2b-3a))a-b(b^2-2a(2a-b))+b^3-a^3$

13. $2(3-4(5-6(7-x)))-7(6-5(4-3(2-x)))$

•**14.** $2x(4x((3x-2)\cdot 5-3(2x-4))+6(3x-1))-3x^2(x(20-x)+20)$

•**15.** $a(25a-((4a+3)\cdot 4-15a)\cdot 2a+3(a+4(a-2)))+$
$+4(a(a+a(a+1))+a)$

16. $(\frac{7}{15}x-3x^2)-(3x^2-\frac{1}{3}x-(2x^2-2-4x+\frac{1}{3})+(\frac{4}{5}x-\frac{2}{3}x^2-\frac{13}{15}))$

••**17.** $x^2-(\frac{1}{4}x+3x^2-(2x^2-3x-(4x^2-\frac{1}{5}x+2)+\frac{3}{4}x^3)-\frac{1}{5}x^3)+$
$+(\frac{61}{20}x-\frac{19}{20}x^3)+2$

18. $\frac{1}{3}ab^2-(6ac^2-c^3-2a(c^2-\frac{1}{8}b^2)+ab^2-\frac{5}{3}c^3)+\frac{11}{12}ab^2+4ac^2$

19. $\frac{1}{4}b^3+4a^2-(\frac{3}{2}(3bc-4)-(a^2-bc-2ab)+\frac{8}{9}bc)-\frac{1}{4}b^3-6-\frac{11}{18}bc$

••**20.** $\frac{1}{4}b^2(7ab-\frac{1}{2}a^2)-\frac{3}{4}b(ab(b-\frac{5}{6}a)+\frac{1}{10}ab^2)-\frac{1}{40}ab^2(20a+37b)$