Algebra

Barth, Friedrich

München, 1996

Aufgaben

Definition 116.1: Die Menge aller Ersetzungen, die eine Aussageform zu einer wahren Aussage machen, heißt **Lösungsmenge *L*** der Aussageform.

Beispiele:

Aussageform	Lösungsmenge
x ist eine Primzahl	$\{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$
$x + 3 = 5$	$\{2\}$
$x^2 < 25$	Menge aller Zahlen zwischen -5 und 5, also $\{x \mid -5 < x < 5\}$

Außerhalb der Mathematik treten Aussageformen oft als Formulare auf. Die Variablen werden dann meist durch Leerstellen gekennzeichnet.

Beispiel:

Der Schüler ....
besucht im Schuljahr .... die Klasse ......
des Euler-Gymnasiums.

Aussageformen können also sehr verschieden aussehen. Für die Mathematik sind die wichtigsten Aussageformen Gleichungen und Ungleichungen.

Aufgaben

1. Formuliere 3 wahre und 3 falsche Aussagen aus dem Alltag.

2. Formuliere 3 wahre und 3 falsche mathematische Aussagen.

3. Entscheide bei den folgenden Sätzen, ob sie Aussagen sind, und gib gegebenenfalls den Wahrheitswert an.
a) Mathematik ist schwierig.
b) Caesar wurde am 15. März 44 v. Chr. ermordet.
c) Nachts ist es kälter als draußen.
d) Wagadugu ist die Hauptstadt von Mali.
e) Wie alt bist du? **f)** Rot ist schöner als Blau.

4. Entscheide bei den folgenden Sätzen, ob sie Aussagen sind, und gib gegebenenfalls den Wahrheitswert an.
a) $(1\frac{1}{3})^2 = 1\frac{1}{9}$ **b)** $\frac{5}{18} - \frac{7}{24} = -\frac{1}{72}$ **c)** $-7 > \frac{1}{2}$
d) $-8 \leqq -8$ **e)** Die Winkelsumme im Viereck ist 720°.
f) $-3 \cdot 7\frac{1}{3} + 12$ **g)** 3,2 ha = 32 a
h) Die Differenz zweier Primzahlen ist eine Primzahl.
i) Die Differenz zweier Primzahlen ist keine Primzahl.
j) 193 ist eine Primzahl.

5. Führe in den folgenden Aussageformen die angegebenen Ersetzungen durch und entscheide, ob sie zu einer wahren oder falschen Aussage führen.

a) $\frac{7}{3}x - 2 = -1; \quad x \in \{0, 1, \frac{3}{7}, \frac{7}{3}, -3\}$

b) $7{,}5 - x < 2x; \quad x \in \{-2, -\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 100\}$

•**c)** $\dfrac{\frac{x}{3} + \frac{x}{5}}{\frac{x}{3} - \frac{x}{5}} = 2x; \quad x \in \{3, -5, 2\}$

d) $(x-3) \cdot (x+5) > 0; \quad x \in \{-4, -6, 0\}$

e) x ist Teiler von 360; $x \in \{1, 2, \ldots, 10\}$

6. Gib zu den gegebenen Grundmengen die Lösungsmenge der folgenden Aussageformen an.

a) $x < 5; \quad G = \mathbb{N}_0$

b) $z^2 < 5; \quad$ **1)** $G = \mathbb{N}_0 \quad$ **2)** $G = \mathbb{Z}$

c) $\frac{1}{10} \leq \frac{2}{n} < \frac{1}{3}; \quad G = \mathbb{N}$

•**d)** t ist Teiler von 36; **1)** $G = \mathbb{N}_0$
2) $G =$ Menge aller Primzahlen

e) n ist teilerfremd* zu 18; $G = \{1, 2, 3, \ldots, 17\}$

••**f)** $\text{ggT}(36; x) = 4; \quad G = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$

••**g)** $\text{kgV}(y; 18) = 72; \quad G = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$

•**7.** Gib die Lösungsmenge bezüglich der Grundmenge $\mathbb{Z}$ an.

a) $x - x = 0$ **b)** $x - 2x = 0$

c) $x - 1 = x$ **d)** $\frac{x}{x} = 1$ **e)** $\frac{x}{x} = 0$

8. Bestimme die Lösungsmenge bezüglich der Grundmenge $\mathbb{Z}$.

a) $|x| = 4$ **b)** $|x| = -4$ **c)** $|x| < 4$

d) $|x| > 4$ •**e)** $|x| = x$ ••**f)** $|x| = -x$

4.1.2 Existenzaussagen und Allaussagen

Wir haben oben eine Möglichkeit kennengelernt, wie man aus Aussageformen Aussagen gewinnt, nämlich dadurch, daß man alle Variablen durch geeignete Zahlen (oder gegebenenfalls auch Wörter) ersetzt. Es gibt aber noch eine zweite Möglichkeit, aus Aussageformen Aussagen zu machen.
$x + 0 = x$ ist eine Aussageform, ihre Lösungsmenge ist $\mathbb{Q}$. Diesen Sachverhalt können wir auch so ausdrücken:
Für alle $x \in \mathbb{Q}$ gilt: $\quad x + 0 = x$.

* *Beachte:* 2 Zahlen heißen **teilerfremd**, wenn ihr ggT gleich 1 ist.