Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

Aufgaben

urn:nbn:de:hbz:466:1-83493

Beispiele:

1) $(3x)^4 = 3^4 \cdot x^4 = 81x^4$.

2) $(0{,}3 \cdot x^2)^4 = 0{,}3^4 \cdot (x^2)^4 = 0{,}0081x^8$.

Für Brüche erhalten wir analog:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ Faktoren } \frac{a}{b}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ Faktoren } a}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ Faktoren } b}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Satz 99.1: Ein Bruch wird potenziert, indem man Zähler und Nenner potenziert und die Zählerpotenz durch die Nennerpotenz dividiert; kurz

$$\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}} \quad (b \neq 0 \wedge n \in \mathbb{N}).$$

Beispiele:

1) $\left(\frac{3}{2}xy^3\right)^4 = \left(\frac{3}{2}\right)^4 \cdot x^4 \cdot (y^3)^4 = \frac{3^4}{2^4}x^4y^{12} = \frac{81}{16}x^4y^{12}$.

2) $\left(\frac{3ax^2}{4b^3y}\right)^3 = \frac{(3ax^2)^3}{(4b^3y)^3} = \frac{3^3a^3(x^2)^3}{4^3(b^3)^3y^3} = \frac{27a^3x^6}{64b^9y^3}$.

Aufgaben

1. Berechne die Quadrate der Zahlen von 1 bis 25 und lerne sie auswendig.

2. Wie lauten die dritten Potenzen der Zahlen von 1 bis 10?

3. **a)** $4^3 + 25^2 - 14^2 - 7^3$ **b)** $9^3 - 9^2 + 5^3 - 5^2$
c) $6^3 - 18^2 - 21^2 + 4^3$ **d)** $-23^2 + 8^3 - 16^2 - 3^3$

4. Berechne die Potenzen von 2 bis zum Exponenten 10 und lerne sie auswendig.

5. Berechne die Potenzen von 10 bis zum Exponenten 6.

6. Berechne die Potenzen a^1, a^2, a^3, a^4 für $a = 0; \frac{1}{2}; 1; 2$.

7. Berechne und vergleiche:
a) 2^3 und 3^2 **b)** 3^5 und 5^3
c) $(2+5)^2$ und $2^2 + 5^2$ **d)** $(17-12)^2$ und $17^2 - 12^2$
e) $(3 \cdot 5)^2$ und $3 \cdot 5^2$ **f)** $(12:4)^2$ und $12:4^2$

8. a) Berechne und vergleiche: **1)** $(2^2)^3$ und $(2^3)^2$ **2)** $(3^2)^3$ und $(3^3)^2$

b) Was kann man allgemein von $(a^m)^n$ und $(a^n)^m$ aussagen? Beweis!

9. a) $(\frac{1}{4})^3$ **b)** $(-\frac{2}{3})^2$ **c)** $(1\frac{2}{5})^4$ **d)** $(-\frac{36}{27})^5$ **e)** $0{,}3^2$

f) $-0{,}3^3$ **g)** $0{,}3^4$ **h)** $0{,}03^2$ **i)** $-2{,}5^2$ **k)** $0{,}25^2$

•**10. Rechenvorteil:** $3^8 = (3^4)^2 = 81^2 = 6561$
Berechne in entsprechender Weise:

a) 3^6 **b)** 4^4 **c)** 5^4 **d)** 2^{12} **e)** 2^{20}

11. Zerlege unter Verwendung der Potenzschreibweise folgende Zahlen in ihre Primfaktoren:

a) 512 **b)** 432 **c)** 1400 **d)** 1568

e) 1089 **f)** 1352 **g)** 1331 **h)** 3636

•**12. Rechenvorteil:**
$28 \cdot 75 = (2^2 \cdot 7) \cdot (3 \cdot 5^2) = 3 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 5)^2 = 21 \cdot 100 = 2100$
Berechne ebenso:

a) $12 \cdot 65$ **b)** $24 \cdot 375$ **c)** $625 \cdot 48$

d) $25 \cdot 24 \cdot 15$ **e)** $225 \cdot 64 \cdot 125$ **f)** $12 \cdot 175 \cdot 14$

13. a) $x^3 \cdot x^5$ **b)** $2a^2 \cdot 3a$ **c)** $u \cdot 5u \cdot 2u^3$

d) $\frac{3}{4} \cdot b^5 \cdot \frac{8}{9} \cdot b^2$ **e)** $(ab)^2 \cdot a^3$ •**f)** $3xy^2 \cdot (5xy)^2$

•**g)** $2p^3 \cdot 3(pq^2)^2$ •**h)** $(3u^2v^3)^2 \cdot (2u^2v^3)^3$:**i)** $[2a(3ab^2)^3]^2 \cdot (4a^2b)^2$

14. a) $x(x+y)$ **b)** $v(u-v)$ **c)** $(2a+b) \cdot a^2$

•**d)** $3b^4(5b-2c^2)$ •**e)** $xy^2(2-3x^4y)$ •**f)** $(a^2b+bc^2+1)a^3c$

:**15.** Für welche natürlichen Zahlen a und b gilt $a^b = a \cdot b$?

16. Zehnerpotenzschreibweise. Der besseren Lesbarkeit wegen schreibt man oft große Zahlen als Produkt aus einer Zahl zwischen 1 und 10 und einer Zehnerpotenz. Für 1300000 schreibt man also lieber das Produkt $1{,}3 \cdot 10^6$.

a) Schreibe die folgenden Zahlen mit Hilfe einer Zehnerpotenz:

1) 7840000 **4)** 80500000
2) 100000 **5)** 724
3) 3020 **6)** 17 Billionen

b) Schreibe ohne Zehnerpotenz:

1) $1{,}03 \cdot 10^9$ **4)** $1{,}35 \cdot 10^6$
2) $3 \cdot 10^8$ **5)** $5{,}05 \cdot 10^5$
3) $1{,}5 \cdot 10^{11}$ **6)** $8{,}07 \cdot 10^5$

17. a) $(-\frac{4}{5}x^2y^3)^2$ **b)** $(0{,}02ab^3)^5$ **c)** $(-1\frac{1}{2}r^4s^3)^3$

18. a) $\frac{1}{4} - \frac{2}{3} \cdot (\frac{1}{2})^2$ **b)** $(\frac{1}{4} - \frac{2}{3}) \cdot (\frac{1}{2})^2$ **c)** $\frac{1}{4} - (\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2})^2$

d) $(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2})^2$ **e)** $((\frac{1}{4} - \frac{2}{3}) \cdot \frac{1}{2})^2$ **f)** $(\frac{1}{4} - \frac{2}{3})^2 \cdot \frac{1}{2}$

19. Bestimme die Werte der folgenden Potenzen:

a) $(-1)^2$ **b)** $(-1)^3$ **c)** $(-1)^4$ **d)** $(-1)^5$
e) $(-1)^8$ **f)** $(-1)^{17}$ **g)** $(-1)^{103}$ **h)** $(-1)^{1234}$
i) Welche Werte können Potenzen mit der Grundzahl -1 annehmen? Bei welchen Hochzahlen treten die verschiedenen Potenzwerte auf?

20. Berechne:

a) $(-0{,}1)^2$ **b)** $(-10)^2$ **c)** $(-0{,}1)^3$ **d)** $(-10)^3$
e) $(-0{,}01)^2$ **f)** $(-0{,}01)^3$ **g)** $(-100)^2$ **h)** $(-100)^3$

21. a) $(-a)^2$ **b)** $(-a)^5$ **c)** $(-a)^{32}$ **d)** $(-a)^1$
e) $(-a)^{2n}, n \in \mathbb{N}$ **f)** $(-a)^{2n+1}, n \in \mathbb{N}$ **g)** $(-a)^{2n-1}, n \in \mathbb{N}$

22. a) $(-c)^4 - c^4$ **b)** $(-c)^5 + (-c)^5$ **c)** $(-ab)^3$ **d)** $(-ab)^4$
e) $-(-ab)^4$ **f)** $[-(-ab)]^4$ **g)** $-(-uv)^7$ **h)** $-(-uv^7)$

23. a) $-(-x)^2$ **b)** $-(-x)^3$ **c)** $[-(-x)]^2$ **d)** $[-(-x)]^3$

24. a) $(-a)^2(-b)^3(-c)^4$ **b)** $(-a)^3(-b)^2(-c)^3$
c) $(-\frac{1}{5})^3(-x)^2(-y)^4$ **d)** $(-8a)^4(-\frac{1}{8}a)^3(-8a)^2$
•**e)** $-4a(-\frac{3}{4}a)^2 \cdot (\frac{2}{3}a)^3$:**f)** $(-0{,}5x)^3 \cdot 2{,}7x \cdot (-3{,}4x)^2$

25. a) $1+(-1)^1$ **b)** $1+(-1)^2$ **c)** $1+(-1)^3$ **d)** $1+(-1)^4$
e) $1-(-1)^1$ **f)** $1-(-1)^2$ **g)** $1-(-1)^3$ **h)** $1-(-1)^4$

3.3. Umgang mit Klammern

Der Term $(3x + 2y - 5) - (2y - 5 + 3x)$ läßt sich zu 0 vereinfachen, weil Minuend und Subtrahend gleich sind, wie man durch Umordnen des Subtrahenden erkennt. Schwieriger ist es, wenn man einen Term wie $(3x + 2y - 5) - -(-8x + 3y - 1)$ vereinfachen will. Die Klammern lassen sich nicht vereinfachen, und dennoch hat man das Gefühl, daß man diesen Term auch einfacher schreiben kann. Tatsächlich geht es auch. Die dazu nötigen Hilfsmittel erarbeiten wir uns in diesem Kapitel.

Es hat sehr lange gedauert, bis sich Klammern als Zeichen für das Zusammenfassen durchgesetzt haben. Zum erstenmal wurden runde Klammern von Michael STIFEL (1487?–1567) verwendet, als er in seinem Handexemplar seiner *Arithmetica integra* eine Randbemerkung machte. Bei Niccolò TARTAGLIA (1499–1557) erschienen sie 1556 in seinem *General trattato di numeri, et misure* im Druck. Wichtig wurden Zusammenfassungszeichen aber erst, als man allgemein mit Buchstaben rechnen wollte. François VIÈTE (1540–1603) faßte 1593 zusammengehörige Ausdrücke durch eckige und geschweifte Klammern zusammen. Viele Mathematiker hatten das Zusammen-