Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

3.1 Äquivalente Terme

urn:nbn:de:hbz:466:1-83493

3 Einfache Termumformungen

3.1 Äquivalente Terme

Terme, also auch Variablen, stehen für rationale Zahlen. Beim Rechnen mit Termen denken wir uns jede Variable durch eine geeignete Zahl ersetzt. Dadurch wird der Term selbst zu einer rationalen Zahl, und man kann mit ihm wie mit einer rationalen Zahl rechnen. Also gelten die Rechengesetze für rationale Zahlen auch für das Rechnen mit Termen. Mit Hilfe der Rechengesetze kann man dann Terme in andere Terme umwandeln. Vor allem will man natürlich komplizierte Terme vereinfachen. Wir zeigen dieses Umformen von Termen mittels der Rechengesetze an einigen Beispielen.

1) Umformungen mit Hilfe der Rechengesetze für die Addition

Kommutativgesetz: $\boldsymbol{a + b = b + a}$

$2x + 3 = 3 + 2x \qquad 1 - x = -x + 1$

Assoziativgesetz: $\boldsymbol{(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c}$

$(3x + 1) + 12 = 3x + (1 + 12) = 3x + 13$

$$(1\tfrac{1}{2}x - 3\tfrac{3}{4}) - 2\tfrac{1}{4} = (1\tfrac{1}{2}x + (-3\tfrac{3}{4})) + (-2\tfrac{1}{4}) =$$
$$= 1\tfrac{1}{2}x + (-3\tfrac{3}{4} - 2\tfrac{1}{4}) = 1\tfrac{1}{2}x - 6$$

0 als neutrales Element der Addition: $\boldsymbol{a + 0 = 0 + a = a}$

$3x + 0 = 3x$

Inverses Element bei der Addition: $\boldsymbol{a + (-a) = a - a = 0}$

$x - x = 0 \qquad 3{,}7x - 3{,}7x = 0 \qquad (3x + 5y + 8) - (3x + 5y + 8) = 0$

2) Umformungen mit Hilfe der Rechengesetze für die Multiplikation

Kommutativgesetz: $\boldsymbol{a \cdot b = b \cdot a}$

$x \cdot 3 = 3 \cdot x = 3x \qquad x \cdot (-\tfrac{3}{7}) = (-\tfrac{3}{7})x = -\tfrac{3}{7}x$

Assoziativgesetz: $\boldsymbol{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c}$

$2 \cdot (4 \cdot x) = (2 \cdot 4) \cdot x = 8x$

$(-3)((-2{,}1)x) = ((-3)(-2{,}1))x = 6{,}3x$

1 als neutrales Element der Multiplikation: $\boldsymbol{1 \cdot a = a \cdot 1 = a}$

$1 \cdot x = x \qquad x = 1 \cdot x$

Inverses Element bei der Multiplikation: $\boldsymbol{a \cdot \frac{1}{a} = \frac{a}{a} = 1}$ **für** $\boldsymbol{a \neq 0}$

$$x \cdot \frac{1}{x} = 1 \qquad (2{,}7x) \cdot \frac{1}{2{,}7x} = 1 \qquad \frac{-3x}{-3x} = 1$$

3) Umformungen mit Hilfe des Distributivgesetzes

Ausmultiplizieren:	**Ausklammern:**
$\boldsymbol{a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c}$	$\boldsymbol{a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c)}$
$3 \cdot (x+2) = 3 \cdot x + 3 \cdot 2 = 3x + 6$	$2x + 2y = 2(x+y)$
$(-2) \cdot (3-x) = -6 + 2x$	$2x + 3x = (2+3)x = 5x$
$(-1) \cdot (x-7) = -x + 7$	$2x + x = (2+1)x = 3x$

Interessanter, aber auch schwieriger wird es, wenn mehrere Gesetze nacheinander oder gleichzeitig angewendet werden:

$$(-3+x)+1 \stackrel{\text{K}}{=} (x+(-3))+1 \stackrel{\text{A}}{=} x+((-3)+1) = x+(-2) = x-2$$

$$\frac{8x-14}{2} = \tfrac{1}{2} \cdot (8x-14) \stackrel{\text{D}}{=} \tfrac{1}{2} \cdot (8x) - \tfrac{1}{2} \cdot 14 \stackrel{\text{A}}{=} (\tfrac{1}{2} \cdot 8)x - 7 = 4x - 7$$

oder kürzer $\quad \dfrac{8x-14}{2} = \dfrac{8x}{2} - \dfrac{14}{2} = 4x - 7$

Der umgewandelte und der ursprüngliche Term sind mathematisch gleichwertig. Setzt man nämlich in beide Terme irgendeine Zahl ein, so entstehen jeweils gleiche Zahlenwerte. So ergibt sich z. B. bei den Termen $T_1(x) = \dfrac{8x-14}{2}$ und $T_2(x) = 4x - 7$ bei der Einsetzung $x = 3$ einerseits $T_1(3) = \dfrac{8 \cdot 3 - 14}{2} = 5$, andererseits $T_2(3) = 4 \cdot 3 - 7 = 5$, also jedesmal 5.
Man kennzeichnet diese Gleichwertigkeit von Termen durch ein Fachwort:

Definition 89.1: Zwei Terme $T_1(x)$ und $T_2(x)$ heißen **äquivalent***, wenn sie bei *jeder* Einsetzung für x jeweils gleiche Zahlenwerte liefern.
Kommen in Termen mehrere Variablen vor, so müssen sie bei der Ersetzung *aller* Variablen durch Zahlen jeweils gleiche Zahlenwerte liefern.

Die Rechengesetze liefern uns Beispiele für äquivalente Terme. So sagt z. B. das Kommutativgesetz der Addition, daß die Terme $a + b$ und $b + a$ äquivalent sind.

Die Grundmenge $\mathbb{Q}$ hat unendlich viele Elemente. Daher kann man mit der Methode des Einsetzens die Äquivalenz von Termen niemals nachweisen, da man mit dem Einsetzen nie fertig wird. Wie kann man aber dann feststellen, ob zwei Terme äquivalent sind? Antwort hierauf gibt

* *aequus* (lat.) = gleich; *valere* (lat.) = wert sein, gelten für

Satz 90.1: Zwei Terme, die durch Anwendung der Rechengesetze auseinander hervorgehen, sind äquivalent.

Zur **Begründung** dieses Satzes überlegen wir uns: Wenn man einen Term mit Hilfe eines Rechengesetzes durch einen anderen ersetzt, so haben der ursprüngliche und der neue Term bei jeder Einsetzung den gleichen Wert. Also sind die beiden Terme äquivalent.

Bei umfangreichen oder kompliziert gebauten Termen ist der Nachweis der Äquivalenz sehr langwierig. So ist insbesondere der Nachweis, daß die Rechengesetze auf mehr als 2 bzw. 3 Summanden und Faktoren verallgemeinert werden können, sehr mühsam. Für Tüftler führen wir als Beispiel vor, wie man ein Kommutativgesetz der Addition bei 4 Summanden beweisen kann.

Wir wollen zeigen:

$$a+b+c+d=d+b+c+a$$

Mit Hilfe des Assoziativgesetzes (A) und des Kommutativgesetzes (K) formen wir langsam um.

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= ((a+b)+c)+d = \\ &\overset{K}{=} d+((a+b)+c) = \\ &\overset{K}{=} d+((b+a)+c) = \\ &\overset{A}{=} d+(b+(a+c)) = \\ &\overset{K}{=} d+(b+(c+a)) = \\ &\overset{A}{=} d+((b+c)+a) = \\ &\overset{A}{=} (d+(b+c))+a = \\ &\overset{A}{=} ((d+b)+c)+a = \\ &= d+b+c+a \end{aligned}$$

Wer selber so etwas versuchen will, soll Aufgabe 95/**12** lösen!

Abb. 90.1 Sir (seit 1835) William Rowan HAMILTON (4. 8. 1805 Dublin bis 2. 9. 1865 Dunsink bei Dublin), der 1843 das Wort *assoziativ* prägte.

Auch andere Rechengesetze lassen sich verallgemeinern. Es gilt nämlich

Satz 90.2: Verallgemeinerte Rechengesetze

Verallgemeinertes Kommutativgesetz

Bei Summen darf die Reihenfolge der Summanden beliebig geändert werden, ohne daß sich der Wert der Summe ändert; z. B. $\boldsymbol{a+b+c+d=d+b+c+a}$	Bei Produkten darf die Reihenfolge der Faktoren beliebig geändert werden, ohne daß sich der Wert des Produkts ändert; z. B. $\boldsymbol{a\cdot b\cdot c\cdot d=d\cdot b\cdot c\cdot a}$

Verallgemeinertes Assoziativgesetz

Bei Summen dürfen Klammern beliebig gesetzt und weggelassen werden, ohne daß sich der Wert der Summe ändert; z. B.

$$(a + ((b + c) + d) = $$
$$= (a + b) + (c + d)$$

Bei Produkten dürfen Klammern beliebig gesetzt und weggelassen werden, ohne daß sich der Wert des Produkts ändert; z. B.

$$a \cdot ((b \cdot c) \cdot d) = (a \cdot b) \cdot (c \cdot d)$$

Verallgemeinertes Distributivgesetz

Ausmultiplizieren: Eine Summe wird mit einer Zahl multipliziert, indem man jeden Summanden mit dieser Zahl multipliziert und die entstandenen Produkte addiert; z. B.

$$a \cdot (b + c + d + e) =$$
$$= ab + ac + ad + ae$$

Ausklammern: Enthält in einer Summe aus Produkten jedes Produkt denselben Faktor, so kann man diesen Faktor »ausklammern«; z. B.

$$ab + ac + ad + ae =$$
$$= a(b + c + d + e)$$

Da wegen $a : b = \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$ eine Division immer durch eine Multiplikation mit dem Kehrwert des Divisors ersetzt werden kann, erhalten wir aus dem verallgemeinerten Distributivgesetz eine merkenswerte Folgerung; nämlich

Satz 91.1: Eine Summe wird durch eine Zahl dividiert, indem man jeden Summanden durch diese Zahl dividiert und die entstandenen Quotienten addiert; z. B.

$$(a + b + c + d) : e = a : e + b : e + c : e + d : e \quad \textit{oder}$$
$$\frac{a + b + c + d}{e} = \frac{a}{e} + \frac{b}{e} + \frac{c}{e} + \frac{d}{e}$$

Eine besonders wichtige Anwendung finden die verallgemeinerten Rechengesetze beim Zusammenfassen gleichartiger Terme. Dabei nennt man Terme **gleichartig**, wenn sie gleiche Buchstabenfaktoren haben. So sind z. B. $7x$ und $-3x$ gleichartig, ebenso $\frac{4}{3}a^2b$ und a^2b. Nicht gleichartig sind hingegen $3a^2$ und $5a$. Der Zahlenfaktor eines Terms heißt **Koeffizient*** des Terms. Die Terme $7x$, $-\frac{3}{4}a^2b$ und uv haben die Koeffizienten 7 bzw. $-\frac{3}{4}$ bzw. 1.
Mit Hilfe des verallgemeinerten Distributivgesetzes fassen wir nun gleichartige Terme zusammen:

$3x + 5x + 8x = (3 + 5 + 8)x = 16x$
$11ab - ab = (11 - 1)ab = 10ab$

* *coefficiens* (lat.) = mitbewirkend. Eingeführt wurde das Wort als Fachausdruck in die Mathematik von François VIÈTE (1540–1603) in seinen *Ad logisticen speciosam notae priores* 1591. Im Deutschen sagt man statt **Koeffizient** gelegentlich auch *Beizahl*.

Mit einiger Übung erspart man sich das Ausklammern der Koeffizienten und addiert diese gleich im Kopf:

$7a + 12a + a = 20a$

Wir merken uns

> **Satz 92.1:** Gleichartige Terme werden addiert, indem man ihre Koeffizienten addiert und das Variablenprodukt beibehält.

Aus einfachen Termen kann man durch Addition umfangreichere Terme aufbauen, z.B.

$3x + (-5) + 7{,}2xy + (-\frac{1}{3}x) + (-13)$.

So wie wir für $a + (-b)$ kurz $a - b$ geschrieben haben, vereinbaren wir diese einfache Schreibweise auch für komplizierte Terme aus mehr als zwei Gliedern. Damit läßt sich der obige Term kurz und übersichtlich schreiben:

$3x - 5 + 7{,}2xy - \frac{1}{3}x - 13$.

Da ein so gebauter Term eigentlich eine Summe ist, nennt man ihn zur Unterscheidung *algebraische Summe*. Vielfach ist dafür auch der Name *Aggregat** im Gebrauch. Wir merken uns

> **Definition 92.1:** Eine Verbindung mehrerer Terme durch Plus- oder Minuszeichen nennt man **algebraische Summe** oder **Aggregat**. Die einzelnen Summanden heißen **Glieder des Aggregats**.

Wegen des Kommutativgesetzes und des Assoziativgesetzes der Addition dürfen die Glieder eines Aggregats *mit ihren Vorzeichen* beliebig umgestellt und zusammengefaßt werden:

$$\begin{aligned}
&2x - 3 + 8x + 5 - x =\\
&= 2x + (-3) + 8x + 5 + (-x) =\\
&= 2x + 8x + (-x) + (-3) + 5 =\\
&= 2x + 8x - x - 3 + 5 =\\
&= 9x + 2.
\end{aligned}$$

* *grex* (lat.) = Herde, Haufen; *aggregare* (lat.) = beigesellen. LEONARDO VON PISA (um 1170–nach 1240) verwendet das Wort *aggregatum*. Als **Aggregat** im Sinne von Summe erscheint es 1489 im weitverbreiteten Werk *Behende und hubsche Rechenung auff allen kauffmanschafft* des Johannes WIDMANN VON EGER (um 1460–nach 1500), Professor an der 1409 gegründeten Universität von Leipzig. Im Sommer 1486 hielt WIDMANN in seinem Haus als Zusatzveranstaltung zum Lehrprogramm die erste öffentliche Vorlesung über Algebra im deutschen Sprachraum, wofür er von jedem Studenten 2 Gulden (= 42 Silbergroschen [= gr]) verlangte, ein unerhört hoher Betrag, verglichen z.B. mit den 8 gr für die 20 bis 30 Wochen dauernde Vorlesung über die ersten Bücher EUKLIDS. WIDMANN zufolge verdiente ein Maurer 5 gr am Tag, und für 2 Gulden erhielt man ca. 4,5 g reines Gold. Übrigens bekam man 1480 in Sachsen für 4 gr ein Schaf und für 2 gr ein Paar Schuhe. François VIÈTE (1540–1603) benützt in seiner *In artem analyticem Isagoge* (1591) das Wort *adgregatum*. Im *Mathematischen Wörterbuch* von Georg Simon KLÜGEL (1739–1812) von 1803 wird Aggregat in unserem Sinne verwendet.

Beim praktischen Rechnen erspart man sich das Umschreiben in eine Summe und stellt gleich unter Mitnahme des Vorzeichens um:

$2x - 3 + 8x + 5 - x =$
$= 2x + 8x - x - 3 + 5 =$
$= 9x + 2.$

Wir merken uns

> **Satz 93.1:** In einem Aggregat dürfen die Glieder unter Mitnahme ihres Vorzeichens beliebig umgestellt und zusammengefaßt werden.

Beispiel:

$- 2\frac{1}{4}a - 7b + 9ab + \frac{1}{2}a + 3\frac{1}{3}b - 5a =$
$= - 2\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}a - 5a - 7b + 3\frac{1}{3}b + 9ab =$
$= (- 2\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 5)a + (- 7 + 3\frac{1}{3})b + 9ab = - 6\frac{3}{4}a - 3\frac{2}{3}b + 9ab.$

Da die Gesetze der Multiplikation von der gleichen Bauart sind wie die der Addition, gilt auch

> **Satz 93.2:** In einem Produkt dürfen die Faktoren beliebig umgestellt und zusammengefaßt werden.

Mit Hilfe dieses Satzes kannst du die Faktoren in einem Produkt ordnen. Dadurch werden die Terme übersichtlicher und sind leichter zu vergleichen. Für das Ordnen der Faktoren empfiehlt sich die

> **Vereinbarung 93.1:** Zuerst entscheidet man auf Grund der Vorzeichenregeln über das Vorzeichen des Produkts. Dann kommen die Zahlenfaktoren und schließlich die Buchstaben dem Alphabet nach. Für das Endergebnis wird der Wert des Zahlenprodukts ausgerechnet.

Beispiele:

1) $4a \cdot 3b = 3 \cdot 4 \cdot ab = 12ab.$
2) $(-\frac{3}{4}) \cdot x \cdot (-y) \cdot (-3\frac{1}{3}) = -\frac{3}{4} \cdot \frac{10}{3} \cdot xy = -\frac{5}{2}xy.$
3) $r \cdot (-2{,}5t) \cdot (-\frac{3}{7})s = +\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{7} \cdot rst = \frac{15}{14}rst.$

Aufgaben

1. **a)** $(x-2{,}5)+1{,}9$ **b)** $3\frac{1}{7}+(\frac{1}{7}-2u)$

c) $(-\frac{15}{8}+a)-\frac{1}{8}$ **d)** $(5{,}93y-81z)-(5{,}93y-81z)$

e) $(\frac{7}{4}g-2{,}8)-(-\frac{14}{5}+1{,}75g)$

2. **a)** $12\cdot(4\frac{1}{4}x)$ **b)** $(-\frac{3}{4})\cdot r\cdot(-\frac{8}{5})$ **c)** $(2{,}1s)\cdot(-1{,}2)$

d) $(-1)(-3{,}75a)$ **e)** $(-a)(-5)\cdot(-\frac{3}{4})$ **f)** $(-0{,}55c)\cdot(-\frac{28}{33})$

3. **a)** $3a\cdot\dfrac{1}{3a}$ **b)** $(-7)a\cdot\dfrac{1}{a}$ **c)** $7a\cdot\frac{1}{7}$

4. **a)** $(-5)(-x)(-y)$ **b)** $(-8a)(-9b)(+5c)$ **c)** $(-0{,}5r)\cdot 1{,}7s(-3{,}4t)$

5. **a)** $12(-u)v(-2w)$ **b)** $(-1{,}8)(-x)(-0{,}25)y$

c) $(-\frac{2}{3})(+ab)(-18c)$ **d)** $(-1)(+a)(-b)(-c)(+1)$

e) $(-\frac{1}{2})(-x)(-y)(-\frac{2}{3}z)$ **f)** $(+6{,}25)(-uv)(+w)(-4x)(+2y)$

6. **a)** $(-ab):(4(-c))$ **b)** $(-2)(+x)(+z):(7(-y)(-1))$

7. **a)** $\dfrac{(-3)(-m\cdot 27)}{(+4)(-n)(-16)}$ **b)** $\dfrac{(-5)^2(-1{,}4r)(+0{,}6s)}{(-1)^3(0{,}125t)(-4)^2}$

c) $(+xy)(-\frac{2}{7})^2(-z)(+343):[(-\frac{1}{3})^3(-uv)(-243w)]$

8. **a)** $3(0{,}9x-0{,}3)$ **b)** $7(r+s)$ **c)** $(p-q)\cdot 3$

d) $\frac{1}{4}(\frac{2}{7}a-\frac{8}{5}b)$ **e)** $(0{,}5c+\frac{6}{5}d)\cdot 6$ **f)** $32(\frac{3}{2}a+\frac{5}{4}b)$

g) $x(3x-5y)$ **h)** $-5a(\frac{5}{2}a-\frac{3}{7})$ **i)** $(8x+2xz)\frac{1}{2}y$

j) $3\cdot(-2u-5v)$ **k)** $-\frac{5}{6}z(-\frac{7}{15}r+\frac{3}{5}z)$ **l)** $-2x(-\frac{3}{8}tx-\frac{3}{4}sx)$

9. **a)** $3x-4x$ **b)** $7\frac{1}{2}x-x$ **c)** $a+2a-3a$

d) $0{,}1b-0{,}01b$ **e)** $3\frac{5}{6}s+2\frac{1}{6}s$ **f)** $\frac{3}{7}v-\frac{3}{14}v$

g) $\frac{5}{6}xy+\frac{3}{8}xy$ **h)** $10{,}5rs-11{,}5rs$ **i)** $3{,}7uv-uv$

j) $1985abc-1648abc$ **k)** $0{,}003rst-0{,}3rst$ **l)** $-5\frac{4}{5}x^2y-4\frac{1}{5}x^2y$

10. Wende das Distributivgesetz der Division an.

a) $\dfrac{12x-51}{3}$ **b)** $\dfrac{-4{,}9+5{,}6a}{0{,}7}$ **c)** $\dfrac{-1{,}44u-0{,}72}{36}$

11. LEON VON BYZANZ (9. Jh. n. Chr.) hat behauptet, daß $a(bc)=b(ac)=$ $=c(ab)$ sei. Beweise die Richtigkeit dieser Behauptung durch Anwendung der Rechengesetze.

12. Zeige durch Anwendung der Rechenregeln:

a) $abcd = dbca$ **b)** $a(b + c + d) = ab + ac + ad$

13. Schreibe als Summe:

a) $7x - 3y$ **b)** $-2a - 5b$ **c)** $3 - x + y$

d) $-5u + 3v - 9$ **e)** $-1 - 2x - 3y$ **f)** $5a - 6b + 7c - 8d$

14. Schreibe als Summe:

a) $12xy - 3{,}7uv$ **b)** $8 - (a - b)$ **c)** $(3x - 5y) - (2x + 3y)$

d) $(3u + 5v) - (2u - 3v - 1) - 2v$ **e)** $2(x + y) - 3(x - y) - 2(x^2 - y^2)$

15. a) $2x + 7y + 3y + x$ **b)** $2x - 7y + 3y + x$

c) $-2x + 7y - 3y + x$ **d)** $2x - 7y - 3y - x$

e) $-2x + 7y + 3y - x$ **f)** $-2x - 7y - 3y - x$

g) $\frac{2}{3}a + \frac{1}{6}b + 3\frac{1}{3}a + \frac{5}{6}b$ **h)** $\frac{2}{3}a - \frac{1}{6}b + 3\frac{1}{3}a + \frac{5}{6}b$

i) $-\frac{2}{3}a + \frac{1}{6}b - 3\frac{1}{3}a + \frac{5}{6}b$ **j)** $\frac{2}{3}a - \frac{1}{6}b - 3\frac{1}{3}a - \frac{5}{6}b$

k) $-\frac{2}{3}a + \frac{1}{6}b + 3\frac{1}{3}a - \frac{5}{6}b$ **l)** $-\frac{2}{3}a - \frac{1}{6}b - 3\frac{1}{3}a - \frac{5}{6}b$

16. a) $3x - 3{,}2 + 5xy - 2 - x$

b) $8{,}1x^2 - 8{,}1x - 8{,}1 + 2{,}9x + x^2 - 7{,}9$

c) $3ab - 0{,}3a - 0{,}3ab + 3{,}7a + 2{,}3ab$

d) $-4\frac{5}{8}x + 3\frac{1}{2}y + xy - 3\frac{2}{3}x + 1\frac{17}{24}x - xy - 4\frac{3}{4}y$

3.2 Potenzen

Für Produkte mit lauter gleichen Faktoren führt man eine abkürzende Schreibweise ein*:

$a \cdot a =: a^2$, gesprochen »*a* hoch 2« oder »*a* Quadrat«

$a \cdot a \cdot a =: a^3$, gesprochen »*a* hoch 3«

$a \cdot a \cdot a \cdot a =: a^4$, gesprochen »*a* hoch 4«

....

* Um kenntlich zu machen, was das neue Symbol ist, verwendet man gern ein Gleichheitszeichen in Verbindung mit einem Doppelpunkt, der entweder links oder rechts vom Gleichheitszeichen stehen kann. Dabei bedeutet $A := B$, daß A das neue Zeichen, die neue Schreibweise für das schon bekannte B ist. Umgekehrt bedeutet $C =: D$, daß das neue D durch das schon bekannte C erklärt wird.
Das Wort **Symbol** kommt vom griechischen *σύμβολον* (sýmbolon) = *Erkennungszeichen, vereinbartes Zeichen.* Ursprünglich bezeichnete man damit das dem Gastfreunde übergebene abgebrochene Stück einer Sache, z. B. eines Rings, eines Täfelchens, das mit seinem Bruchrand genau in das zurückbehaltene Stück paßte, so daß man durch *Zusammenlegen* (= *συμβάλλειν* [symbállein]) den rechtmäßigen Besitzer wieder erkennen konnte.