Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

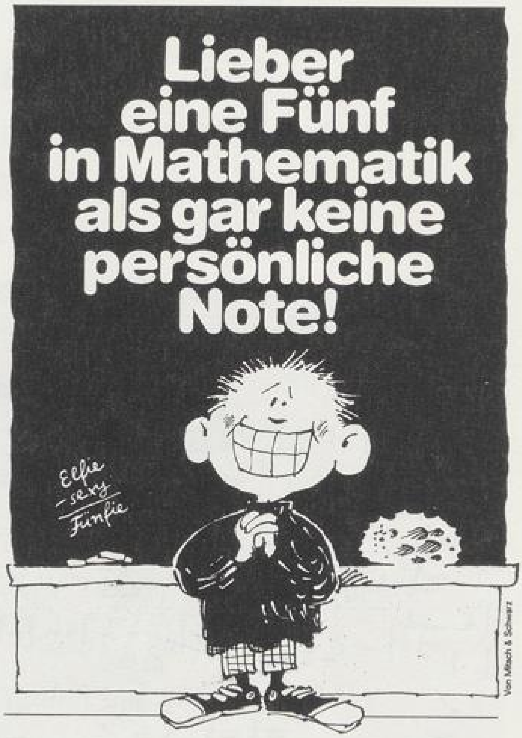
4.1 Aussagen und Aussageformen

urn:nbn:de:hbz:466:1-83493

4 Gleichungen

4.1 Aussagen und Aussageformen

4.1.1 Definitionen



Jeder Mensch stellt in seinem Leben viele Behauptungen auf.

Beispiele:

Ich bin heute müde.
Ich habe nicht von Karl abgeschrieben.
Mathematik macht Spaß.
$2 + 3 = 5$.
$2 \cdot 3 = 5$.

In der Logik bezeichnet man Sätze, in denen eine Behauptung aufgestellt wird, auch als Aussagen. Wesentlich an einer Aussage ist, daß man sinnvollerweise sagen kann, daß sie entweder wahr oder falsch ist. Das ist bei Sätzen der Umgangssprache oft nicht einfach zu entscheiden. Bei dem Satz »Mathematik macht Spaß« kann man sich verschiedene Entscheidungen vorstellen. Der eine wird zum Urteil kommen, er sei wahr, der andere, er sei falsch. Um solchen Schwierigkeiten aus dem Weg zu gehen, beschränken wir uns auf mathematische Aussagen, bei denen wir hoffen, daß wir immer entscheiden können, ob eine wahre oder eine falsche Aussage vorliegt.

> **Definition 114.1:** Sätze, bei denen feststeht, ob sie wahr oder falsch sind, heißen **Aussagen.**

Man kennzeichnet wahre Aussagen durch ein w und falsche Aussagen durch ein f. w und f heißen die **Wahrheitswerte** der Aussagen.

Beispiele:

$2 + 3 = 5$	(w)	$17^2 \leqq 288$	(f)
$2 \cdot 3 = 5$	(f)	$5 \in \mathbb{N}$	(w)
$17^2 = 289$	(w)	$0{,}5 \in \mathbb{N}$	(f)
$17^2 < 290$	(w)	39 ist eine Primzahl	(f)

Ersetzt man in einer Aussage eine oder mehrere Zahlen durch Variablen oder durch einen Term mit Variablen, dann entsteht eine Aussageform.
Ersetzt man in einer Aussageform alle Variablen durch geeignete Zahlen, dann entsteht wieder eine Aussage, die wahr oder falsch ist.

Beispiele:

Aussageform	Ersetzung	Aussage	Wahrheitswert
x ist eine Primzahl	$x = 39$ $x = 41$	39 ist eine Primzahl 41 ist eine Primzahl	f w
$x + 3 = 5$	$x = \frac{1}{2}$ $x = 2$	$\frac{1}{2} + 3 = 5$ $2 + 3 = 5$	f w
$x^2 < 25$	$x = -8\frac{1}{3}$ $x = 0$	$(-8\frac{1}{3})^2 < 25$ $0^2 < 25$	f w
$\frac{5x - y}{3} + y^2 = 5$	$x = 1; y = 3$ $x = 3; y = 0$	$\frac{5 \cdot 1 - 3}{3} + 3^2 = 5$ $\frac{5 \cdot 3 - 0}{3} + 0^2 = 5$	f w

Definition 115.1: Sätze mit mindestens einer Variablen, die durch geeignete Ersetzungen aller Variablen zu Aussagen werden, heißen **Aussageformen**.

Die Menge, aus der die geeigneten Ersetzungen für die jeweilige Variable genommen werden, heißt **Grundmenge *G*** dieser Variablen.
Bei der Aussageform »Der größte gemeinsame Teiler der Zahlen 36 und x ist 4«, kurz »$\text{ggT}(36; x) = 4$«, sind nur natürliche Zahlen geeignete Ersetzungen für x. Also kann $\mathbb{N}$ als Grundmenge für x gewählt werden.
Kommen in einer Aussageform mehrere Variablen vor, dann muß man natürlich für jede Variable die Grundmenge angeben, aus der die Einsetzungen genommen werden dürfen.
Wir treffen folgende

Vereinbarung 115.1: Ist keine besondere Grundmenge angegeben, dann ist die größte jeweils bekannte Zahlenmenge die Grundmenge. Das ist zur Zeit die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen.

Man interessiert sich bei einer Aussageform natürlich besonders für die Ersetzungen, bei denen eine wahre Aussage entsteht. Solche Ersetzungen heißen **Lösungen** der Aussageform.

Definition 116.1: Die Menge aller Ersetzungen, die eine Aussageform zu einer wahren Aussage machen, heißt **Lösungsmenge *L*** der Aussageform.

Beispiele:

Aussageform	Lösungsmenge
x ist eine Primzahl	$\{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$
$x + 3 = 5$	$\{2\}$
$x^2 < 25$	Menge aller Zahlen zwischen -5 und 5, also $\{x \mid -5 < x < 5\}$

Außerhalb der Mathematik treten Aussageformen oft als Formulare auf. Die Variablen werden dann meist durch Leerstellen gekennzeichnet.

Beispiel:

Der Schüler ....
besucht im Schuljahr .... die Klasse ......
des Euler-Gymnasiums.

Aussageformen können also sehr verschieden aussehen. Für die Mathematik sind die wichtigsten Aussageformen Gleichungen und Ungleichungen.

Aufgaben

1. Formuliere 3 wahre und 3 falsche Aussagen aus dem Alltag.

2. Formuliere 3 wahre und 3 falsche mathematische Aussagen.

3. Entscheide bei den folgenden Sätzen, ob sie Aussagen sind, und gib gegebenenfalls den Wahrheitswert an.
a) Mathematik ist schwierig.
b) Caesar wurde am 15. März 44 v. Chr. ermordet.
c) Nachts ist es kälter als draußen.
d) Wagadugu ist die Hauptstadt von Mali.
e) Wie alt bist du? **f)** Rot ist schöner als Blau.

4. Entscheide bei den folgenden Sätzen, ob sie Aussagen sind, und gib gegebenenfalls den Wahrheitswert an.
a) $(1\frac{1}{3})^2 = 1\frac{1}{9}$ **b)** $\frac{5}{18} - \frac{7}{24} = -\frac{1}{72}$ **c)** $-7 > \frac{1}{2}$
d) $-8 \leqq -8$ **e)** Die Winkelsumme im Viereck ist 720°.
f) $-3 \cdot 7\frac{1}{3} + 12$ **g)** 3,2 ha = 32 a
h) Die Differenz zweier Primzahlen ist eine Primzahl.
i) Die Differenz zweier Primzahlen ist keine Primzahl.
j) 193 ist eine Primzahl.

5. Führe in den folgenden Aussageformen die angegebenen Ersetzungen durch und entscheide, ob sie zu einer wahren oder falschen Aussage führen.

a) $\frac{7}{3}x - 2 = -1; \quad x \in \{0, 1, \frac{3}{7}, \frac{7}{3}, -3\}$

b) $7{,}5 - x < 2x; \quad x \in \{-2, -\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 100\}$

•**c)** $\dfrac{\frac{x}{3} + \frac{x}{5}}{\frac{x}{3} - \frac{x}{5}} = 2x; \quad x \in \{3, -5, 2\}$

d) $(x-3) \cdot (x+5) > 0; \quad x \in \{-4, -6, 0\}$

e) x ist Teiler von 360; $x \in \{1, 2, \ldots, 10\}$

6. Gib zu den gegebenen Grundmengen die Lösungsmenge der folgenden Aussageformen an.

a) $x < 5; \quad G = \mathbb{N}_0$

b) $z^2 < 5; \quad$ **1)** $G = \mathbb{N}_0 \quad$ **2)** $G = \mathbb{Z}$

c) $\frac{1}{10} \leq \frac{2}{n} < \frac{1}{3}; \quad G = \mathbb{N}$

•**d)** t ist Teiler von 36; **1)** $G = \mathbb{N}_0$
2) $G =$ Menge aller Primzahlen

e) n ist teilerfremd* zu 18; $G = \{1, 2, 3, \ldots, 17\}$

⁝**f)** $\mathrm{ggT}(36; x) = 4; \quad G = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$

⁝**g)** $\mathrm{kgV}(y; 18) = 72; \quad G = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$

•**7.** Gib die Lösungsmenge bezüglich der Grundmenge $\mathbb{Z}$ an.

a) $x - x = 0$ **b)** $x - 2x = 0$

c) $x - 1 = x$ **d)** $\frac{x}{x} = 1$ **e)** $\frac{x}{x} = 0$

8. Bestimme die Lösungsmenge bezüglich der Grundmenge $\mathbb{Z}$.

a) $|x| = 4$ **b)** $|x| = -4$ **c)** $|x| < 4$

d) $|x| > 4$ •**e)** $|x| = x$ ⁝**f)** $|x| = -x$

4.1.2 Existenzaussagen und Allaussagen

Wir haben oben eine Möglichkeit kennengelernt, wie man aus Aussageformen Aussagen gewinnt, nämlich dadurch, daß man alle Variablen durch geeignete Zahlen (oder gegebenenfalls auch Wörter) ersetzt. Es gibt aber noch eine zweite Möglichkeit, aus Aussageformen Aussagen zu machen.
$x + 0 = x$ ist eine Aussageform, ihre Lösungsmenge ist $\mathbb{Q}$. Diesen Sachverhalt können wir auch so ausdrücken:
Für alle $x \in \mathbb{Q}$ gilt: $\quad x + 0 = x$.

* *Beachte:* 2 Zahlen heißen **teilerfremd**, wenn ihr ggT gleich 1 ist.

Dieser Satz enthält zwar eine Variable, ist aber keine Aussageform mehr, weil durch den vorangestellten Redeteil »Für alle $x \in \mathbb{Q}$ gilt:« entscheidbar wird, ob der Satz wahr oder falsch ist; d.h., der Satz ist eine Aussage.
Man kann noch durch einen zweiten Redeteil eine Aussageform zu einer Aussage machen, nämlich durch »Es gibt ein $x \in \mathbb{Q}$, so daß ...«.
Zum Beispiel erhält man aus der Aussageform $x^2 = 9$ die Aussage:
Es gibt ein $x \in \mathbb{Q}$, so daß $x^2 = 9$.
Diese Aussage ist wahr, weil z.B. $(-3)^2 = 9$.
Allgemein legen wir fest:

Definition 118.1: Eine Aussage, die den Redeteil »Es gibt ein ...« bzw. »Es existiert ein ...« enthält, heißt **Existenzaussage**. Eine Aussage, die den Redeteil »Für alle ...« enthält, heißt **Allaussage**.

All- und Existenzaussagen können natürlich auch falsch sein:
»Für alle $x \in \mathbb{Q}$ gilt $x + 1 = 5$« ist falsch, weil z.B. $2 + 1 = 5$ falsch ist.
»Es gibt ein $x \in \mathbb{Q}$, so daß $x + 1 = x$« ist falsch, weil für alle $x \in \mathbb{Q}$ gilt, daß $x + 1 > x$ ist.
Die wichtigsten Beispiele für wahre All- und Existenzaussagen sind die Rechengesetze für die rationalen Zahlen, wie z.B. das Kommutativgesetz der Addition, das ausführlich geschrieben so lautet:
Für alle $a \in \mathbb{Q}$ und alle $b \in \mathbb{Q}$ gilt $a + b = b + a$.

Aufgaben

•**1.** Entscheide bei den folgenden Aussagen, ob sie wahr sind.
a) Für alle $a \in \mathbb{Q}$ gilt: $a - a = a$.
b) Für alle $y \in \mathbb{Q}$ gilt: $y^2 > 0$.
c) Für alle $n \in \mathbb{N}$: $2n > n$.
d) Für alle $x \in \mathbb{Q}$: $2x > x$.

•**2.** Entscheide bei den folgenden Aussagen, ob sie wahr sind.
a) Es gibt ein $a \in \mathbb{Q}$, so daß $7a = a$.
b) Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $n < 1$.
c) Es gibt ein $z \in \mathbb{Z}$: $z < 1$.
d) Es gibt ein $u \in \mathbb{Q}$: $u^2 < 0$.