Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

3.3.3 Minusklammern

3. **a)** $3a + (9x + 7a) + (15a + 11x)$

b) $17b + (15a + 9b) + 2a + (11a + b)$

c) $14x + (20a + 7b + 4x) + (9x + 13a + 31b)$

d) $11a + (13b + (12a + 19b)) + ((4a + 27b) + 14a)$

4. $(9 + 11b + 13c) + (15b + 17 + 19c) + (21c + 23b + 25)$

5. $12x + (23x + 27y) + (-29y + 3z - 4u) + (43z + 47u - 59x) +$
$+ (-43u - 7x - 2y) + (-19x + 4y - 46z)$

•**6.** $2 + x + (x + (y + 2) + (x + 2)) + (((x + 2) + 2) + 2)$

•**7.** $n + 1 + (r + 1) + ((n + 1) + (r + 1)) + (2 + (2n + 1) + (2r + 1))$

•**8.** $(-2 + x) + (1 - x + ((1 - x) + (-1 + x))) + ((1 - x) + (x + 1))$

9. **a)** Wie lautet die Quersumme* q der Zahl $10 \cdot x + y$; $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $y \in \{0; 1; 2; 3; 4; \ldots; 9\}$?

b) Warum sind alle Zahlen der Form $10 \cdot x + (9 - x)$ mit $x \in \{0; 1; 2; \ldots; 9\}$ durch 9 teilbar?

•**c)** Sind auch alle Zahlen der Form $100 \cdot x + (99 - x)$ mit $x \in \{0; 1; 2; \ldots; 99\}$ durch 9 teilbar?

:**d)** Welche gemeinsamen Teiler haben alle Zahlen aus **c)**?

3.3.3 Minusklammern

Steht in einem Aggregat vor einer Klammer ein Minuszeichen, so spricht man kurz von einer **Minusklammer**, z. B. $3x - (7y - 5x + 8)$.
Diese Minusklammer wollen wir nun beseitigen. In Satz 75.1 haben wir gezeigt, daß $-a = (-1) \cdot a$ ist. Setzen wir an Stelle von a ein Aggregat, dann erhalten wir z. B.

$$-(b - c - d + e) = (-1) \cdot (b - c - d + e) = (-1) \cdot (b + (-c) + (-d) + e).$$

Mit Hilfe des Distributivgesetzes ergibt sich für die rechte Seite

$$(-1) \cdot b + (-1) \cdot (-c) + (-1) \cdot (-d) + (-1) \cdot e = -b + c + d - e.$$

Also gilt:

$$-(b - c - d + e) = -b + c + d - e.$$

Mit dieser Erkenntnis können wir nun auch Minusklammern im Innern eines Aggregats beseitigen:

$$\begin{aligned} a - (b - c - d + e) &= a + [-(b - c - d + e)] = \\ &= a + (-1) \cdot (b - c - d + e) = \\ &= a + (-b + c + d - e) = \\ &= a - b + c + d - e. \end{aligned}$$

* Das bequeme Fachwort **Quersumme** scheint erst im 19. Jh. aufgekommen zu sein.

Weil sich unsere Überlegungen auf jedes Aggregat übertragen lassen, gilt:

Satz 106.1: In einem Aggregat kann man, ohne daß sich der Wert des Aggregats ändert, eine Minusklammer mitsamt ihrem Minuszeichen weglassen, wenn man alle Rechenzeichen in der Klammer ändert, d. h. Pluszeichen durch Minuszeichen und Minuszeichen durch Pluszeichen ersetzt. Falls vor dem ersten Glied in der Klammer kein Zeichen steht, so muß ein Minuszeichen gesetzt werden;
kurz: **Minusklammern dürfen weggelassen werden, wenn alle Rechenzeichen geändert werden.**

Beispiel:

$$3x - (7y - 5x + 8) = 3x - 7y + 5x - 8 = 8x - 7y - 8.$$

Wenn man bedenkt, daß der Inhalt der Minusklammer ein Aggregat ist, dann läßt sich dieser Satz auch noch anders ausdrücken, nämlich:

Ein Aggregat wird subtrahiert, indem man jedes Glied des Aggregats subtrahiert.

Beispiel:

$$\begin{aligned} 3x - (7y - 5x + 8) &= 3x - 7y - (-5x) - 8 = \\ &= 3x - 7y + 5x - 8 = \\ &= 8x - 7y - 8. \end{aligned}$$

Nach Satz 106.1 kann man also Minusklammern an beliebigen Stellen in einem Aggregat weglassen, wenn man alle Rechenzeichen in der Klammer ändert. Umgekehrt kann man demnach Minusklammern an beliebigen Stellen setzen, wenn man die Rechenzeichen bei den Gliedern ändert, die in die Minusklammer kommen. Wir haben damit

Satz 106.2: Ein Aggregat ändert seinen Wert nicht, wenn man beliebig viele Glieder in einer Minusklammer zusammenfaßt und dabei alle Rechenzeichen ändert, z. B.

$$\boldsymbol{a + b - c + d - e - f = a - (-b + c - d) - (e + f).}$$

Wie man mit diesem Satz arbeitet, zeigen wir an folgendem

Beispiel:

$$\begin{aligned} -(-2a + 3b) - (5b + 8a) &= 2a - 3b - 5b - 8a = \\ &= (2a - 8a) - (3b + 5b) = \\ &= -6a - 8b. \end{aligned}$$

Aufgaben

1. a) $5a-(3b+7a)$ **b)** $5a-(3b-7a)$
c) $5a-(-3b+7a)$ **d)** $5a-(-3b-7a)$

2. a) $(2x-4y)-(6x-4y)$ **b)** $(2x+4y)-(6x+4y)$
c) $(2x+4y)-(6x-4y)$ **d)** $(-2x-4y)-(6x-4y)$
e) $(-2x+4y)-(-6x-4y)$ **f)** $-2x-(4y-6x)-4y$

3. a) $3a-(9x+7a)-(-4a-11x)$
b) $17b-(15a-9b)-2a+(-17a-26b)$
c) $14x-(-20a+7b-4x)-(-9x+19a+17b)+6x$
d) $11a+(13b+(12a-19b))-((4a-17b)+19a)$

4. $(9-11b+13c)-(15b+17-19c)-(-21c-26b+18)$

5. $12x-(23x-27y)-(-29y+3z+4u)+(-43z-47u-59x)-$
$-(-51u-16x+56y)-(7z+x)$

6. a) $\frac{5}{3}+a-(\frac{1}{6}-2\frac{1}{2}a)$
b) $-\frac{2}{3}b+\frac{1}{2}a+3\frac{1}{3}c-(-c-1\frac{1}{2}b)$
c) $-(-a+7\frac{1}{2}-4\frac{2}{5})-(6\frac{3}{10}+a-9\frac{2}{5})$
d) $(5{,}7-b)-(a+3{,}6)-(9{,}6-b)+(2{,}4+a)$

7. a) $-(-a+\frac{7}{3}b-21c+9{,}05)+(2\frac{1}{3}b-9{,}5)$
b) $-(-(-3{,}5u+5{,}5v-7w))-(3{,}5u-5{,}5v-7w)$

8. a) $(-\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y-2)-(-\frac{3}{10}x+\frac{4}{5}y-\frac{5}{2})-\frac{23}{6}x$
b) $(\frac{2}{3}a-1-\frac{7}{11}b)-(-\frac{1}{3}a-\frac{5}{11}b)-(1-\frac{10}{11}b)$
c) $(\frac{1}{5}r-\frac{5}{2}s-3)-(-\frac{1}{10}r+\frac{4}{5}s-\frac{11}{2})$

9. a) $(3x^2-2x+1)-(-2x^2+4x-6)$
b) $(7x^3-3x+2)-(-4x+5x^3+3)$
c) $(-3x^3+2x-3)-(4x^2-5-2x)-6x^3$
d) $-(6x^3-2x^2+5)-(3x^3+7x^2-2)$

10. a) $(\frac{3}{4}ab-\frac{5}{3}a^2b+1)-(-\frac{1}{4}ab+\frac{2}{3}a^2b)+(-ab+\frac{7}{3}a^2b)$
b) $(\frac{5}{2}a^2+\frac{4}{3}a-7)-(a^2+\frac{1}{3}a-5)-(\frac{3}{2}a^2+a-3)$

3.3.4 Faktor bei der Klammer

Bisher haben wir gelernt, wie man bei Aggregaten vom Typ $a+(b-c)-$ $-(e+f-g)$ die Klammern auflöst. Was aber, wenn vor einer dieser Klammern noch ein Faktor steht? Jetzt muß doch auch die Regel »Punkt vor Strich« berücksichtigt werden. Die einfachsten Fälle sind $a+b(c+d-e)$