Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

3.3 Umgang mit Klammern

urn:nbn:de:hbz:466:1-83493

19. Bestimme die Werte der folgenden Potenzen:

a) $(-1)^2$ **b)** $(-1)^3$ **c)** $(-1)^4$ **d)** $(-1)^5$
e) $(-1)^8$ **f)** $(-1)^{17}$ **g)** $(-1)^{103}$ **h)** $(-1)^{1234}$
i) Welche Werte können Potenzen mit der Grundzahl -1 annehmen? Bei welchen Hochzahlen treten die verschiedenen Potenzwerte auf?

20. Berechne:

a) $(-0{,}1)^2$ **b)** $(-10)^2$ **c)** $(-0{,}1)^3$ **d)** $(-10)^3$
e) $(-0{,}01)^2$ **f)** $(-0{,}01)^3$ **g)** $(-100)^2$ **h)** $(-100)^3$

21. a) $(-a)^2$ **b)** $(-a)^5$ **c)** $(-a)^{32}$ **d)** $(-a)^1$
e) $(-a)^{2n},\ n \in \mathbb{N}$ **f)** $(-a)^{2n+1},\ n \in \mathbb{N}$ **g)** $(-a)^{2n-1},\ n \in \mathbb{N}$

22. a) $(-c)^4 - c^4$ **b)** $(-c)^5 + (-c)^5$ **c)** $(-ab)^3$ **d)** $(-ab)^4$
e) $-(-ab)^4$ **f)** $[-(-ab)]^4$ **g)** $-(-uv)^7$ **h)** $-(-uv^7)$

23. a) $-(-x)^2$ **b)** $-(-x)^3$ **c)** $[-(-x)]^2$ **d)** $[-(-x)]^3$

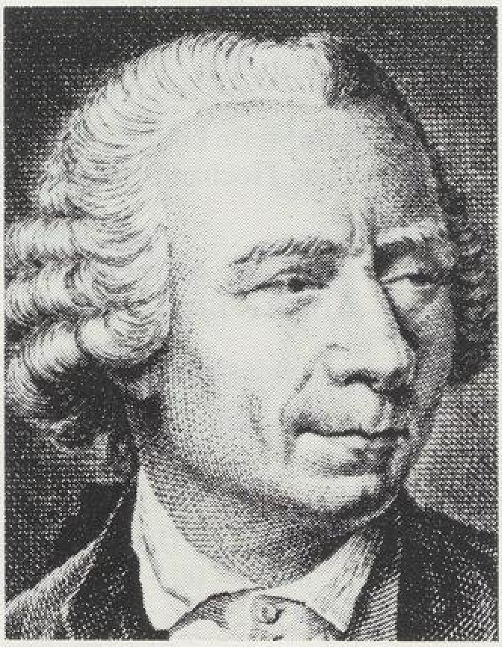
24. a) $(-a)^2(-b)^3(-c)^4$ **b)** $(-a)^3(-b)^2(-c)^3$
c) $(-\frac{1}{5})^3(-x)^2(-y)^4$ **d)** $(-8a)^4(-\frac{1}{8}a)^3(-8a)^2$
• **e)** $-4a(-\frac{3}{4}a)^2 \cdot (\frac{2}{3}a)^3$: **f)** $(-0{,}5x)^3 \cdot 2{,}7x \cdot (-3{,}4x)^2$

25. a) $1 + (-1)^1$ **b)** $1 + (-1)^2$ **c)** $1 + (-1)^3$ **d)** $1 + (-1)^4$
e) $1 - (-1)^1$ **f)** $1 - (-1)^2$ **g)** $1 - (-1)^3$ **h)** $1 - (-1)^4$

3.3. Umgang mit Klammern

Der Term $(3x + 2y - 5) - (2y - 5 + 3x)$ läßt sich zu 0 vereinfachen, weil Minuend und Subtrahend gleich sind, wie man durch Umordnen des Subtrahenden erkennt. Schwieriger ist es, wenn man einen Term wie $(3x + 2y - 5) - - (-8x + 3y - 1)$ vereinfachen will. Die Klammern lassen sich nicht vereinfachen, und dennoch hat man das Gefühl, daß man diesen Term auch einfacher schreiben kann. Tatsächlich geht es auch. Die dazu nötigen Hilfsmittel erarbeiten wir uns in diesem Kapitel.

Es hat sehr lange gedauert, bis sich Klammern als Zeichen für das Zusammenfassen durchgesetzt haben. Zum erstenmal wurden runde Klammern von Michael Stifel (1487?–1567) verwendet, als er in seinem Handexemplar seiner *Arithmetica integra* eine Randbemerkung machte. Bei Niccolò Tartaglia (1499–1557) erschienen sie 1556 in seinem *General trattato di numeri, et misure* im Druck. Wichtig wurden Zusammenfassungszeichen aber erst, als man allgemein mit Buchstaben rechnen wollte. François Viète (1540–1603) faßte 1593 zusammengehörige Ausdrücke durch eckige und geschweifte Klammern zusammen. Viele Mathematiker hatten das Zusammengehören durch Unterstreichen ausgedrückt. René DESCARTES (1596–1650) führte statt dessen 1637 das Überstreichen ein, das durch seine Schüler allgemeine Verbreitung fand; man schrieb also $\overline{7+3}:5$ an Stelle des heutigen $(7+3):5$. Da aber für die Druckereien Klammern bequemer zu setzen waren als Überstreichungen, setzten sie sich immer mehr durch. Leonhard EULER (1707–1783) verwandte 1770 in seiner *Vollständigen Anleitung zur Algebra* zum erstenmal das deutsche Wort *Klammer*.



1753

Abb. 102.1 Leonhard EULER (15.4.1707 Basel – 18.9.1783 St. Petersburg)

3.3.1 Rechenzeichen und Vorzeichen

Wir erinnern daran, daß die Subtraktion zweier Terme nichts anderes ist als die Addition des Gegenterms:

$$a-b=a+(-b).$$

Das Rechenzeichen Minus auf der linken Seite verwandelt sich dabei zum Vorzeichen Minus auf der rechten Seite. Das Vorzeichen Plus bei a lassen wir wie üblich weg.

Stehen vor einem Term mehrere Vorzeichen, so kann man sie immer mit der Vorzeichenregel auf eines reduzieren; nämlich

$$+(+a)=+a=a \qquad -(+a)=-a$$
$$+(-a)=-a \qquad -(-a)=+a=a.$$

Man kann damit auch ganze Vorzeichenserien abbauen:

$$\begin{aligned}-(-(+(-(+(-a)))))&=-(-(+(-(-a))))=\\&=-(-(+(+a)))=\\&=-(-(+a))=\\&=-(-a)=\\&=a.\end{aligned}$$

Wir haben die Serie dabei von innen nach außen abgebaut. Genausogut könnte man sie auch von außen nach innen abbauen.

Aufgaben

1. Reduziere auf ein Vorzeichen:
   a) $+(+3a)$ **b)** $-(-\frac{4}{3}b)$
   c) $-(+xyz)$ **d)** $+(-4ab)$
   e) $-(+(-7xy))$ **f)** $-(-(-(-(+(-13u)))))$

2. Reduziere auf ein Vorzeichen:
   a) $+(a-b)$ **b)** $-(-(a-b))$ **c)** $-(+(-(a-b)))$

3. Du erinnerst dich sicher:
   - Malpunkte in Produkten dürfen vor Variablen und Klammern weggelassen werden, z. B. $3 \cdot a \cdot (x-y) = 3a(x-y)$.
   - Das Pluszeichen bei gemischten Zahlen kann entfallen, also $1+\frac{3}{4} = 1\frac{3}{4}$.
   - Das Pluszeichen als Vorzeichen am Anfang schreibt man nicht, z. B. $+2ab+5a-b = 2ab+5a-b$.

   Was versteht man nun eigentlich unter dem Term $-1\frac{1}{3}b$?
   Welche der folgenden Vorschläge hältst du für richtig:
   a) $(-1)\cdot\frac{1}{3}\cdot b$ **b)** $-(1+\frac{1}{3})\cdot b$
   c) $-1+\frac{1}{3}\cdot b$ **d)** $(-1-\frac{1}{3})\cdot b$
   e) $(-1+\frac{1}{3})\cdot b$ **f)** $-(1+\frac{1}{3}\cdot b)$?

3.3.2 Plusklammern

Steht in einem Aggregat vor einer Klammer ein Pluszeichen, so spricht man kurz von einer **Plusklammer**, z. B. $3x+(7y-5x+8)$. Weil es üblich ist, am Anfang keine Pluszeichen zu schreiben – denke etwa daran, daß $3+5$ auch als $+3+5$ geschrieben werden kann – so ist auch eine am Anfang stehende Klammer eine Plusklammer: $(3x+5)+8x$.
Diese Plusklammern wollen wir nun beseitigen. Dabei hilft uns das verallgemeinerte Assoziativgesetz. Weil es nur von Summen handelt, müssen wir gegebenenfalls den Inhalt der Plusklammer als Aggregat, d. h. als algebraische Summe, betrachten und dann das verallgemeinerte Assoziativgesetz anwenden.

Beispiel:
$$\begin{aligned} a+(-b-c+d) &= a+((-b)+(-c)+d) = \\ &= a+(-b)+(-c)+d = \\ &= a-b-c+d. \end{aligned}$$

Untersuchen wir das vorgeführte Beispiel auf das Wesentliche, so erkennen wir

Satz 104.1: In einem Aggregat kann eine Plusklammer mitsamt ihrem Plusrechenzeichen weggelassen werden, ohne daß sich der Wert des Aggregats ändert. Die Rechenzeichen in der Klammer bleiben erhalten. Falls vor dem ersten Glied in der Klammer kein Zeichen steht, so muß ein Plusrechenzeichen gesetzt werden; kurz:
Plusklammern können weggelassen werden, Rechenzeichen bleiben.

Wenn man bedenkt, daß der Inhalt der Plusklammer ein Aggregat ist, dann läßt sich dieser Satz auch noch anders ausdrücken, nämlich:

Ein Aggregat wird addiert, indem man jedes Glied des Aggregats einzeln addiert.

Nach Satz 104.1 kann man also Plusklammern an beliebiger Stelle in einem Aggregat weglassen. Umgekehrt kann man sie demnach an beliebiger Stelle setzen! Wir merken uns

Satz 104.2: Ein Aggregat ändert seinen Wert nicht, wenn man beliebig viele Glieder in einer Plusklammer zusammenfaßt und dabei ihre Rechenzeichen beibehält, z. B.

$$\boldsymbol{a+b-c+d-e-f=a+(b-c+d)+(-e-f)}.$$

Nun können wir endlich das eingangs angeführte Aggregat vereinfachen:

$$\begin{aligned}3x+(7y-5x+8) &= 3x+7y-5x+8=\\ &= 7y+3x-5x+8=\\ &= 7y+(3x-5x)+8=\\ &= 7y-2x+8.\end{aligned}$$

Aufgaben

1. **a)** $5a+(3b+7a)$ **b)** $(5a+3b)+7a$
c) $5a+(3b-7a)$ **d)** $-5a+(-3b+7a)$
e) $(-5a+3b)-7a$ **f)** $-5a+(-3b-7a)$

2. **a)** $(2x+4y)+(6x+4y)$ **b)** $(2x-4y)+(-6x+4y)$
c) $(-2x+4y)+(6x-4y)$ **d)** $(-2x-4y)+(-6x-4y)$
e) $2x+(-4y+6x-4y)$ **f)** $-2x+(4y-6x)-4y$

3. **a)** $3a + (9x + 7a) + (15a + 11x)$
b) $17b + (15a + 9b) + 2a + (11a + b)$
c) $14x + (20a + 7b + 4x) + (9x + 13a + 31b)$
d) $11a + (13b + (12a + 19b)) + ((4a + 27b) + 14a)$

4. $(9 + 11b + 13c) + (15b + 17 + 19c) + (21c + 23b + 25)$

5. $12x + (23x + 27y) + (-29y + 3z - 4u) + (43z + 47u - 59x) + + (-43u - 7x - 2y) + (-19x + 4y - 46z)$

•**6.** $2 + x + (x + (y + 2) + (x + 2)) + (((x + 2) + 2) + 2)$

•**7.** $n + 1 + (r + 1) + ((n + 1) + (r + 1)) + (2 + (2n + 1) + (2r + 1))$

•**8.** $(-2 + x) + (1 - x + ((1 - x) + (-1 + x))) + ((1 - x) + (x + 1))$

9. **a)** Wie lautet die Quersumme* q der Zahl $10 \cdot x + y$; $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $y \in \{0; 1; 2; 3; 4; \ldots; 9\}$?
b) Warum sind alle Zahlen der Form $10 \cdot x + (9 - x)$ mit $x \in \{0; 1; 2; \ldots; 9\}$ durch 9 teilbar?
•**c)** Sind auch alle Zahlen der Form $100 \cdot x + (99 - x)$ mit $x \in \{0; 1; 2; \ldots; 99\}$ durch 9 teilbar?
:**d)** Welche gemeinsamen Teiler haben alle Zahlen aus **c)**?

3.3.3 Minusklammern

Steht in einem Aggregat vor einer Klammer ein Minuszeichen, so spricht man kurz von einer **Minusklammer**, z. B. $3x - (7y - 5x + 8)$.
Diese Minusklammer wollen wir nun beseitigen. In Satz 75.1 haben wir gezeigt, daß $-a = (-1) \cdot a$ ist. Setzen wir an Stelle von a ein Aggregat, dann erhalten wir z. B.

$$-(b - c - d + e) = (-1) \cdot (b - c - d + e) = (-1) \cdot (b + (-c) + (-d) + e).$$

Mit Hilfe des Distributivgesetzes ergibt sich für die rechte Seite

$$(-1) \cdot b + (-1) \cdot (-c) + (-1) \cdot (-d) + (-1) \cdot e = -b + c + d - e.$$

Also gilt:

$$-(b - c - d + e) = -b + c + d - e.$$

Mit dieser Erkenntnis können wir nun auch Minusklammern im Innern eines Aggregats beseitigen:

$$\begin{aligned} a - (b - c - d + e) &= a + [-(b - c - d + e)] = \\ &= a + (-1) \cdot (b - c - d + e) = \\ &= a + (-b + c + d - e) = \\ &= a - b + c + d - e. \end{aligned}$$

* Das bequeme Fachwort **Quersumme** scheint erst im 19. Jh. aufgekommen zu sein.

Weil sich unsere Überlegungen auf jedes Aggregat übertragen lassen, gilt:

Satz 106.1: In einem Aggregat kann man, ohne daß sich der Wert des Aggregats ändert, eine Minusklammer mitsamt ihrem Minuszeichen weglassen, wenn man alle Rechenzeichen in der Klammer ändert, d. h. Pluszeichen durch Minuszeichen und Minuszeichen durch Pluszeichen ersetzt. Falls vor dem ersten Glied in der Klammer kein Zeichen steht, so muß ein Minuszeichen gesetzt werden;
kurz: **Minusklammern dürfen weggelassen werden, wenn alle Rechenzeichen geändert werden.**

Beispiel:

$$3x - (7y - 5x + 8) = 3x - 7y + 5x - 8 = 8x - 7y - 8.$$

Wenn man bedenkt, daß der Inhalt der Minusklammer ein Aggregat ist, dann läßt sich dieser Satz auch noch anders ausdrücken, nämlich:

Ein Aggregat wird subtrahiert, indem man jedes Glied des Aggregats subtrahiert.

Beispiel:

$$\begin{aligned} 3x - (7y - 5x + 8) &= 3x - 7y - (-5x) - 8 = \\ &= 3x - 7y + 5x - 8 = \\ &= 8x - 7y - 8. \end{aligned}$$

Nach Satz 106.1 kann man also Minusklammern an beliebigen Stellen in einem Aggregat weglassen, wenn man alle Rechenzeichen in der Klammer ändert. Umgekehrt kann man demnach Minusklammern an beliebigen Stellen setzen, wenn man die Rechenzeichen bei den Gliedern ändert, die in die Minusklammer kommen. Wir haben damit

Satz 106.2: Ein Aggregat ändert seinen Wert nicht, wenn man beliebig viele Glieder in einer Minusklammer zusammenfaßt und dabei alle Rechenzeichen ändert, z. B.

$$\boldsymbol{a + b - c + d - e - f = a - (-b + c - d) - (e + f).}$$

Wie man mit diesem Satz arbeitet, zeigen wir an folgendem

Beispiel:
$$\begin{aligned} -(-2a + 3b) - (5b + 8a) &= 2a - 3b - 5b - 8a = \\ &= (2a - 8a) - (3b + 5b) = \\ &= -6a - 8b. \end{aligned}$$

Aufgaben

1. **a)** $5a-(3b+7a)$ **b)** $5a-(3b-7a)$
c) $5a-(-3b+7a)$ **d)** $5a-(-3b-7a)$

2. **a)** $(2x-4y)-(6x-4y)$ **b)** $(2x+4y)-(6x+4y)$
c) $(2x+4y)-(6x-4y)$ **d)** $(-2x-4y)-(6x-4y)$
e) $(-2x+4y)-(-6x-4y)$ **f)** $-2x-(4y-6x)-4y$

3. **a)** $3a-(9x+7a)-(-4a-11x)$
b) $17b-(15a-9b)-2a+(-17a-26b)$
c) $14x-(-20a+7b-4x)-(-9x+19a+17b)+6x$
d) $11a+(13b+(12a-19b))-((4a-17b)+19a)$

4. $(9-11b+13c)-(15b+17-19c)-(-21c-26b+18)$

5. $12x-(23x-27y)-(-29y+3z+4u)+(-43z-47u-59x)-$
$-(-51u-16x+56y)-(7z+x)$

6. **a)** $\frac{5}{3}+a-(\frac{1}{6}-2\frac{1}{2}a)$
b) $-\frac{2}{3}b+\frac{1}{2}a+3\frac{1}{3}c-(-c-1\frac{1}{2}b)$
c) $-(-a+7\frac{1}{2}-4\frac{2}{5})-(6\frac{3}{10}+a-9\frac{2}{5})$
d) $(5{,}7-b)-(a+3{,}6)-(9{,}6-b)+(2{,}4+a)$

7. **a)** $-(-a+\frac{7}{3}b-21c+9{,}05)+(2\frac{1}{3}b-9{,}5)$
b) $-(-(-3{,}5u+5{,}5v-7w))-(3{,}5u-5{,}5v-7w)$

8. **a)** $(-\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y-2)-(-\frac{3}{10}x+\frac{4}{5}y-\frac{5}{2})-\frac{23}{6}x$
b) $(\frac{2}{3}a-1-\frac{7}{11}b)-(-\frac{1}{3}a-\frac{5}{11}b)-(1-\frac{10}{11}b)$
c) $(\frac{1}{5}r-\frac{5}{2}s-3)-(-\frac{1}{10}r+\frac{4}{5}s-\frac{11}{2})$

9. **a)** $(3x^2-2x+1)-(-2x^2+4x-6)$
b) $(7x^3-3x+2)-(-4x+5x^3+3)$
c) $(-3x^3+2x-3)-(4x^2-5-2x)-6x^3$
d) $-(6x^3-2x^2+5)-(3x^3+7x^2-2)$

10. **a)** $(\frac{3}{4}ab-\frac{5}{3}a^2b+1)-(-\frac{1}{4}ab+\frac{2}{3}a^2b)+(-ab+\frac{7}{3}a^2b)$
b) $(\frac{5}{2}a^2+\frac{4}{3}a-7)-(a^2+\frac{1}{3}a-5)-(\frac{3}{2}a^2+a-3)$

3.3.4 Faktor bei der Klammer

Bisher haben wir gelernt, wie man bei Aggregaten vom Typ $a+(b-c)-$ $-(e+f-g)$ die Klammern auflöst. Was aber, wenn vor einer dieser Klammern noch ein Faktor steht? Jetzt muß doch auch die Regel »Punkt vor Strich« berücksichtigt werden. Die einfachsten Fälle sind $a+b(c+d-e)$

und $a - b(c + d - e)$. Die schwierigeren Fälle, wo beide Faktoren Klammern sind, wie z.B. $a + (b - c)(d - e + f)$, betrachten wir erst in **7.1**.
Nun zum ersten Fall:
Wegen der Regel »Punkt vor Strich« können wir eine zusätzliche Klammer setzen, ohne daß sich der Wert des Aggregats ändert:

$$a + b(c + d - e) = a + (b(c + d - e)).$$

Wir wenden auf den Inhalt der roten Klammer das Distributivgesetz an:

$$a + (b(c + d - e)) = a + (bc + bd - be).$$

Nach unserer Klammerregel (Satz 104.1) können wir die rote Plusklammer einfach weglassen. Damit haben wir:

$$a + b(c + d - e) = a + bc + bd - be.$$

Den zweiten Fall können wir analog behandeln:

$$\begin{aligned} a - b(c + d - e) &= a - (b(c + d - e)) = && \text{Punkt vor Strich} \\ &= a - (bc + bd - be) = && \text{Distributivgesetz} \\ &= a - bc - bd + be. && \text{Satz 106.1} \end{aligned}$$

Vergleichen wir in beiden Fällen das gegebene Aggregat mit dem Ergebnis der Umformungen, so erkennen wir

Satz 108.1: Steht in einem Aggregat bei einer Klammer ein Faktor, so multipliziert man jedes Glied in der Klammer mit diesem Faktor unter Berücksichtigung der Vorzeichen.

$$\boldsymbol{a + b(c + d - e) = a + bc + bd - be.}$$
$$\boldsymbol{a - b(c + d - e) = a - bc - bd + be.}$$

Beispiele:

1) $3x - 5y(2 - 2x + 3y) + 2x(-6 + x - 5y) =$
$= 3x - 10y + 10xy - 15y^2 - 12x + 2x^2 - 10xy =$
$= 2x^2 - 9x - 15y^2 - 10y.$

2) $5 \cdot (\frac{1}{10}ab - \frac{2}{5}b) - \frac{3}{2}a(-\frac{5}{6}b + 1\frac{1}{3}) + b(2 - \frac{7}{4}a) =$
$= \frac{1}{2}ab - 2b + \frac{5}{4}ab - 2a + 2b - \frac{7}{4}ab =$
$= -2a.$

Aufgaben

1. **a)** $3a + 5(2a - b)$ **b)** $x - 3(1 - x)$
c) $3 + x(1 - x)$ **d)** $12z^2 - 3z(-2 + 4z)$

2. $6(2a + 3b - 7c) + 7(4a - 3b + 7c) - 8(5a - 4b + 3c)$

3. $15(a+b-3)-6(3a-2b)+7(4-3b)-8(5-2a)$

4. **a)** $a(a-2b)-b(2a-b)$ **b)** $a(2a+3b)-b(2a+5b)$

5. $x(x-1)-3x^2+4x(2x+1)-6(3x+2)$

6. $15a(3x-4y+7a)+12x(11a-7y+4x)-10y(13x-4a+11y)$

7. $(3b^2-4ab)2b-3a(4ab+b^2)-5ab(3a-2b)$

•**8.** $(12a^2b-13ab^2+b^3)5a-(11a^3-32a^2b-19ab^2)\cdot 3b-$
$-16ab(a^2+2ab+4b^2)$

•**9.** $5a^2bc(2ac-3bc^2)-7abc^2(3abc+4b^2c^2)-8b^3c^2(2ac^2-3bc^3)-$
$-4ab^2c^3(-9a-11bc)$

••**10.** $17a^2xy(9a^2x^2y-11ax^3y^3+10xy^2)-21ax^2y^2(12a^2x^2y^2+$
$+15ay-9a^3x)+23axy(7axy^2-5a^3x^2y+9a^2x^3y^3)$

11. $5ab(3ab+4ac-bc)-3ac(3bc-4ac+5ab)-$
$-4bc(3ab-4ac+bc)-4c^2(3a^2-b^2+2ab)-15a^2b^2$

•**12.** $40a^2bc^3-4ab^2(3a^2c+3ac^2+4bc^3)+3a^2c(4ab^2-2bc^2-4b^2c)-$
$-5abc(9ac^2-4abc-4b^2c^2)+4bc^2(5a^2c-ab^2c+a^2b)$

13. $2x(1-x(3-5x+2x^2)-x^2(2-3x))-4x^2(2x-2)$

14. $a(a+b-2)-b(a+b-3)-4(a-b)-7(b-\frac{6}{7}a)$

15. $4(x-y+5)-5(x+y)+17(y-x-3)$

16. $50x-12(x+y-z)-14(x-y+z)+17(y+z-x)$

17. $(a-b-5+c)\cdot 3+(b-a+c-11)\cdot 7-(c+a-b-14)\cdot 6-$
$-(2c+5b-5a)\cdot 2$

18. $27(a+b+c)-29(a-b+c)+31(a+b-c)-35(b-c-a)$

19. $(x+y+z)\cdot 17-(x-4-z)\cdot 12-(y-15-x)\cdot 13-3(6x-49)$

20. $5(a+x-3)+6x-(x-a-3)\cdot 7-3a-4(a-x)$

21. $(a-b)\cdot 5+7(a+b)-(a-7)\cdot 5-7(a+5)$

22. $100-99(a+b-1)-50+49(b+a-1)+50(a+b-2)$

23. $(x-y-z-2)\cdot 2+3-4(z-y-x-5)+(x+4)\cdot 8-5(y+2)$

24. $a(1+b+c)-b(2+a-c)-c(3+a+b)$

25. $y+y(1-y)-y(2-y)+y^2$

26. $x(n+1)-x(n-1)+x(n-2)-nx+3x$

27. $x^2-x(a+x)+x-x(a-1)+(a+1+x)x-x(3-a)$

28. $4b+a(x-3)+a(7-x)+a-(a+b)\cdot 4$

29. $a(a+b)+c(a+b)-ac-c^2+b(a+b)-bc-2ab$

30. $a^2+c(b-c)+ac-b(b-c)+a(b-c)-ab-2bc$

31. **a)** $3a-(7b-a)+15(2a+b)$ **b)** $-w(7-8v)+3w(2-3v)$

c) $7(17+8\tfrac{4}{5}x)-(x+7)\cdot 17$

d) $3(2x+11y)+7y(1+5x)+y(-2+x)$

32. $a(a^2b+a^3c^2)+a^3(2b+ac^2)$

33. $x^2(5a+bx)+3a(2b+x^2)+2b(a+2x^3)-8a(x^2+b)$

•**34.** $p^2q(2pr+4r^3+7rq^2)+2r(p^2q^3+5p^2q+2p^2qr^2)-$
$-2pqr(p^2+pq^2+5p)$

35. **a)** $0{,}5x(0{,}8x-0{,}6y)-0{,}4y(1{,}5y-2{,}5x)$

b) $2\tfrac{1}{2}a(4\tfrac{2}{5}a-6\tfrac{1}{4}b)-2\tfrac{2}{5}b(3\tfrac{3}{4}a+8\tfrac{1}{3}b)$

c) $6\tfrac{3}{7}b(4\tfrac{1}{5}b-11\tfrac{2}{3}a)-4\tfrac{4}{9}a(3\tfrac{3}{8}b-5\tfrac{2}{5}a)$

36. **a)** $u(v-w)+v(w-u)+w(u-v)$

b) $x(y+z)-y(x+z)+z(x-y)$

c) $5xy+3y(2x+1)-6x(y-2)+2(x-y)$

37. **a)** $4pqr-(8prs-11qrs)-(7prq-6rsq+4srp)\cdot(-2)$

b) $2a(9b-6c)-b(6a+15c)+3c(4a-2b)$

c) $2ab(5+c)-7b(3a+ac)-ab(18c-7\cdot 3c)$

38. **a)** $6p(3pq+q^2)-2q(9pq-3p^2)+8pq(p-q)$

b) $\tfrac{4}{5}a^2b^2(15c^2-5)+\tfrac{3}{2}ab(8ab-10abc^2)-7a^2b^2$

39. **a)** $3(\tfrac{5}{6}xy-\tfrac{2}{3}y)-\tfrac{2}{3}x(-\tfrac{9}{8}y-1\tfrac{1}{2})+26y(\tfrac{1}{13}-\tfrac{1}{8}x)$

b) $3\tfrac{1}{7}a(1\tfrac{3}{11}a-b+7)-3\tfrac{1}{6}b(\tfrac{18}{95}b-\tfrac{120}{133}a-6)-$
$-(63\tfrac{7}{9}b-\tfrac{4}{9}ab+6\tfrac{2}{9}a^2)\cdot\tfrac{9}{14}+\tfrac{3}{5}b^2$

•**c)** $(-0{,}2x)^2(-0{,}2+x)-0{,}2x^2(0{,}2^2-x)-(-0{,}2x)^3$

3.3.5 Schachtelklammern

Bei komplizierteren Termen kommt es vor, daß in Klammern Klammern stehen, in denen womöglich wieder Klammern stehen usw.

Beispiel: $4a-(-1+3(2a-(a+3)))$.

Wenn es dabei zu unübersichtlich wird, verwendet man auch verschiedene Klammerarten, z. B. runde und eckige Klammern.

Beispiel: $4a-(-1+3[2a-(a+3)])$.

Mit Hilfe unserer Klammerregeln können wir jetzt solche »Schachtelklammern« auflösen. Man kann dabei verschieden vorgehen. Wir empfehlen die

Regel 111.1:
1. Vereinfache, falls möglich, in jeder Klammer.
2. Löse die innerste Klammer auf.
3. Vereinfache wieder.
4. Wiederhole 2. und 3. so lange, bis keine Klammern mehr vorhanden sind.

Beispiele:

1) $$\begin{aligned} 4a-(-1+3[2a-(a+3)]) &= 4a-(-1+3[2a-a-3]) = \\ &= 4a-(-1+3[a-3]) = \\ &= 4a-(-1+3a-9) = \\ &= 4a-(-10+3a) = \\ &= 4a+10-3a = \\ &= a+10. \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} &(3x-(7yz+3z(-3+2x-5y)-6xz))(-5)-(8z-15x) = \\ &= (3x-(7yz-9z+6xz-15yz-6xz))(-5)-8z+15x = \\ &= (3x-(-8yz-9z))(-5)-8z+15x = \\ &= (3x+8yz+9z)(-5)-8z+15x = \\ &= -15x-40yz-45z-8z+15x = \\ &= -53z-40yz. \end{aligned}$$

Aufgaben

1. **a)** $(3a^2+4b)-(5a^2-(2a^2-b))$
   b) $(7a^3-2b)-(4a^3-(4b-(3a^3-b)))$
2. **a)** $5x^3-xy-(3xy-(2x^3+y^2+6xy))-(3xy-(2x^3+xy))$
   b) $2xy-4x^3-(2xy-(3x^3-y^2-8xy))-(-2y^2-(8xy+10x^3))$
3. **a)** $3a^4-b^2+(5ab-(2a^4-3b^2))-(8ab-(b^2-2a^4))$
   b) $6ab-a^4-(2ab-(4a^4-b^2))+(-4a^4-(7ab-4b^2))$
4. **a)** $-(-a+(7b-(21c-9)))$ **b)** $-[-(-3u+5v-7w)]$
   c) $-[(x-3y)-(-2x+y+1)]$
   d) $-\{-[(6m-9n)-(-p-q)]-(1+5m+10n)\}-(1+p+q)$
5. $0{,}5u[3v^3+(2{,}4uv-1)]+3[2u-1{,}8uv(u+v^2)]$

•6. $((11-16x+17x^2)\cdot 3x-5x(6-10x+10x^2))\cdot 3x-$
$-4x((x+2)x+1)+1$

•**7.** $((2a+3b)2b-(3a-2b)3a)ab^2+(3a(2a-3b)-$
$-2b(3a+2b))a^2b$

•**8.** $5a(6-4(3-a))-(5a(6a-11)-4(3a^2-6a+6))-24$

••**9.** $6[((3x-1)2-4(x+5))\cdot 5-4(2-2(3-3(4-5x)))]-$
$-20(39x-58)-19$

10. $3a((5a-4)\cdot 5-(2a-7+2a^2)+6a(2a-4))-5a^2(3a-4)$

••**11.** $((a^2+ab+b^2)b-a(a^2+ab+b^2))b-a(b^3+2ab^2-a^2b)+b^3(b+a)$

12. $(a^2+2b(2b-3a))a-b(b^2-2a(2a-b))+b^3-a^3$

13. $2(3-4(5-6(7-x)))-7(6-5(4-3(2-x)))$

•**14.** $2x(4x((3x-2)\cdot 5-3(2x-4))+6(3x-1))-3x^2(x(20-x)+20)$

•**15.** $a(25a-((4a+3)\cdot 4-15a)\cdot 2a+3(a+4(a-2)))+$
$+4(a(a+a(a+1))+a)$

16. $(\frac{7}{15}x-3x^2)-(3x^2-\frac{1}{3}x-(2x^2-2-4x+\frac{1}{3})+(\frac{4}{5}x-\frac{2}{3}x^2-\frac{13}{15}))$

••**17.** $x^2-(\frac{1}{4}x+3x^2-(2x^2-3x-(4x^2-\frac{1}{5}x+2)+\frac{3}{4}x^3)-\frac{1}{5}x^3)+$
$+(\frac{61}{20}x-\frac{19}{20}x^3)+2$

18. $\frac{1}{3}ab^2-(6ac^2-c^3-2a(c^2-\frac{1}{8}b^2)+ab^2-\frac{5}{3}c^3)+\frac{11}{12}ab^2+4ac^2$

19. $\frac{1}{4}b^3+4a^2-(\frac{3}{2}(3bc-4)-(a^2-bc-2ab)+\frac{8}{9}bc)-\frac{1}{4}b^3-6-\frac{11}{18}bc$

••**20.** $\frac{1}{4}b^2(7ab-\frac{1}{2}a^2)-\frac{3}{4}b(ab(b-\frac{5}{6}a)+\frac{1}{10}ab^2)-\frac{1}{40}ab^2(20a+37b)$