Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

3.2 Potenzen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83493

12. Zeige durch Anwendung der Rechenregeln:

a) $abcd = dbca$ **b)** $a(b+c+d) = ab+ac+ad$

13. Schreibe als Summe:

a) $7x-3y$ **b)** $-2a-5b$ **c)** $3-x+y$

d) $-5u+3v-9$ **e)** $-1-2x-3y$ **f)** $5a-6b+7c-8d$

14. Schreibe als Summe:

a) $12xy-3{,}7uv$ **b)** $8-(a-b)$ **c)** $(3x-5y)-(2x+3y)$

d) $(3u+5v)-(2u-3v-1)-2v$ **e)** $2(x+y)-3(x-y)-2(x^2-y^2)$

15. a) $2x+7y+3y+x$ **b)** $2x-7y+3y+x$

c) $-2x+7y-3y+x$ **d)** $2x-7y-3y-x$

e) $-2x+7y+3y-x$ **f)** $-2x-7y-3y-x$

g) $\frac{2}{3}a+\frac{1}{6}b+3\frac{1}{3}a+\frac{5}{6}b$ **h)** $\frac{2}{3}a-\frac{1}{6}b+3\frac{1}{3}a+\frac{5}{6}b$

i) $-\frac{2}{3}a+\frac{1}{6}b-3\frac{1}{3}a+\frac{5}{6}b$ **j)** $\frac{2}{3}a-\frac{1}{6}b-3\frac{1}{3}a-\frac{5}{6}b$

k) $-\frac{2}{3}a+\frac{1}{6}b+3\frac{1}{3}a-\frac{5}{6}b$ **l)** $-\frac{2}{3}a-\frac{1}{6}b-3\frac{1}{3}a-\frac{5}{6}b$

16. a) $3x-3{,}2+5xy-2-x$

b) $8{,}1x^2-8{,}1x-8{,}1+2{,}9x+x^2-7{,}9$

c) $3ab-0{,}3a-0{,}3ab+3{,}7a+2{,}3ab$

d) $-4\frac{5}{8}x+3\frac{1}{2}y+xy-3\frac{2}{3}x+1\frac{17}{24}x-xy-4\frac{3}{4}y$

3.2 Potenzen

Für Produkte mit lauter gleichen Faktoren führt man eine abkürzende Schreibweise ein*:

$a \cdot a =: a^2$, gesprochen »a hoch 2« oder »a Quadrat«

$a \cdot a \cdot a =: a^3$, gesprochen »a hoch 3«

$a \cdot a \cdot a \cdot a =: a^4$, gesprochen »$a$ hoch 4«

....

* Um kenntlich zu machen, was das neue Symbol ist, verwendet man gern ein Gleichheitszeichen in Verbindung mit einem Doppelpunkt, der entweder links oder rechts vom Gleichheitszeichen stehen kann. Dabei bedeutet $A := B$, daß A das neue Zeichen, die neue Schreibweise für das schon bekannte B ist. Umgekehrt bedeutet $C =: D$, daß das neue D durch das schon bekannte C erklärt wird.
Das Wort **Symbol** kommt vom griechischen σύμβολον (sýmbolon) = *Erkennungszeichen, vereinbartes Zeichen.* Ursprünglich bezeichnete man damit das dem Gastfreunde übergebene abgebrochene Stück einer Sache, z. B. eines Rings, eines Täfelchens, das mit seinem Bruchrand genau in das zurückbehaltene Stück paßte, so daß man durch *Zusammenlegen* (= συμβάλλειν [symbállein]) den rechtmäßigen Besitzer wieder erkennen konnte.

Macht man so weiter, so kommt man zu

Definition 96.1: Für das Produkt $a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ aus n gleichen Faktoren a schreibt man kurz a^n, gesprochen »a hoch n«, und nennt es **n-te Potenz** von a; kurz:

$$a^n := \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}, \quad n \in \{2, 3, 4, \ldots\}.$$

Man sagt: a wird mit n potenziert. a heißt **Grundzahl** oder **Basis**, n heißt **Hochzahl** oder **Exponent**.*

Da n die Anzahl der Faktoren im Produkt angibt, gilt die Definition von a^n nur für natürliche Zahlen, die größer als 1 sind. Wir sind oben nämlich von $a \cdot a = a^2$ zu immer höheren Potenzen fortgeschritten. Ein Schritt zurück brächte rein formal die Zeile $a = a^1$. Das liefert eine naheliegende Ergänzung der Potenzdefinition, die sich im folgenden als zweckmäßig erweisen wird:

Definition 96.2: $a^1 := a$

In Termen, die aus Potenzen, Produkten und Summen bestehen, muß man wissen, in welcher Reihenfolge die Rechnung auszuführen ist. So ist z. B. unklar, wie $3 \cdot 5^2$ zu verstehen ist:
Geht die Multiplikation vor oder das Potenzieren?
Geht die Multiplikation vor, so muß man $3 \cdot 5^2 = 15^2 = 225$ rechnen.
Geht hingegen das Potenzieren vor, so ergibt sich $3 \cdot 5^2 = 3 \cdot 25 = 75$.
Durch Setzen von Klammern kann man die Anweisung eindeutig machen; im ersten Fall schriebe man $(3 \cdot 5)^2$, im zweiten Fall $3 \cdot (5^2)$.
Um Klammern zu sparen, hält man sich an die 1873 von Ernst Schröder (1841–1902) in seinem *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studirende* eingeführte

Vereinbarung 96.1: **1.** »Potenz vor Punkt vor Strich.«
2. »Klammern haben absoluten Vorrang.«

* Diophant (um 250 n. Chr.) verwendet für die 2. Potenz einer Unbekannten neben τετράγωνος (siehe Seite 66) bevorzugt δύναμις (dýnamis) = *Kraft*, das bereits bei Heron (wirkte um 62 n. Chr. in Alexandria) so belegt ist, wogegen Hippokrates von Chios (2. Hälfte des 5. Jh.s v. Chr.) damit die Quadratzahl bezeichnet hatte. Raffaele Bombelli (1526–1572) verwendet 1572 in seiner *L'Algebra* dafür das italienische Wort *potenza*. Im 18. Jh. setzt sich *potentia*, zu deutsch **Potenz**, als allgemeine Bezeichnung für a^n gegenüber den bis dahin gebräuchlichen Wörtern wie *potestas* (Viète) und *dignità* (Tartaglia und Bombelli) durch. Leonhard Euler (1707–1783) versucht in seiner *Vollständigen Anleitung zur Algebra* 1770 die Verdeutschung *Macht*, die sich aber nicht verbreitete. **Basis** ist das griechische Wort βάσις, das *Grundlage, Fundament* bedeutet. Das Wort **Exponent** wurde 1544 von Michael Stifel (1487?–1567) in seiner *Arithmetica integra* geprägt; *exponere* (lat.) bedeutet *herausstellen*. Auch die Schreibweise für Potenzen hat eine lange Geschichte. Das heute übliche a^2, a^3 usw. geht auf René Descartes (1596–1650) zurück, und zwar auf die 1628 entstandenen und erst 1701 erschienenen *Regulae ad directionem ingenii*. Potenzen mit einem allgemeinen Exponenten n kommen jedoch erst bei Isaac Newton (1643–1727) vor.

Beispiele:

1) $4 + 3 \cdot 5^2 = 4 + 3 \cdot 25 = 4 + 75 = 79.$
2) $(4 + 3) \cdot 5^2 = 7 \cdot 5^2 = 7 \cdot 25 = 175.$
3) $4 + (3 \cdot 5)^2 = 4 + 15^2 = 4 + 225 = 229.$
4) $(4 + 3 \cdot 5)^2 = (4 + 15)^2 = 19^2 = 361.$
5) $((4 + 3) \cdot 5)^2 = (7 \cdot 5)^2 = 35^2 = 1225.$

Beachte: Manche Taschenrechner halten sich nicht an diese Vereinbarung. Studiere also jeweils genau die Gebrauchsanweisung!

Beim Umgang mit Potenzen passieren dem Anfänger manchmal folgende zwei Fehler:

1. Fehler: Er verwechselt a^3 mit $a \cdot 3$. Aber es gilt

$a^3 = a \cdot a \cdot a$ und $a \cdot 3 = 3 \cdot a = a + a + a$, zum Beispiel
$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ und $5 \cdot 3 = 3 \cdot 5 = 5 + 5 + 5 = 15.$

2. Fehler: Er rechnet $a^3 - a^2 = a$, z.B. $7^3 - 7^2 = 7$. Dabei läßt sich $a^3 - a^2$ nicht weiter berechnen, $7^3 - 7^2$ aber zu $343 - 49 = 294$ ausrechnen, und das ist nicht 7.

Wie geht man aber richtig mit Potenzen um? Vorläufig genügen uns drei Rechenregeln:

1) Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis

$2^3 \cdot 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7$

Bei der Umformung war es nicht wesentlich, daß 2 die Basis war; also gilt für jede Basis a

$$a^3 \cdot a^4 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^7.$$

Genauso können wir allgemein vorgehen:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{(a \cdot a \ldots \cdot a)}_{m \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ Faktoren}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n \text{ Faktoren}} = a^{m+n}.$$

Also gilt

> **Satz 97.1:** Potenzen gleicher Basis werden miteinander multipliziert, indem man die Exponenten addiert und die Basis beibehält; kurz $\boldsymbol{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$ $(m, n \in \mathbb{N})$.

Beispiele:

1) $x^8 \cdot x^{19} = x^{8+19} = x^{27}.$
2) $z \cdot z^2 = z^1 \cdot z^2 = z^{1+2} = z^3.$
3) $a^2 \cdot a^3 \cdot a^4 = a^{2+3} \cdot a^4 = a^{(2+3)+4} = a^{2+3+4} = a^9.$

2) Potenzieren einer Potenz

$(2^3)^4 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = 2^{3+3+3+3} = 2^{12}$.

Auch hier war es nicht wesentlich, daß 2 die Basis war; also gilt für jede Basis a

$(a^3)^4 = a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 = a^{3+3+3+3} = a^{12}$.

Genauso können wir allgemein vorgehen:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ Faktoren } a^m} = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ Summanden } m}} = a^{n \cdot m} = a^{m \cdot n}.$$

Somit gilt

> **Satz 98.1:** Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten miteinander multipliziert und die Basis beibehält; kurz
>
> $$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad (m, n \in \mathbb{N}).$$

Beispiele:

1) $(x^2)^3 = x^{2 \cdot 3} = x^6$.

2) $((z^3)^5)^7 = (z^{3 \cdot 5})^7 = z^{(3 \cdot 5) \cdot 7} = z^{3 \cdot 5 \cdot 7} = z^{105}$.

Beachte: $(x^2)^3 \neq x^{2^3}$. Auf der linken Seite wird nämlich die Basis x^2 mit 3 potenziert, und das ergibt x^6. Auf der rechten Seite hingegen wird die Basis x mit dem Exponenten 2^3 potenziert; da x^{2^3} die Kurzschreibweise für $x^{(2^3)}$ ist, erhält man x^8.

3) Potenzieren eines Produkts bzw. eines Quotienten

Betrachten wir gleich den allgemeinen Fall:

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{n \text{ Faktoren } (a \cdot b)} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ Faktoren } a} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{n \text{ Faktoren } b} = a^n \cdot b^n$$

> **Satz 98.2:** Ein Produkt wird potenziert, indem man jeden Faktor potenziert und die entstandenen Potenzen miteinander multipliziert; kurz
>
> $$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Offensichtlich gilt dieser Satz auch für Produkte aus mehr als zwei Faktoren, z.B.: $(a \cdot b \cdot c \cdot d)^n = a^n \cdot b^n \cdot c^n \cdot d^n$.

Beispiele:

1) $(3x)^4 = 3^4 \cdot x^4 = 81x^4$.

2) $(0{,}3 \cdot x^2)^4 = 0{,}3^4 \cdot (x^2)^4 = 0{,}0081x^8$.

Für Brüche erhalten wir analog:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ Faktoren } \frac{a}{b}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ Faktoren } a}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ Faktoren } b}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Satz 99.1: Ein Bruch wird potenziert, indem man Zähler und Nenner potenziert und die Zählerpotenz durch die Nennerpotenz dividiert; kurz

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0 \wedge n \in \mathbb{N}).$$

Beispiele:

1) $\left(\frac{3}{2}xy^3\right)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot x^4 \cdot (y^3)^4 = \frac{3^4}{2^4}x^4y^{12} = \frac{81}{16}x^4y^{12}$.

2) $\left(\frac{3ax^2}{4b^3y}\right)^3 = \frac{(3ax^2)^3}{(4b^3y)^3} = \frac{3^3a^3(x^2)^3}{4^3(b^3)^3y^3} = \frac{27a^3x^6}{64b^9y^3}$.

Aufgaben

1. Berechne die Quadrate der Zahlen von 1 bis 25 und lerne sie auswendig.

2. Wie lauten die dritten Potenzen der Zahlen von 1 bis 10?

3. **a)** $4^3 + 25^2 - 14^2 - 7^3$ **b)** $9^3 - 9^2 + 5^3 - 5^2$
c) $6^3 - 18^2 - 21^2 + 4^3$ **d)** $-23^2 + 8^3 - 16^2 - 3^3$

4. Berechne die Potenzen von 2 bis zum Exponenten 10 und lerne sie auswendig.

5. Berechne die Potenzen von 10 bis zum Exponenten 6.

6. Berechne die Potenzen a^1, a^2, a^3, a^4 für $a = 0; \frac{1}{2}; 1; 2$.

7. Berechne und vergleiche:
a) 2^3 und 3^2 **b)** 3^5 und 5^3
c) $(2+5)^2$ und $2^2 + 5^2$ **d)** $(17-12)^2$ und $17^2 - 12^2$
e) $(3 \cdot 5)^2$ und $3 \cdot 5^2$ **f)** $(12:4)^2$ und $12:4^2$

8. a) Berechne und vergleiche: **1)** $(2^2)^3$ und $(2^3)^2$ **2)** $(3^2)^3$ und $(3^3)^2$
b) Was kann man allgemein von $(a^m)^n$ und $(a^n)^m$ aussagen? Beweis!

9. a) $(\frac{1}{4})^3$ **b)** $(-\frac{2}{3})^2$ **c)** $(1\frac{2}{5})^4$ **d)** $(-\frac{36}{27})^5$ **e)** $0{,}3^2$
f) $-0{,}3^3$ **g)** $0{,}3^4$ **h)** $0{,}03^2$ **i)** $-2{,}5^2$ **k)** $0{,}25^2$

•**10. Rechenvorteil:** $3^8 = (3^4)^2 = 81^2 = 6561$
Berechne in entsprechender Weise:
a) 3^6 **b)** 4^4 **c)** 5^4 **d)** 2^{12} **e)** 2^{20}

11. Zerlege unter Verwendung der Potenzschreibweise folgende Zahlen in ihre Primfaktoren:
a) 512 **b)** 432 **c)** 1400 **d)** 1568
e) 1089 **f)** 1352 **g)** 1331 **h)** 3636

•**12. Rechenvorteil:**
$28 \cdot 75 = (2^2 \cdot 7) \cdot (3 \cdot 5^2) = 3 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 5)^2 = 21 \cdot 100 = 2100$
Berechne ebenso:
a) $12 \cdot 65$ **b)** $24 \cdot 375$ **c)** $625 \cdot 48$
d) $25 \cdot 24 \cdot 15$ **e)** $225 \cdot 64 \cdot 125$ **f)** $12 \cdot 175 \cdot 14$

13. a) $x^3 \cdot x^5$ **b)** $2a^2 \cdot 3a$ **c)** $u \cdot 5u \cdot 2u^3$
d) $\frac{3}{4} \cdot b^5 \cdot \frac{8}{9} \cdot b^2$ **e)** $(ab)^2 \cdot a^3$ •**f)** $3xy^2 \cdot (5xy)^2$
•**g)** $2p^3 \cdot 3(pq^2)^2$ •**h)** $(3u^2v^3)^2 \cdot (2u^2v^3)^3$:**i)** $[2a(3ab^2)^3]^2 \cdot (4a^2b)^2$

14. a) $x(x+y)$ **b)** $v(u-v)$ **c)** $(2a+b) \cdot a^2$
•**d)** $3b^4(5b-2c^2)$ •**e)** $xy^2(2-3x^4y)$ •**f)** $(a^2b+bc^2+1)a^3c$

:**15.** Für welche natürlichen Zahlen a und b gilt $a^b = a \cdot b$?

16. Zehnerpotenzschreibweise. Der besseren Lesbarkeit wegen schreibt man oft große Zahlen als Produkt aus einer Zahl zwischen 1 und 10 und einer Zehnerpotenz. Für 1300000 schreibt man also lieber das Produkt $1{,}3 \cdot 10^6$.
a) Schreibe die folgenden Zahlen mit Hilfe einer Zehnerpotenz:
1) 7840000 **4)** 80500000
2) 100000 **5)** 724
3) 3020 **6)** 17 Billionen
b) Schreibe ohne Zehnerpotenz:
1) $1{,}03 \cdot 10^9$ **4)** $1{,}35 \cdot 10^6$
2) $3 \cdot 10^8$ **5)** $5{,}05 \cdot 10^5$
3) $1{,}5 \cdot 10^{11}$ **6)** $8{,}07 \cdot 10^5$

17. a) $(-\frac{4}{5}x^2y^3)^2$ **b)** $(0{,}02ab^3)^5$ **c)** $(-1\frac{1}{2}r^4s^3)^3$

18. a) $\frac{1}{4} - \frac{2}{3} \cdot (\frac{1}{2})^2$ **b)** $(\frac{1}{4} - \frac{2}{3}) \cdot (\frac{1}{2})^2$ **c)** $\frac{1}{4} - (\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2})^2$
d) $(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2})^2$ **e)** $((\frac{1}{4} - \frac{2}{3}) \cdot \frac{1}{2})^2$ **f)** $(\frac{1}{4} - \frac{2}{3})^2 \cdot \frac{1}{2}$

19. Bestimme die Werte der folgenden Potenzen:

a) $(-1)^2$ **b)** $(-1)^3$ **c)** $(-1)^4$ **d)** $(-1)^5$

e) $(-1)^8$ **f)** $(-1)^{17}$ **g)** $(-1)^{103}$ **h)** $(-1)^{1234}$

i) Welche Werte können Potenzen mit der Grundzahl -1 annehmen? Bei welchen Hochzahlen treten die verschiedenen Potenzwerte auf?

20. Berechne:

a) $(-0{,}1)^2$ **b)** $(-10)^2$ **c)** $(-0{,}1)^3$ **d)** $(-10)^3$

e) $(-0{,}01)^2$ **f)** $(-0{,}01)^3$ **g)** $(-100)^2$ **h)** $(-100)^3$

21. a) $(-a)^2$ **b)** $(-a)^5$ **c)** $(-a)^{32}$ **d)** $(-a)^1$

e) $(-a)^{2n}, n \in \mathbb{N}$ **f)** $(-a)^{2n+1}, n \in \mathbb{N}$ **g)** $(-a)^{2n-1}, n \in \mathbb{N}$

22. a) $(-c)^4 - c^4$ **b)** $(-c)^5 + (-c)^5$ **c)** $(-ab)^3$ **d)** $(-ab)^4$

e) $-(-ab)^4$ **f)** $[-(-ab)]^4$ **g)** $-(-uv)^7$ **h)** $-(-uv^7)$

23. a) $-(-x)^2$ **b)** $-(-x)^3$ **c)** $[-(-x)]^2$ **d)** $[-(-x)]^3$

24. a) $(-a)^2(-b)^3(-c)^4$ **b)** $(-a)^3(-b)^2(-c)^3$

c) $(-\frac{1}{5})^3(-x)^2(-y)^4$ **d)** $(-8a)^4(-\frac{1}{8}a)^3(-8a)^2$

•**e)** $-4a(-\frac{3}{4}a)^2 \cdot (\frac{2}{3}a)^3$:**f)** $(-0{,}5x)^3 \cdot 2{,}7x \cdot (-3{,}4x)^2$

25. a) $1 + (-1)^1$ **b)** $1 + (-1)^2$ **c)** $1 + (-1)^3$ **d)** $1 + (-1)^4$

e) $1 - (-1)^1$ **f)** $1 - (-1)^2$ **g)** $1 - (-1)^3$ **h)** $1 - (-1)^4$

3.3. Umgang mit Klammern

Der Term $(3x + 2y - 5) - (2y - 5 + 3x)$ läßt sich zu 0 vereinfachen, weil Minuend und Subtrahend gleich sind, wie man durch Umordnen des Subtrahenden erkennt. Schwieriger ist es, wenn man einen Term wie $(3x + 2y - 5) - (-8x + 3y - 1)$ vereinfachen will. Die Klammern lassen sich nicht vereinfachen, und dennoch hat man das Gefühl, daß man diesen Term auch einfacher schreiben kann. Tatsächlich geht es auch. Die dazu nötigen Hilfsmittel erarbeiten wir uns in diesem Kapitel.

Es hat sehr lange gedauert, bis sich Klammern als Zeichen für das Zusammenfassen durchgesetzt haben. Zum erstenmal wurden runde Klammern von Michael Stifel (1487?–1567) verwendet, als er in seinem Handexemplar seiner *Arithmetica integra* eine Randbemerkung machte. Bei Niccolò Tartaglia (1499–1557) erschienen sie 1556 in seinem *General trattato di numeri, et misure* im Druck. Wichtig wurden Zusammenfassungszeichen aber erst, als man allgemein mit Buchstaben rechnen wollte. François Viète (1540–1603) faßte 1593 zusammengehörige Ausdrücke durch eckige und geschweifte Klammern zusammen. Viele Mathematiker hatten das Zusammen-